

On an inequality in $\text{Ip}(\mathbf{C})$ involving Basel problem

Autor(en): **Ibragimov, Zarif O. / Salimova, Diyora F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **70 (2015)**

Heft 2

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-630625>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On an inequality in $l_p(\mathbb{C})$ involving Basel problem

Zarif O. Ibragimov and Diyora F. Salimova

Zarif O. Ibragimov is an undergraduate student in mathematics at Samarkand State University in Uzbekistan. He has several prizes from Mathematical Olympiads including a Silver medal from the 51st International Mathematical Olympiad (IMO) 2010.

Diyora F. Salimova is a master student in mathematics at ETH Zürich who holds a BSc degree from Jacobs University Bremen in Germany. She has several prizes from Mathematical Olympiads including a Bronze medal from the 49th IMO 2008 and a Silver medal from the 50th IMO 2009.

The following conjecture was proposed by Z. Retkes on the Open Problem Garden [2]:

Conjecture. *For all $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in l_2(\mathbb{C})$ the following inequality holds*

$$\sum_{n \geq 1} |\alpha_n|^2 \geq \frac{6}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \left| \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l+1} \alpha_{2^k \cdot (2l+1)} \right|^2. \quad (1)$$

The aim of this short note is to verify this conjecture as an application of the Basel problem together with the Cauchy–Schwarz inequality and give a possible extension to $\alpha \in l_p(\mathbb{C})$, $p > 1$. Since it was the Basel problem which helped us to figure out the proof of the conjecture quickly, we would like to discuss it in a bit more detail. The Basel

Der Riemannsche Umordnungssatz besagt, dass man die Summanden einer bedingt konvergenten Reihe so umsortieren kann, dass die neue Summe einen beliebig vorgeschriebenen Wert annimmt. Dies ist also wahr, wenn die Reihe der Absolutbeträge der Summanden nicht konvergiert. Ist die Reihe hingegen absolut konvergent, so hat das Umsortieren auf den Wert der Reihe keinen Einfluss. In der vorliegenden Arbeit zeigen die Autoren eine geschickte Umordnungsvariante mit möglicher Gewichtung der einzelnen Summanden auf. Insbesondere beweisen sie unter Verwendung von elementaren Techniken, dass die neue Summe durch die unendliche Summe (von Potenzen) der ursprünglichen Summanden beschränkt ist, wobei die Ungleichung eine multiplikative Konstante führt, die im Spezialfall mit Eulers Basler Problem zusammenhängt. Sie lösen damit eine Aufgabe aus dem *Open Problem Garden*.

problem is the problem of finding the exact value of the sum

$$\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2},$$

which was posed by Pietro Mengoli in 1644 and solved by Leonhard Euler in 1735, who showed that the series sums to $\frac{\pi^2}{6}$. The problem is named after Basel, hometown of Leonhard Euler as well as of the Bernoulli family, who unsuccessfully attacked the problem. Nowadays, in literature one can find dozens of methods of calculating this series; for example, see [1], [3] and the references therein.

Proof of the conjecture. Let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and $\|\cdot\|_2$ denote the usual inner product and the norm, respectively, in the Hilbert space $l_2(\mathbb{C})$. Let $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ be any element of $l_2(\mathbb{C})$ and $k \in \mathbb{N}_0$ be fixed. Consider the vectors

$$x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots), \quad \text{and} \quad y_k = (\alpha_{2^k}, \alpha_{2^k \cdot 3}, \alpha_{2^k \cdot 5}, \dots).$$

We have

$$\sum_{k \geq 0} |\langle x, y_k \rangle|^2 = \sum_{k \geq 0} \left| \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l+1} \alpha_{2^k \cdot (2l+1)} \right|^2. \quad (2)$$

Since $\alpha \in l_2(\mathbb{C})$, it is obvious that $y_k \in l_2(\mathbb{C})$ for each $k \in \mathbb{N}_0$. Moreover, $x \in l_2(\mathbb{C})$ since

$$\|x\|_2^2 = \sum_{l \geq 0} \frac{1}{(l+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Now the Cauchy–Schwarz inequality yields

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} |\langle x, y_k \rangle|^2 &\leq \sum_{k \geq 0} \|x\|_2^2 \|y_k\|_2^2 \\ &= \|x\|_2^2 \sum_{k \geq 0} \|y_k\|_2^2 = \frac{\pi^2}{6} \sum_{k \geq 0} \|y_k\|_2^2. \end{aligned}$$

On the other hand

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \|y_k\|_2^2 &= \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} |\alpha_{2^k \cdot (2l+1)}|^2 \\ &= \sum_{n \geq 1} |\alpha_n|^2, \end{aligned}$$

where we have used the elementary fact that every positive integer n can be written in the form $n = 2^s r$ uniquely, where $s \in \mathbb{N}_0$ and r is an odd positive integer. Therefore,

$$\sum_{k \geq 0} |\langle x, y_k \rangle|^2 \leq \frac{\pi^2}{6} \sum_{n \geq 1} |\alpha_n|^2. \quad (3)$$

Now (3) together with (2) implies (1), and we are done. \square

It is easy to see from the above proof that (1) can be generalized further:

Let $x = (x_0, x_1, \dots) \in l_q(\mathbb{C})$ be a general sequence. Considering the q -norm of x , the p -norm of y_k and replacing the 2nd powers with p th, the Hölder inequality applied to each summand on the left-hand side of the identity (2) leads to the following result.

Theorem. *Let $p, q \in (1, \infty)$ be such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Then for all $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in l_p(\mathbb{C})$ and $x = (x_0, x_1, \dots) \in l_q(\mathbb{C})$ the following inequality holds*

$$\sum_{n \geq 1} |\alpha_n|^p \geq \left(\sum_{l \geq 0} |x_l|^q \right)^{-\frac{p}{q}} \left(\sum_{k \geq 0} \left| \sum_{l \geq 0} x_l \alpha_{2^k(2l+1)} \right|^p \right).$$

Acknowledgement

The authors gratefully acknowledge the attention of Prof. Thomas Wihler to this note. Thanks to Orif Ibrogimov for bringing the conjecture to our attention. We are also grateful to the referee whose comments have helped to improve the quality of the paper.

References

- [1] Benko, D., Molokach, J.: The Basel problem as a rearrangement of series, *College Math J.* **44** (2013) 171–176.
- [2] Retkes, Z., <http://www.openproblemgarden.org/category/analysis>.
- [3] Ritelli, D.: Another proof of $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ using double integrals, *Amer. Math. Monthly* **120** (2013) 642–645.

Zarif O. Ibragimov
 Samarkand State University
 Samarkand, Uzbekistan
 e-mail: zarif.i.94@gmail.com

Diyora F. Salimova
 Swiss Federal Institute of Technology Zürich
 Zürich, Switzerland
 e-mail: s.diyora@gmail.com