

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 69 (2014)

Artikel: A simple recursion for power sum polynomials
Autor: Länger, Helmut
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515860>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

A simple recursion for power sum polynomials

Helmut Länger

Helmut Länger studied mathematics at the Vienna University of Technology where he received his Ph.D. in 1976. Since 1984 he holds the position of an associate professor at the Institute of Discrete Mathematics and Geometry of the mentioned university. Algebra is one of his main research interests.

There exists some literature on power sum polynomials and their connection to Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials (cf., e.g., [1]–[5]). In this note we provide an elementary proof of a simple recursion for power sum polynomials.

In the following \mathbb{N} (\mathbb{N}_0 resp. \mathbb{R}) denote the set of all positive integers (non-negative integers resp. real numbers), let $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ and $x \in \mathbb{R}$ and put

$$P_k(n) := \sum_{i=1}^n i^{k-1}.$$

First we show that $P_k(n)$ is a polynomial in n of degree k .

Lemma 1.

$$P_k(n) = \frac{1}{k}((n+1)^k - 1) - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i-1} P_i(n).$$

Die Potenzsummen $1^k + 2^k + \dots + n^k$ sind Polynome vom Grad $k+1$ in n . Diese Potenzsummenpolynome sind ein beliebter Gegenstand mathematischer Untersuchungen. Die Wurzeln reichen bis in die griechische Antike. Der Ulmer Rechenmeister Johannes Faulhaber legte 1631 den Grundstein zur heute nach ihm benannten Formel für Potenzsummen. Unter anderem befassten sich Jakob Bernoulli und wenig später Leonard Euler mit diesen Polynomen. Deren Koeffizienten stehen in engem Zusammenhang mit den Bernoulli-Zahlen, die wiederum an den unterschiedlichsten Stellen der Mathematik auftreten, so etwa bei der Taylor-Entwicklung des Tangens und des Cotangens oder bei der Berechnung von Werten der Zetafunktion. Der Autor der vorliegenden Arbeit gibt einen neuen Beweis der Rekursionsformel von Dietmar Treiber, der ohne Bernoulli-Zahlen auskommt, und übersetzt die Formel in einen schlanken Algorithmus zur Berechnung der Polynome.

Proof.

$$\begin{aligned} (n+1)^k - 1 &= \sum_{j=1}^n ((j+1)^k - j^k) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} j^i = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1} \sum_{j=1}^n j^{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1} P_i(n). \end{aligned} \quad \square$$

Using induction on k we get

Lemma 2. $P_k(n)$ is a polynomial in n of degree k with leading coefficient $1/k$.

Let

$$P_k(n) = \sum_{i=0}^k a_{ki} n^i.$$

The following lemma contains some easy properties of the coefficients of $P_k(n)$.

Lemma 3.

$$a_{k0} = 0 \text{ and } \sum_{i=1}^k a_{ki} = 1.$$

Proof. $P_k(0) = 0$ and $P_k(1) = 1$ □

Now we can prove a simple recursion formula for the polynomials $P_k(x)$.

Theorem 4.

$$P_1(x) = x \text{ and } P_{k+1}(x) = k \int_0^x P_k(t) dt + (1 - k \int_0^1 P_k(t) dt)x.$$

Proof. Since

$$P_{k+1}(n+1) - P_{k+1}(n) = (n+1)^k$$

for every $n \in \mathbb{N}_0$ we have

$$P_{k+1}(x+1) - P_{k+1}(x) = (x+1)^k$$

for every $x \in \mathbb{R}$. Hence

$$P'_{k+1}(x+1) - P'_{k+1}(x) = k(x+1)^{k-1} = k(P_k(x+1) - P_k(x))$$

and therefore

$$P'_{k+1}(x+1) - kP_k(x+1) = P'_{k+1}(x) - kP_k(x).$$

Hence

$$P'_{k+1}(n) - kP_k(n) = P'_{k+1}(0) - kP_k(0) =: a$$

for all $n \in \mathbb{N}_0$ whence

$$P'_{k+1}(x) - kP_k(x) = a$$

for all $x \in \mathbb{R}$. Therefore

$$P_{k+1}(x) = k \int_0^x P_k(t) dt + ax + b$$

with some $b \in \mathbb{R}$. Since $P_{k+1}(0) = 0$ and $P_{k+1}(1) = 1$ we have

$$b = 0 \text{ and } a = 1 - k \int_0^1 P_k(t) dt. \quad \square$$

Theorem 4 leads to the following algorithm for calculating the polynomials $P_k(n)$:

Algorithm. We have $P_1(n) = n$. For $k \in \mathbb{N}$ the polynomial $P_{k+1}(n)$ can be obtained from $P_k(n)$ by the following three steps:

- (i) Integrate $P_k(n)$ with respect to n (with integration constant 0).
- (ii) Multiply this polynomial by a constant such that the leading coefficient equals $1/(k+1)$.
- (iii) Add a multiple of n such that the sum of the coefficients equals 1.

We finally demonstrate the usefulness of this algorithm by calculating $P_k(n)$ for $k = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\begin{aligned} P_1(n) &= n \\ P_2(n) &= \frac{n^2}{2} \cdot 1 + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\ P_3(n) &= \left(\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{4} \right) \cdot 2 + \frac{n}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\ P_4(n) &= \left(\frac{n^4}{12} + \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{12} \right) \cdot 3 + 0 \cdot n = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \\ P_5(n) &= \left(\frac{n^5}{20} + \frac{n^4}{8} + \frac{n^3}{12} \right) \cdot 4 - \frac{n}{30} = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}. \end{aligned}$$

References

- [1] B.C. Berndt, Ramanujan's notebooks, Part I. Springer, New York 1985, 157–158.
- [2] K. Dilcher, Zeros of Bernoulli, generalized Bernoulli and Euler polynomials. Mem. AMS **73** (1988).
- [3] J. Feldvoss, Über Potenzsummenpolynome. Mitt. Math. Ges. Hamburg **20** (2001), 115–124.
- [4] H. Rademacher, Topics in analytic number theory. Springer, New York 1973.
- [5] D. Treiber, Zur Kurvendiskussion der Potenzsummenpolynome. Elem. Math. **53** (1998), 119–125.

Helmut Länger
 Vienna University of Technology
 Faculty of Mathematics and Geoinformation
 Institute of Discrete Mathematics and Geometry
 Wiedner Hauptstraße 8–10
 A-1040 Vienna, Austria
 e-mail: h.laenger@tuwien.ac.at