

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 69 (2014)

Artikel: Die Regel von l'Hôpital
Autor: Struve, Horst / Witzke, Ingo
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515863>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Regel von l'Hôpital

Horst Struve und Ingo Witzke

Horst Struve unterrichtet seit 1992 an der Universität zu Köln. Sein Hauptarbeitsgebiet ist die Didaktik der Mathematik. Hier interessiert ihn insbesondere die Entwicklung von mathematischem Wissen, sowohl bei Schülern als auch in der Geschichte der Mathematik.

Ingo Witzke promovierte 2008 bei Horst Struve mit einer Arbeit über die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Seine Forschungsinteressen beziehen sich auf Theorie-, Wissens- und Begriffsentwicklung bzgl. des Lehrens und Lernens von Mathematik.

Professor Dr. Hans Joachim Burscheid (Universität zu Köln) zum 75. Geburtstag

Einleitung

Ein klassisches Problem der Analysis ist die Berechnung von Grenzwerten. Hierfür gibt es einfache Regeln, etwa die folgende, die eine Aussage über die Quotientenfunktion zweier reellwertiger Funktionen f und g macht: Ist $a \in \mathbb{R}$ und sind $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ mit $\beta \neq 0$, so ist $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$. Diese Aussage ist nicht mehr in dem Fall anwendbar, wenn der Grenzwert „vom Typ $\frac{0}{0}$ “ ist, d.h. wenn $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ sind. In diesem Fall gilt jedoch unter gewissen Bedingungen, etwa der Differenzierbarkeit von f

Die Autoren bedanken sich bei Dr. Eva Müller-Hill für wertvolle Diskussionen und Hilfen beim Abfassen des Artikels.

Klassische mathematische Theorien wie die Differential- und Integralrechnung besitzen einen kanonischen Aufbau: Nach der Einführung der reellen Zahlen werden zunächst Grenzwerte, Stetigkeit, Folgen und Reihen behandelt, um dann zur Differentiation und Integration zu kommen. In der Geschichte der Analysis hat sich die Theorie aber längst nicht so geradlinig entwickelt. Der heutige kanonische Aufbau ist das Ergebnis eines langen historischen Prozesses. Im vorliegenden Beitrag wird dies am Beispiel der Regel von l'Hôpital gezeigt, die hinsichtlich ihrer Formulierung als auch ihres Beweises eine bewegte Geschichte hinter sich hat.

und g in einem Intervall um a und der Existenz von $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dass auch $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert und die beiden Grenzwerte übereinstimmen. Diese Aussage wird als *Regel von l'Hôpital* bezeichnet, weil – wie es in vielen Büchern zur Geschichte der Mathematik heißt¹ – diese Regel sich in dem ersten gedruckten Lehrbuch zur Differential- und Integralrechnung findet, der 1696 erschienenen *Analyse des infiniment petits* von G.F.A. de l'Hôpital.²



Abbildung 1 Zeitgenössisches Bild von l'Hôpital

Historisch interessierte Mathematiker werden die Aussage, dass in einem 1696 verfassten Lehrbuch eine Aussage über Grenzwerte enthalten ist, allerdings mit Skepsis aufnehmen – wurde doch der Grenzwertbegriff zum ersten mal in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts von Cauchy in systematischer Weise zur Begründung der Differential- und Integralrechnung eingeführt. Was hat der Marquis de l'Hôpital also wirklich formuliert und bewiesen? In unserem Beitrag zeigen wir anhand von in der Geschichte der Mathematik einflussreichen Lehrbüchern, dass die Regel von l'Hôpital Unterschiedliches bedeutet hat und auf verschiedene Arten bewiesen wurde. Nach den *Analyse des infiniment petits* von l'Hôpital betrachten wir die *Théorie des fonctions analytiques* von J.L. Lagrange aus dem Jahr 1797, den *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* von S.F. Lacroix von 1797 und schließlich *Cours d'Analyse* von A.L. Cauchy von 1821. Bei allen vier Werken handelt es sich um Lehrbücher, in denen die Autoren – alle exzellente Mathematiker – die Infinitesimalrechnung auf systematische Art darstellen. Eine vollständige Beschreibung ihres Inhaltes findet man in dem Buch *Landmark Writings in Western Mathematics 1640–1940* (I. Grattan-Guinness (2005)), in dem die einflussreichsten mathematischen Lehrbücher der Neuzeit dargestellt werden.

¹Vgl. etwa Carl B. Boyer: *A History of Mathematics*. New York 1968, p. 460.

²In der Literatur findet man verschiedene Schreibweisen des Namens des Marquis: l'Hospital (in der Originalausgabe der „Analyse...“), l'Hôpital (wie der Name modern geschrieben wird) und auch l'Hopital (wie man den Namen in der „l'encyclopédie...“ von d'Alembert & Diderot finden kann). Wir schreiben im folgenden „l'Hôpital“.



Abbildung 2 Titelblatt der Erstausgabe der „Analyse des infiniment petits“

Durch unseren Streifzug durch die Geschichte der Analysis möchten wir am Beispiel der Regel von l'Hôpital zeigen, dass sich die Auffassung von Analysis im Laufe der Zeit geändert hat. Auch Mathematik ist eine Kulturwissenschaft, die Zeitströmungen kennt und deren Gegenstände, Begriffe und Methoden weiterentwickelt werden.

1 L'Hôpital und Johann Bernoulli

Wer der Entdecker der nach l'Hôpital benannten Regel ist, darüber wurde lange Zeit gerätselt. Die Regel wurde, wie gesagt, zum erstenmal 1696 in den *Analyse des infiniment petits* veröffentlicht, was für eine Urheberschaft von l'Hôpital spricht. Kaum war dieser allerdings im Jahr 1704 gestorben, meldete sich Johann Bernoulli zu Wort und beanspruchte die Entdeckung für sich. Über 200 Jahre blieb die Frage offen. Einen ersten Hinweis erhielt man 1922 als P. Schafheitlein in Basel in J. Bernoullis Handschriften ein Manuskript zur Differentialrechnung aus den Jahren 1691/92 entdeckte und eine beträchtliche Übereinstimmung mit den *Analyse des infiniment petits* feststellte. L'Hôpital hatte offenbar erheblich von Bernoulli profitiert. Die Regel für $\frac{0}{0}$ ist allerdings nicht in der Bernoullischen Differentialrechnung enthalten. Im Jahr 1955 entdeckt man dann im Briefwechsel von Bernoulli eine Abmachung zwischen diesem und l'Hôpital, in dem ersterer sich verpflichtete, letzteren in den Leibnizschen calculus einzuführen und die Urheberschaft und Entdeckungen dem Marquis zu überlassen. Im Gegenzug erhielt Bernoulli eine jährliche Gratifikation – eine für heutige Verhältnisse sittenwidrige Vereinbarung. Zu den Erkenntnissen, die Bernoulli dem Marquis mitteilte, gehörte auch die Regel für $\frac{0}{0}$, wie ein Brief aus dem Jahre 1694 belegt. L'Hôpital verwendet in seinem Lehrbuch auch fast dieselben Beispiele, an denen Bernoulli ihm die Regel erläutert hatte. Es bleibt festzuhalten, dass die Regel eigentlich nach Johann Bernoulli benannt werden müsste – der allerdings Namenspatron für genügend andere mathematische Aussagen ist (vgl. hierzu D.J. Struik (1963)).

Die nach l'Hôpital benannte Regel findet man in seinen *Analyse des infiniment petits* zu Beginn von „Section IX“ in Abschnitt 163. Dort formuliert er das folgende „Problème“ (p. 206):

Soit une ligne courbe AMD (Fig. 130 in Abbildung 2) ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$) telle que la valeur de l'appliquée y soit exprimée par une fraction, dont le numérateur et le dénominateur deviennent chacun zero lorsque $x = a$, c'est-à-dire, lorsque le point P tombe sur le point donné B . On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée BD .³

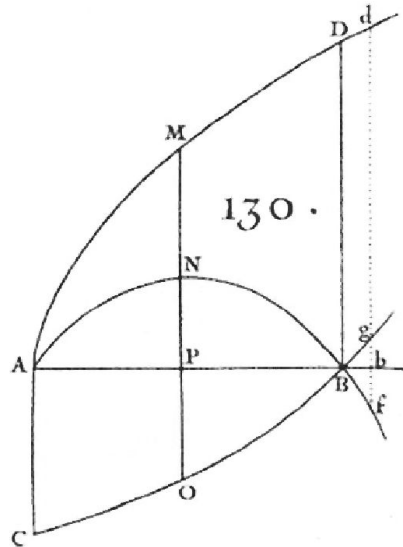


Abbildung 3 Figur 130 der „Analyse des infiniment petits“ von l'Hôpital

Bemerkenswert ist, dass l'Hôpital ein Problem über Kurven formuliert und nicht eines – wie in der modernen Formulierung der Regel – über Funktionen: Gesucht ist die Ordinate eines Punktes einer gegebenen Kurve. Kurven wurden zu Zeiten von l'Hôpital nicht etwa durch Funktionsgleichungen definiert sondern in der Descarteschen und griechischen Tradition durch Konstruktionen. Diesen so definierten Kurven wurden dann im nachhinein Gleichungen zugeordnet, die die Werte x der Abszissen und y der Ordinaten der Kurvenpunkte beschrieben und mit deren Hilfe man die Kurven untersuchen konnte. An der obigen Figur fällt auf, dass l'Hôpital offenbar noch nicht in konsequenter Weise negative Koordinaten verwendet. AP ist die x -Achse. Wenn die Zählerkurve oberhalb der x -Achse verläuft und die Nennerkurve unterhalb, dann müsste die Kurve AMD eigentlich unterhalb der x -Achse verlaufen. Die Koordinaten x und y sind für l'Hôpital noch Streckenlängen, die nur positive Werte besitzen.

³Zu deutsch: AMD sei eine Kurve ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$) von der Art, dass der Wert der Ordinate y durch einen Bruch dargestellt werden kann, dessen Zähler und Nenner für $x = a$ Null werden, d.h. wenn der Punkt P mit dem gegebenen Punkt B zusammenfällt. Gesucht ist der Wert der Ordinate BD .

In der hier betrachteten Situation kann man die Ordinaten eines Punktes der Kurve AMD durch einen Bruch beschreiben, der der Quotient zweier algebraischer Ausdrücke ist, nämlich der Ordinaten der Punkte der Kurven ANB und COB . Die Zählerkurve ANB und die Nennerkurve COB schneiden sich im Punkt B , so dass der Bruch, der die Ordinatenwerte der Punkte der Kurve AMD beschreibt in B „von der Form $\frac{0}{0}$ “ ist, wie man später formulierte. Das Problem, das l'Hôpital stellt, lautet: Was ist die Ordinate des Punktes der Kurve AMD mit Abszisse B ?

Beschreibt man die Zähler- und Nennerkurven durch Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und geht – zurecht – davon aus, dass die von l'Hôpital betrachteten Kurven stetig sind, so kann man das Problem wie folgt in moderner Sprache paraphrasieren: Was ist $\lim_{x \rightarrow x_B} \frac{f(x)}{g(x)}$, wenn x_B die Abszisse des Punktes B ist? Diese Formulierung konnte l'Hôpital aber nicht wählen, da der Funktionsbegriff erst ein halbes Jahrhundert später von L. Euler in der Mathematik etabliert wurde und der Grenzwertbegriff erst im 19. Jahrhundert eingeführt wurde.

In seinen *Analyse des infiniment petits* gibt l'Hôpital zwei Beispiele für die obige Regel:

$$(i) \quad y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} \qquad (ii) \quad y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$$

Für $x = a$ werden in beiden Fällen Zähler und Nenner 0.⁴ Setzt man im ersten Beispiel $a = 1$, so erhält man als Kurven, die zu den drei Funktionen gehören, gerade die von l'Hôpital in obiger Figur skizzierten, ohne dass l'Hôpital dies vermerkt – dabei ist A die erste positive Nullstelle der Zählerkurve; die zur Nennerfunktion gehörige Kurve müsste an der x -Achse, der Geraden durch die Punkte A und B , gespiegelt werden.

l'Hôpital sagt nun, dass man den gesuchten Wert erhält, indem man das Differential des Zählers durch das Differential des Nenners dividiert nachdem man $x = a$ gesetzt hat. Mit den Worten des Marquis:

... partant que si l'on prend la différence du numérateur, et qu'on la divise par la différence du dénominateur, après avoir fait $x = a$... , l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée ... BD .⁵

Differentiale werden entsprechend dem Leibnizschen calculus gebildet. Nach Leibniz gibt der Quotient der Differentiale dy und dx in einem Punkt mit Abszisse x und Ordinate y die Steigung der Tangente in diesem Punkt an. Außer Differentialen 1. Ordnung wie dx und dy betrachtet Leibniz auch Differentiale höherer Ordnung, etwa ddx , ddy . Differentiale höherer Ordnung sind im folgenden ohne Bedeutung. Mit modernen Begriffen kann man die Regel zur Bildung von Differentialen 1. Ordnung wie folgt beschreiben: Ist $y = f(x)$ ein algebraischer Ausdruck (der mit Hilfe der Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzelziehen gebildet wurde), so ist das Differential

⁴Es sei angemerkt, dass im zweiten Beispiel der Wert $2a$ der stetig ergänzten Funktion an der Stelle a mit Hilfe der dritten binomischen Formel schneller gefunden werden kann als mit Hilfe der Regel von l'Hôpital.

⁵Zu deutsch: ... wenn man das Differential des Zählers bestimmt hat und dividiert dieses durch das Differential des Nenners, so erhält man nachdem man $x = a$ gesetzt hat, ... den Wert der gesuchten Ordinate ... BD .

$dy = f'(x)dx$. Mit „ $f'(x)$ “ ist in dieser Gleichung natürlich nur der algebraischen Ausdruck gemeint, welcher der modernen Ableitung $f'(x)$ entspricht und nicht eine Ableitungsfunktion. Ist beispielsweise $y = x^3$, so gilt nach Leibniz für die Differentiale dx und dy , dass $dy = 3x^2dx$.

Wird die Zählerkurve mit $f(x)$ bezeichnet und die Nennerkurve mit $g(x)$ und ist $y_1 = f(x)$ und $y_2 = g(x)$, so ist gemäß dem Leibnizschen calculus der Quotient der Differentiale

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{f'(x)dx}{g'(x)dx}$$

und damit nach Kürzen des „reinen Symbols“ dx

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Der Quotient der Differentiale hat dann an der Stelle a den Wert $\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Die beiden oben genannten originalen Beispiele von l'Hôpital mögen dieses Vorgehen erläutern:

(i) Es ist

$$df = \frac{a^3 - 2x^3}{\sqrt{2a^3x - x^4}}dx - \frac{aa}{3\sqrt[3]{axx}}dx \quad \text{und} \quad dg = -\frac{3a}{4\sqrt[4]{a^3x}}dx$$

und daher ist der Quotient $\frac{df}{dg}$ an der Stelle a

$$\frac{-(4/3)adx}{-(3/4)dx} = \frac{16}{9}a.$$

(ii) Es ist

$$df = -adx \quad \text{und} \quad dg = -\frac{a}{2\sqrt{ax}}dx,$$

und daher ist der Quotient $\frac{df}{dg}$ an der Stelle a gleich $2a$.

Die Begründung der Regel ist für heutige Leser schwer nachzuvollziehen. L'Hôpital betrachtet einen Punkt d der Kurve, der „unendlich nahe“ bei D liegt und die Abszisse b besitzt (vgl. die obige Figur). Da d unendlich nahe bei D liegt, unterscheiden sich die Ordinaten von D und d „nicht“. Die Ordinate bd von d ist gleich dem Quotienten der entsprechenden Werte der Zähler- und der Nennerkurve $bd = \frac{bf}{bg}$. Nach l'Hôpital sind bf und bg ebenfalls unendliche kleine Größen und zwar gerade die Differentiale der Zähler- und der Nennerkurve im Punkt B . – Voilà!

Wenn man diese Argumentation liest, wird verständlich, dass über die unendlich kleinen Größen, über deren Natur und Eigenschaften, leidenschaftlich gestritten wurde. Bischof Berkeley bezeichnet in einer beißenden Polemik, die sieben Jahre nach Newtons Tod erschien, infinitesimale Größen als „ghosts of departed quantities“. Dieser Kritik wird auch heute noch zugestimmt (vgl. Kleiner (2001), der von „Berkeley's main and correct criticism“ spricht).⁶

⁶Diese Vorwürfe sind ungerechtfertigt, der calculus lässt sich als eine konsistente Theorie rekonstruieren, vgl. H.J. Burscheid & H. Struve (2001).

So lobte die 1700 von Leibniz gegründete Berliner Akademie der Wissenschaften einen Preis für denjenigen aus, der erklären könne, „how ... so many correct theorems have been deduced from a contradictory supposition [the existence of infinitesimals]“ (zitiert nach I. Grattan-Guinness (1980)). Da kein Beitrag die geforderte klare und präzise Theorie enthielt, versuchte sich der Vorsitzende der Berliner Akademie, Lagrange, selbst an einer Lösung. Diese betrachten wir am Beispiel der Regel von l'Hôpital im nächsten Abschnitt.

2 Lagrange: ein erster Beweis

1797 erschien die *Théorie des fonctions analytiques* von Joseph Louis Lagrange, ein bedeutendes Lehrbuch des 19. Jahrhunderts. Wir betrachten, wie er die Regel von l'Hôpital behandelt. Dabei zitieren wir im folgenden aus der deutschen Übersetzung „Theorie der analytischen Funktionen“ von J.P. Gruson aus den Jahren 1797/98.

Zu Beginn von §39 heißt es:

... wollen wir die Theorie von der Methode lehren, um den Werth eines Bruchs, in dem Fall, wo Zähler und Nenner zu gleicher Zeit Null werden, zu finden. Es sey $\frac{fx}{Fx}$ ein solcher Bruch⁷, wo fx und Fx Funktionen von x sind, und wo die Voraussetzung von $x = a$ sie beyde zu gleicher Zeit zu Null macht. Man verlangt den Werth dieses Bruchs, wenn $x = a$.

Dies liest sich wie die moderne Formulierung des Problems, das zur Regel von l'Hôpital führt. Es geht nicht mehr – wie noch bei l'Hôpital –, um die Bestimmung der Ordinate eines Kurvenpunktes, sondern um die Bestimmung des Wertes eines algebraischen Ausdruckes, einer Quotientenfunktion.

Schaut man sich an, wie Lagrange dieses Problem löst, so sieht man aber, dass er noch ein beträchtliches Stück von der modernen Auffassung der Analysis entfernt ist. Lagrange setzt

$$y = \frac{f(x)}{F(x)}$$

und formt diese Gleichung um zu $yF(x) = f(x)$. Mit Hilfe der Produktregel erhält er dann

$$y'F(x) + yF'(x) = f'(x).$$

Nun setzt Lagrange $x = a$ und bekommt wegen $F(a) = 0$ für den Wert der Quotientenfunktion y an der Stelle a

$$y = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Auch bei Lagrange treten noch keine Grenzwerte auf. Der Wert der Quotientenfunktion an der Stelle a ist der Wert des Quotienten der Ableitungen der Zähler- und der Nennerfunktion an der Stelle a , nicht etwa der Grenzwert der Quotientenfunktion der Ableitungen für x gegen a . Die Existenz dieser Ableitungen werden vorausgesetzt. Aber was versteht Lagrange unter den Ableitungen, wenn er noch keine Grenzwerte kennt?

⁷Lagrange schreibt noch fx statt $f(x)$.

Das Ziel, welches Lagrange in seiner *Théorie ...* verfolgt, geht aus dem vollständigen Titel hervor:

Theorie der analytischen Funktionen, in welcher die Grundsätze der Differentialrechnung vorgetragen werden, unabhängig von Betrachtung der unendlich kleinen oder verschwindenden Grössen der Grenzen oder Fluxionen, und zurückgeführt auf die algebraische Analysis.

Lagrange wollte den calculus auf eine rein algebraische Basis stellen, um ihn von den problematischen Begriffen der infinitesimalen oder unendlichkleinen Größen (Leibniz) und Fluxionen (Newton) zu befreien. Funktionen waren für ihn innerhalb dieser sog. algebraischen Analysis analytische Ausdrücke, die mit Hilfe von Variablen, Konstanten und den üblichen algebraischen und transzendenten Operationen gebildet wurden, aber auch durch Differenzieren und Integrieren. Jede Funktion besitzt für Lagrange eine Potenzreihendarstellung, wobei diese nicht die Funktion definiert sondern lediglich eine weitere Darstellung ist – allerdings eine wichtige: Lagrange definiert die Ableitung einer Funktion als zweiten Koeffizienten der entsprechenden Taylorreihe – also entsprechend dem Ziel seiner Arbeit, ohne Bezug auf infinitesimale und geometrische Größen, rein algebraisch.

$$f(x + i) = f(x) + i f'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + \dots$$

Aber auch hier ist noch Vorsicht geboten: Funktionen $f(x)$ und deren Ableitungen $f'(x)$ sind für Lagrange algebraische Ausdrücke, deren Referenzobjekte nicht der Graph der Funktionen im modernen Sinne sind (also die Menge aller Paare $(x, f(x))$), sondern die eine eigenständige Bedeutung besitzen – mit den Worten von C.G. Fraser (1980, S. 263):

To prove a theorem was to establish its validity on the basis of the general formal properties of the relations, functions, and formulae in question. The essence of the result was contained in its general correctness, rather than in any considerations what might happen at particular numerical values of the variables.

Man kann dies auch so interpretieren, dass Lagrange unterstellt, dass algebraische Ausdrücke Kurven mit vernünftigen Eigenschaften bezeichnen – so wie das in den von l'Hôpital gegebenen Beispielen aus Abschnitt 1 auch der Fall ist: Zählerfunktion, Nennerfunktion und die Quotientenfunktion sind fast überall differenzierbar im modernen Sinne. Fraser (1980, S. 262) bringt dies wie folgt zum Ausdruck:

For the 18th-century analyst, functions are things that are 'out there', in the same way that the natural scientist studies plants, insects or minerals, given in nature. As a general rule, such functions are very well-behaved, except possibly at a few isolated exceptional values.

Setzt man dies voraus, was hat Lagrange dann bewiesen? Man kann seine Version der l'Hôpital'schen Regel in etwa wie folgt in moderner Sprache paraphrasieren:

Sind die Funktionen $f(x)$, $F(x)$ in einem Intervall I um den Punkt a differenzierbar (und als Taylorreihen darstellbar) und ist $f(a) = 0$ und $F(a) = 0$ und besitzt die Funktion $y = \frac{f(x)}{F(x)}$ an der Stelle a eine stetige Ergänzung, so dass

die ergänzte Funktion \bar{y} im Intervall I differenzierbar ist, so gilt an der Stelle a , dass $\bar{y} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$.

Für diesen Satz gilt der Lagrangesche Beweis (mit \bar{y} statt y an den entsprechenden Stellen).

Bemerkung. Die Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen im Intervall I soll zum Ausdruck bringen, dass die Funktionen „vernünftige“ Eigenschaften besitzen bzw. Namen von Kurven mit „vernünftigen“ Eigenschaften sind. Man kann diese abschwächen, wie der folgende moderne Beweis der Lagrangeschen Version der Regel von l'Hôpital zeigt:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{F(x) - F(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{F(x)-F(a)}{x-a}} \rightarrow \frac{f'(a)}{F'(a)} \quad \text{für } x \rightarrow a.$$

Es genügen also die Voraussetzungen, dass die in einer Umgebung von a definierten Funktionen f und F an der Stelle a den Wert 0 annehmen, dass die Ableitungen $f'(x)$ und $F'(x)$ lediglich an der Stelle $x = a$ existieren und $F'(a) \neq 0$ ist (vgl. Heuser (1988, S. 286)).

3 Lacroix: ein modifizierter Beweis

Wir kommen zum nächsten von uns betrachteten Autor, Sylvestre François Lacroix. In den Jahren 1797–1800 erschien sein dreibändiges Werk *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. Der Autor versucht in diesem Werk eine umfassende, enzyklopädische Darstellung des calculus, der diesen für das nächste Jahrhundert zugänglich machen sollte. Wir zitieren im folgenden aus der deutschen Übersetzung „Lehrbegriff des Differential- und Integralcalculus“ von J.P. Gruson aus den Jahren 1799/1800.

Die Grundlagen des calculus sind für Lacroix dieselben wie für Lagrange. Funktionen sind für ihn algebraische Ausdrücke, die sich als Reihen darstellen lassen, dessen erster Koeffizient mit $f'(x)$ symbolisiert wird und gelegentlich von Lacroix als „derived function“ bezeichnet wird. Lacroix widmet immerhin 23 Seiten dem Thema „Von den Ausdrücken, die in gewissen besonderen Fällen $\frac{0}{0}$ werden“. Er spricht auch, wie Lagrange, von „dem wahren Werthe einer Function, die $\frac{0}{0}$ wird“.

Die Regel von l'Hôpital formuliert er wie folgt (Nr. 136):

Um den wahren Werth einer Function zu erhalten, die $\frac{0}{0}$ wird, wenn man x einen besonderen Werth giebt, so muß man ihren Zähler und Nenner differenzieren, bis dass man für den einen oder für den anderen ein Resultat findet, welches nicht verschwindet; die vorgegebene Function wird im ersten Falle unendlich seyn, Null im zweyten, und wenn sie einen endlichen Werth hat, so wird man zu gleicher Zeit zwey nicht verschwindende Resultate begegnen.

Diese Aussage unterscheidet sich von der Lagrangeschen nicht in den verwandten Begriffen sondern im Umfang der Regel: Lacroix betrachtet auch den Fall, dass man mehrfach differenzieren muss, um zu einem Ergebnis zu gelangen. Interessant ist sein Beweis, der sich von dem Lagrangeschen darin unterscheidet, dass er von den Taylorreihen entscheidend Gebrauch macht. Den allgemeinen Beweis, der aufgrund seiner Notationen mühsam zu lesen ist, erläutert er zunächst an dem Beispiel $\frac{a^x - b^x}{x}$. Für $x = 0$ erhält man einen

Bruch vom Typ $\frac{0}{0}$. Aufgrund der Taylorreihenentwicklung der Exponentialfunktion an der Stelle $x = 0$

$$a^x = 1 + \frac{\ln(a)}{1}x + \frac{(\ln(a))^2}{1 \cdot 2}x^2 + \dots$$

ergibt die Anwendung der obigen Regel den Quotienten (wobei für Lacroix die erste Ableitung $f'(x)$ der zweite Koeffizient der Reihenentwicklung ist)

$$\frac{\ln(a) - \ln(b)}{1}.$$

Soweit unterscheidet sich das Vorgehen von Lacroix noch nicht von dem Lagrangeschen. Die Begründung der Korrektheit des Ergebnisses ist aber neu. Lacroix argumentiert mit der Reihenentwicklung der Funktion $a^x - b^x$. Es ist

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \ln(a) - \ln(b) + (\ln(a)^2 - \ln(b)^2) \frac{x}{1 \cdot 2} + \dots$$

Setzt man $x = 0$, so erhält man den Wert $\ln(a) - \ln(b)$.

Diesen Ansatz formuliert Lacroix dann mit Variablen und hat – modern formuliert – folgende Version der Regel von l'Hôpital bewiesen:

Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ um den Punkt a in Taylorreihen entwickelbar (d.h. insbesondere unendlich oft differenzierbar) und ist $f(a) = g(a) = 0$ und sind die ersten $k - 1$ Ableitungen von f und g an der Stelle a alle gleich Null, so ist

$$\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}.$$

4 Cauchy: der moderne Ansatz

1821 erschien das erste Lehrbuch der Analysis, in dem die Differential- und Integralrechnung systematisch auf dem Grenzwertbegriff gegründet wurde, die *Cours d'analyse* von A.-L. Cauchy. Wir zitieren im folgenden aus der deutschen Übersetzung von C.H. Schnuse. Der Beweis der Regel von l'Hôpital, den Lacroix führt, beruht wesentlich auf der Voraussetzung, dass die betrachteten Funktionen in eine Taylorreihe entwickelt werden können. Cauchy entdeckte, dass dies nicht immer der Fall ist: Es gibt Funktionen, deren Taylorreihe nicht die Funktion darstellt. Das von Cauchy angegebene Beispiel, das man noch heute in fast allen Lehrbüchern zur Differential- und Integralrechnung findet, lautet (S. 103)

$$F(x) = \exp(-1/x^2) \quad \text{für } x \neq 0$$

und

$$F(x) = 0 \quad \text{für } x = 0.$$

Die Taylorreihe in 0 verschwindet identisch, die Funktion F aber nicht.

Cauchy brauchte daher einen anderen Beweis der Regel von l'Hôpital als Lacroix. Die Regel formuliert Cauchy wie folgt (Lehrsatz 1 der fünften Vorlesung, S. 42):

Wenn ein besonderer Werth des Verhältnisses $\frac{f(x)}{F(x)}$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, so fällt dieser Werth mit dem correspondirenden Werthe des Verhältnisses $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ zusammen.

Den „wahren Werth“ des Bruches (Cauchy, S. 41) bestimmt Cauchy mit Hilfe der heute als „verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung“ bezeichneten und wie folgt formulierten Aussage (vgl. etwa Walter, S. 256)

Die Funktionen f, F seien in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Außerdem sei $F' \neq 0$ in (a, b) . Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

Ist nun $f(c) = F(c) = 0$ für ein $c \in (a, b)$, so gibt es zu jedem $\xi \in (a, c)$ ein $x \in (x, c)$ mit

$$\frac{f(x) - f(c)}{F(x) - F(c)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

Die Regel von l'Hôpital folgt damit für $x \rightarrow c$ (falls der entsprechende Grenzwert existiert).

Durch eine wiederholte Anwendung der obigen Regel beweist Cauchy dann auch die allgemeinere oben angegebene Regel von Lacroix.

Das ist der heutige Standardbeweis der Regel. – Es sei angemerkt, dass die Regel von l'Hôpital auf zahlreiche Arten modifiziert werden kann, nicht nur hinsichtlich der Voraussetzungen der betrachteten Funktionen (vgl. etwa Rickert, N.W. (1968) und Boas, R.P. (1986)), sondern auch hinsichtlich der betrachteten Limites – einseitige und uneigentliche. Noch in den Jahren 1879/80 erschienen in den Mathematischen Annalen zwei Artikel von O. Stolz (1879/80) mit dem Titel „Über die Grenzwerte der Quotienten“, in denen er den Typ $\frac{\infty}{\infty}$ diskutiert.

Schlussbemerkung

Mathematik wird in Lehrbüchern (und Vorlesungen) in der Regel auf eine systematische Art dargestellt, so dass beim Leser den Eindruck entstehen kann, die Mathematik kenne keine Zeitströmungen. Das Beispiel der historischen Entwicklung der Regel von l'Hôpital soll zeigen, dass dieser Eindruck täuscht. Gegenstände, Begriffe und Methoden der Analysis sind im Laufe der Zeit geändert und weiterentwickelt worden.

Zu den Gegenständen. Während l'Hôpital Kurven untersucht, stehen bei Lagrange und Lacroix Funktionen im Zentrum des Interesses, allerdings noch nicht im modernen Sinne. Erst bei Cauchy findet man den modernen Funktionsbegriff.⁸

Zu den Begriffen. Der Ableitungsbegriff – für die Regel von l'Hôpital in heutiger Formulierung zentral – tritt bei l'Hôpital noch nicht auf. Er spricht über Differentiale im Sinne von unendlich kleinen Größen. Lagrange und Lacroix verwenden Koeffizienten von Reihenentwicklungen und erst bei Cauchy findet man den modernen Ableitungsbegriff.

Zu den Methoden. Die Regel von l'Hôpital wurde verschieden „bewiesen“. L'Hôpital stellt lediglich eine Plausibilitätsüberlegung an. Lagrange formt algebraische Ausdrücke

⁸Vgl. hierzu D. Spalt (1996).

um, die er auf eine spezielle Weise interpretiert. Erst die Beweise von Lacroix und Cauchy genügen in etwa modernen Maßstäben.

Auch Mathematik ist eine Wissenschaft, die Zeitströmungen kennt und entsprechend den jeweiligen Zeitumständen weiterentwickelt wird. Dieses Erkenntnis sollte insbesondere jeder Lehrer besitzen – und hierzu einen Beitrag zu leisten, ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

Literatur

- Bernoulli, Johann (1691/92): Die Differentialrechnung. Übersetzung von P. Schafheitlin: Leipzig 1924 (Ostwald's Klassiker Nr. 211)
- Boas, R.P. (1986): Counterexamples to l'Hospital's rule. *American Mathematical Monthly* 93, S. 644–645
- Boyer, C. B. (1946): The first calculus textbooks. *The Mathematics Teacher* XXXIX, S. 159–167
- Burscheid, H.J. & H. Struve (2001): Die Differentialrechnung nach Leibniz – eine Rekonstruktion. *Studia Leibnitiana* XXXIII, S. 163–169
- Cauchy, A.-L. (1821): *Cours d'Analyse*. Paris – deutsche Übersetzung von C.H. Schnuse 1836
- Fraser, C.G. (1980): Joseph Louis Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, first edition (1797). In: Grattan-Guinness (2005), S. 258–276
- Grattan-Guinness, I. (1980): The emergence of mathematical analysis and its foundational progress, 1780–1880. In: Grattan-Guinness, I.: *From the calculus to set theory 1630- 1910*. Oxford, p. 94–148
- Grattan-Guinness, I (2005): *Landmark Writings in Western Mathematics 1640–1940*. Amsterdam
- Heuser, H. (1988): *Lehrbuch der Analysis*. Stuttgart
- Kleiner, I. (2001): History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics* 48, S. 137–174
- Lagrange, J.L. (1797): *Théorie des fonctions analytiques*. Paris – deutsche Übersetzung von J.P. Gruson 1797/98
- Lacroix, S.F. (1797): *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. Paris – deutsche Übersetzung von J.P. Gruson 1799/1800
- L'Hospital, G.F.A. (1696): *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris
- Rickert, N.W. (1968): A calculus counterexample. *American Mathematical Monthly* 75, S. 166
- Spalt, D. (1996): *Die Vernunft im Cauchy-Mythos*. Frankfurt
- Stolz, O. (1879/80): Über die Grenzwerte der Quotienten. *Mathematische Annalen* XIV, S. 231–240 und XV, S. 556–569
- Struik, D. J. (1963): The origin of l'Hôpital's rule. *The Mathematics Teacher* LVI, S. 257–260
- Struve, H. & I. Witzke (2008): Eine wissenschaftstheoretische Analyse des Leibniz'schen calculus – das Beispiel des Krümmungsradius. *Studia Leibnitiana* XL, S. 29–47
- Walter, W. (1992³): *Analysis I*, Berlin

Prof. Dr. Horst Struve und Dr. Ingo Witzke
Universität zu Köln
Seminar für Mathematik und ihre Didaktik
Gronewaldstraße 2
D-50931 Köln
e-mail: h.struve@uni-koeln.de
ingo.witzke@uni-koeln.de