

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 65 (2010)

**Artikel:** Differenzierbare Strukturen und die Kervaire-Invariante  
**Autor:** Kreck, Matthias  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-130701>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

# Differenzierbare Strukturen und die Kervaire-Invariante

---

Matthias Kreck

## 1 Einleitung

Der Begriff der Mannigfaltigkeit wurde von Riemann in seinem berühmten Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ im Jahre 1854 eingeführt. Das war, wenn man in ein heutiges Lehrbuch schaut, kühn und der Zeit weit voraus. Denn die von uns heute selbstverständlich benutzte Sprache der Mengenlehre gab es noch gar nicht. Deshalb ist klar, dass es viele Jahre brauchte, bis das Konzept in seinen verschiedenen Facetten ausgearbeitet war. Für eine sehr gelungene Darstellung verweise ich auf den Artikel von Erhard Scholz [13]. Unverzichtbarer Bestandteil der modernen Definition von Mannigfaltigkeiten ist neben der Cantorschen Mengenlehre der Begriff des topologischen Raumes, der 1914 von Hausdorff eingeführt wurde. Im Jahre 1929 hat van der Waerden einen Übersichtsvortrag bei der Deutschen Mathematiker-Vereinigung gehalten, wo er allein fünf verschiedene Definitionen von Mannigfaltigkeiten gibt, von denen eine den topologischen Mannigfaltigkeiten entspricht, eine andere mehr differentialtopologisch ist und wieder andere mehr kombinatorisch sind. Dies hat natürlich dazu geführt, dass die Frage nach der Äquivalenz der verschiedenen Strukturen gestellt wurde. Das früheste Beispiel einer solchen Frage ist die von Kneser formulierte Hauptvermutung, wo es um die Eindeutigkeit einer kombinatorischen (stückweise linearen oder PL) Struktur auf einer topologischen Mannigfaltigkeit geht.

Damit wir wissen, wovon die Rede ist, möchte ich eine präzise Definition von topologischen, differenzierbaren und komplexen Mannigfaltigkeiten geben.

**Definition.** Eine *n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit  $M$*  ist ein topologischer Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis, der lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist.

Für den, der nicht vertraut mit den technischen Bedingungen ist, sei gesagt, dass bis auf Homöomorphie jede Mannigfaltigkeit als Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^N$  für genügend großes  $N$  angesehen werden kann. Deshalb kann man eine topologische Mannigfaltigkeit auch als Teilmenge  $M$  eines  $\mathbb{R}^N$  definieren, die lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist.

Eine Familie von lokalen Homöomorphismen (Kartenabbildungen)  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ , so dass die Vereinigung der  $U_i$  gleich  $M$  ist, nennt man einen *Atlas* von  $M$ , ein aus der

Schule sehr vertrautes Objekt, wenn wir an den Weltatlas denken, der die Erdoberfläche durch Teile überdeckt, die Stücke des  $\mathbb{R}^2$  sind. Man kann nun, da wo es sinnvoll erklärt ist, das Inverse einer Kartenabbildung mit einer anderen komponieren, und erhält die *Kartenwechsel*, das sind Abbildungen von offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^n$ . Wenn diese alle differenzierbar sind, so erhält man einen *differenzierbaren Atlas*, wobei man noch festlegen kann, wie oft die Abbildungen differenzierbar sind. Meist verlangt man, dass sie beliebig oft differenzierbar sein sollen, was wir hier annehmen wollen.

Nun können wir eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit* definieren, das ist eine topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einem differenzierbaren Atlas, von dem man noch annimmt, dass er maximal ist, also nicht durch Hinzunehmen weiterer Karten zu einem differenzierbaren Atlas vergrößert werden kann. Solch einen maximalen differenzierbaren Atlas nennt man eine *differenzierbare Struktur* auf  $M$ . In analoger Weise kann man *komplexe Mannigfaltigkeiten* definieren, indem man einen komplexen Atlas nimmt, bei dem die Karten in den  $\mathbb{C}^n$  gehen und alle Kartenwechsel holomorph sind.

Am meisten wusste man über den Vergleich der verschiedenen Strukturen auf Mannigfaltigkeiten bei Flächen, wo man ganz früh erkannte, dass es für höheres Geschlecht sehr viele komplexe Strukturen gibt (diese fasst man zum Modulraum der komplexen Strukturen zusammen), während es nur eine differenzierbare Struktur gibt – ein Satz, der von Rado [12] bewiesen wurde. In höheren Dimensionen war wohl um 1950 nicht viel bekannt. Heinz Hopf hatte ein großes Interesse an diesen Fragen, z.B. gab er Hirzebruch die Frage nach der Konstruktion von einfach zusammenhängenden 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit mehreren komplexen Strukturen, die Hirzebruch in seiner Dissertation [6] mit der heute Hirzebruch-Flächen benannten Konstruktion von komplexen Flächen beantwortete, von denen unendlich viele homöomorph sind, also unendlich viele komplexe Strukturen liefern. Ob es topologische Mannigfaltigkeiten gibt, die überhaupt keine differenzierbare Struktur haben oder gar mehrere, war völlig offen. Für 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten hat Moise in einer Serie von komplizierten Arbeiten in der ersten Hälfte der fünfziger Jahre gezeigt, dass es stets eine differenzierbare Struktur gibt und diese eindeutig ist, wobei natürlich Eindeutigkeit heißt, dass je zwei solche differenzierbaren Mannigfaltigkeiten diffeomorph sind, wenn sie nur homöomorph sind.

## 2 Differenzierbare Strukturen in höheren Dimensionen

Im Jahre 1957 veröffentlichte Milnor seine berühmte Arbeit [10], in der er gewisse 7-dimensionale Mannigfaltigkeiten konstruiert, die homöomorph zur 7-Sphäre  $S^7$  sind, aber nicht diffeomorph, also zeigt, dass die 7-Sphäre mehrere differenzierbare Strukturen hat. Solche Mannigfaltigkeiten, die homöomorph aber nicht diffeomorph zu einer Sphäre sind, nennt man *exotische Sphären*. Dies war der Beginn einer rasanten Entwicklung, die zur fundamentalen Arbeit [8] von Kervaire und Milnor führte, in welcher gezeigt wurde, dass die Bestimmung der exotischen Sphären in Dimension größer als 4 im wesentlichen äquivalent zur Berechnung der stabilen Homotopiegruppen von Sphären ist, also zu einer ganz anderen Welt. Das „im wesentlichen“ soll später genauer erläutert werden, denn das ist äquivalent zur Analyse der Kervaire-Invarianten, auf die wir gleich zu sprechen kommen werden.

Nachdem nun klar ist, dass die topologischen und die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten i.a. nicht dasselbe sind, stellt sich die Frage noch dringender, ob jede topologische Mannigfaltigkeit eine differenzierbare Struktur hat. Dies wurde in einer 1960 veröffentlichten Arbeit von Kervaire [7] widerlegt. Über diese Arbeit soll nun etwas genauer berichtet werden, weil sie nicht nur eine fundamentale Frage beantwortet, sondern auch der Beginn einer Entwicklung war, die erst in jüngster Zeit mit einem spektakulären Resultat für Aufsehen gesorgt hat, als Hill, Hopkins und Ravenel das Kervaire-Invarianten 1-Problem bis auf einen noch offenen Fall gelöst haben, wobei es wichtige Teillösungen vorher gab, insbesondere durch Browder [1].

Kervaire konstruiert eine 10-dimensionale triangulierbare (es gibt einen Homöomorphismus auf ein Polyeder) topologische Mannigfaltigkeit, die keine differenzierbare Struktur hat. Dazu muss man zweierlei machen: Man benötigt eine Konstruktion, sozusagen einen Kandidaten, und eine Methode um zu zeigen, dass dieser Kandidat keine differenzierbare Struktur hat. Ich berichte zunächst über das zweite. Kervaire macht das so, dass er gewissen Mannigfaltigkeiten eine Invariante, die man heute Kervaire-Invariante nennt, mit Werten in  $\mathbb{Z}/2$  zuordnet und zeigt, dass diese Invariante für seinen Kandidaten nicht null ist, aber null wäre, wenn der Kandidat eine differenzierbare Struktur hätte. Das klingt von der Idee her ganz einfach, ist es aber nicht. Die Invariante ist für gewisse 10-dimensionale triangulierbare Mannigfaltigkeiten definiert, nämlich solche, die 4-zusammenhängend sind, das bedeutet, dass die Fundamentalgruppe und alle Homologiegruppen bis zum Grad 4 einschließlich verschwinden. Dann betrachtet man die fünfte Kohomologiegruppe  $H^5(M; \mathbb{Z}/2)$ , deren Dimension in einem gewissen Sinne der Anzahl der Löcher in  $M$  entspricht, was natürlich zu präzisieren wäre. Das soll dem mit Homologie nicht vertrauten Leser nur ein gewisses Gefühl vermitteln. Durch das cup-Produkt hat man eine weitere Struktur auf diesem Vektorraum, nämlich eine nicht entartete Bilinearform  $S$ , die man *Schnittform* nennt. Diese ist in unserer Situation langweilig, weil  $S(x, x)$  stets Null ist, was impliziert, dass die Form eine orthogonale Summe von hyperbolischen Formen ist, d.h. dass bezüglich einer Basis  $e$  und  $f$  gilt:  $S(e, e) = S(f, f) = 0$  und  $S(e, f) = 1$ .

Kervaire reichert die Schnittform an, indem er eine quadratische Verfeinerung  $q$  auf  $S$ , d.h. eine Funktion

$$q : H^5(M; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

definiert, so dass gilt:

$$q(x + y) = q(x) + q(y) + S(x, y).$$

Die Definition Kervaires ist zu kompliziert, um sie einer allgemeinen Leserschaft im Rahmen eines solchen kurzen Artikels zu erklären. Ich komme aber gleich auf eine Definition zu sprechen, die für den Fall gegeben werden kann, dass die Mannigfaltigkeit eine differenzierbare Struktur besitzt (Kervaire will das gerade ausschließen, aber er argumentiert natürlich indirekt, und so ist der Fall einer angenommenen differenzierbaren Struktur von großem Interesse). Bevor ich das tue, formuliere ich aber die beiden entscheidenden Sätze seiner Arbeit. Dazu muss ich zunächst an die Arf-Invariante erinnern (interessanterweise kommt der Name Arf in Kervaires Arbeit gar nicht vor, wahrscheinlich war das für ihn Folklore). Arf ordnet einer quadratischen Verfeinerung  $q$  wie oben eine Invariante in  $\mathbb{Z}/2$

zu, die man auf verschiedene Weisen erklären kann, die einfachste ist die „demokratische“ Definition: Man lässt alle Elemente des  $\mathbb{Z}/2$ -Vektorraums, wo  $q$  den Wert 1 hat, die Arme heben und zählt durch. Wenn das die Mehrheit ist, so setzt man die Arf-Invariante gleich 1, sonst 0. Zum Beispiel sei  $e$  und  $f$  Basis von  $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$  und  $q(e) = q(f) = q(e+f) = 1$  und  $q(0) = 0$ ; dann ist die Arf-Invariante 1, bei allen anderen Wahlen von  $q$  ist sie 0. Die Arf-Invariante der auf der Mannigfaltigkeit  $M$  von Kervaire definierten quadratischen Form ist die heute so bezeichnete *Kervaire-Invariante* von  $M$ :

$$\kappa(M).$$

Hier nun die beiden zentralen Sätze aus Kervaires Arbeit:

**Theorem 1** *Sei  $M$  eine 4-zusammenhängende kompakte differenzierbare 10-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann ist*

$$\kappa(M) = 0.$$

**Theorem 2** *Es gibt 4-zusammenhängende kompakte topologische triangulierbare 10-dimensionale Mannigfaltigkeiten ohne Rand mit  $\kappa(M) \neq 0$ .*

### 3 Die Kervaire-Invariante im differenzierbaren Fall

Wir definieren die quadratische Verfeinerung nun im Falle, wo die Mannigfaltigkeit  $M$  differenzierbar ist. In diesem Fall zeigt Kervaire, dass das stabile Tangentialbündel von  $M$  trivial ist, d.h. dass die Summe des Tangentialbündels mit einem trivialen 1-dimensionalen Bündel isomorph zum Produktbündel ist. Das werden wir bei der Definition benutzen. Diese Definition, die in der Arbeit von Kervaire und Milnor steht, kann man für alle differenzierbaren Mannigfaltigkeiten der Dimension  $4k + 2$  zugrundelegen, wobei  $k$  ungleich 0, 1, oder 3 sein muss, was, wie man bei diesen Zahlen schon vermuten kann, mit der im Artikel von Milnor [11] behandelten Hopf-Invariante zusammenhängt. Sei also  $M$  eine  $2k$ -zusammenhängende  $(4k+2)$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit trivialem stabilem Tangentialbündel. Dann ist nach dem Satz von Hurewicz die zu der Kohomologieklassse  $x \in H^{k+1}(M; \mathbb{Z}/2)$  Poincaré-duale Klasse durch eine Sphäre repräsentierbar, die man nach Whitney als Einbettung wählen kann. Nun betrachten wir das Normalenbündel dieser Sphäre. Für dieses Bündel gibt es genau zwei Möglichkeiten (das benutzt, dass das stabile Tangentialbündel trivial ist), entweder es ist isomorph zum Tangentialbündel der Sphäre, welches erst kurz vorher als nicht trivial nachgewiesen wurde, oder es ist das triviale Bündel. Dass der erste Fall vorkommen kann, sieht man sehr schön am Beispiel, wo  $M = S^{k+1} \times S^{k+1}$  ist und die Sphäre  $S^{k+1}$  als Diagonale eingebettet ist, und im zweiten Fall, wenn man die Einbettung eines Faktors nimmt. Im ersten Fall setzt man  $q(x) = 1$  und im zweiten  $q(x) = 0$ . Durch vergleichsweise einfache Überlegungen zeigen Kervaire und Milnor, dass diese Definition nicht von den Wahlen abhängt und die Gleichung

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + S(x, y)$$

gilt.

Nun stellt sich die Frage, warum Theorem 1 gilt. Wir wollen das gleich in einen allgemeineren Kontext stellen. Wir haben die Kervaire-Invariante für  $2k$ -zusammenhängende Mannigfaltigkeiten  $M$  der Dimension  $4k + 2$  mit trivialem stabilem Tangentialbündel definiert. Wenn man eine solche Mannigfaltigkeit hat, die nicht hoch zusammenhängend ist, dafür aber mit einer expliziten Trivialisierung ausgestattet ist, so kann man die Invariante auch noch definieren. Das kann man auf verschiedene Weise machen. Eine benutzt die fundamentale Eigenschaft der Kervaire-Invariante, dass sie verschwindet, wenn  $M$  Rand einer kompakten Mannigfaltigkeit mit trivialem stabilem Tangentialbündel ist, und somit eine *Bordismusinvariante* für Mannigfaltigkeiten mit trivialem stabilem Tangentialbündel ist. Nun zeigen Kervaire und Milnor, dass jede kompakte Mannigfaltigkeit mit ausgestatteter Trivialisierung des stabilen Tangentialbündels bordant zu einer hoch-zusammenhängenden ist, wobei der Bordismus eine Trivialisierung des stabilen Tangentialbündels trägt, der die gegebene Trivialisierung fortsetzt. Dann definiert man die Arf-Invariante als die der hoch-zusammenhängend gemachten Mannigfaltigkeit. Auf diese Weise erhält man einen Homomorphismus von der Bordismusgruppe  $\Omega_{4k+2}^{\text{fr}}$  der mit einer Trivialisierung des stabilen Tangentialbündels ausgestatteten kompakten Mannigfaltigkeiten der Dimension  $4k + 2$  nach  $\mathbb{Z}/2$ :

$$\kappa : \Omega_{4k+2}^{\text{fr}} \rightarrow \mathbb{Z}/2.$$

Der Beweis von Theorem 1 geht nun so, dass Kervaire Kenntnisse über die Gruppe  $\Omega_{10}^{\text{fr}}$  ausnutzt, die implizieren, dass jedes Element dieser Gruppe einen Repräsentanten hat, dessen Homologie außer in Dimension 0 und 10 verschwindet. Dann hat die Kervaire-Invariante natürlich keine andere Chance als 0 zu sein.

## 4 Die Konstruktion einer topologischen Mannigfaltigkeit mit Kervaire-Invariante nicht Null

Kervaire benutzt eine Konstruktion von Milnor, die Milnor, wenn ich mich recht erinne-re, Hirzebruch zuschreibt und die man heute *Plumbing* nennt. Dazu betrachtet man z.B. zwei Kopien des Scheibenbündels des Tangentialbündels der 5-Sphäre  $S^5$  und wählt kleine Scheiben aus und über diesen eine Trivialisierung, die man in die Scheibenbündel einbet-tet. Man kann sich das am Falle der 1-Sphäre gut vorstellen, wo das Scheibenbündel des Tangentialbündels der Zylinder über  $S^1$  ist, also ein Band, in welchem man ein Quadrat einge-bettet hat, so dass der Rest wieder ein Quadrat ist (man schneidet das Band an zwei Stellen senkrecht zur Seele auf und erhält so die zwei Quadrate). Dies liefert Einbettungen von  $D^5 \times D^5$  in die beiden Kopien der Scheibenbündel, die man mittels der Vertauschung der beiden Faktoren verklebt. Das Ergebnis kann man sich im Falle von  $S^1$  leicht vorstellen: Man betrachtet im Torus die beiden Kreise, die sich in genau einem Punkt schneiden, und verdickt sie ein wenig. In diesem Fall ist der Rand der so entstandenen Mannigfaltigkeit  $W$  (deren Ecken man nach einem Standardverfahren glättet) eine Sphäre. Das ist in höheren Dimensionen nicht so, aber es ist immer eine Mannigfaltigkeit, die homoto-pieäquivalent zur Sphäre ist, falls  $n$  ungerade ist. Dies nennt man eine *Kervaire-Sphäre*  $\Sigma_K^{2n-1}$  der Dimension  $2n - 1$ . Es stellt sich die Frage, ob diese Sphären diffeomorph oder homöomorph zur Sphäre  $S^{2n-1}$  sind. Die zweite Frage wurde von Milnor direkt positiv beantwortet. Dass das so ist, ist inzwischen ein Spezialfall der höherdimensionalen Poincaré-Vermutung, die für differenzierbare Mannigfaltigkeiten von Smale bewiesen wurde

[14]. Ob die Mannigfaltigkeit auch diffeomorph zur Sphäre ist, wurde von Kervaire sozusagen als Nebenprodukt negativ entschieden. Wäre der Rand von  $W$ , also  $\Sigma_K^9$ , diffeomorph zu  $S^9$ , dann könnten wir eine glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand erhalten, indem wir die 10-dimensionale Scheibe  $D^{10}$  einkleben. Diese hätte die Kervaire-Invariante 1, was ein Widerspruch zum obigen Satz wäre. Die Kervaire-Invariante ist hier nämlich ganz leicht auszurechnen, weil die Seelen der beiden Scheibenbündel als Normalenbündel das Tangentialbündel der  $S^5$  haben, also die quadratische Verfeinerung für die Poincaré-dualen Klassen den Wert 1 annimmt. Dann folgt aus der Additionsformel für die quadratische Form, dass auch das dritte nicht-triviale Element in der Kohomologie auf 1 abgebildet wird, was impliziert, dass die Kervaire-Invariante 1 ist. Wir fassen dieses wichtige Ergebnis zusammen:

**Theorem 3:** *Die Kervaire-Sphäre  $\Sigma_K^9$  ist nicht diffeomorph zu  $S^9$ , aber homöomorph, liefert also eine exotische Struktur auf  $S^9$ .*

Nun ist es aber nicht schwer, die gesuchte topologische Mannigfaltigkeit  $M$  ohne differenzierbare Struktur zu konstruieren. Wir machen genau dasselbe, aber eben nicht differenzierbar, d.h. wir wählen uns einen Homöomorphismus von dem Rand von  $W$  auf  $S^9$  und kleben die Scheibe  $D^{10}$  ein. Das Ergebnis ist nun eine topologische Mannigfaltigkeit, die fast überall differenzierbar ist, nämlich nur nicht im Nullpunkt der eingeklebten Scheibe. Mit den gleichen Überlegungen wie oben folgt deshalb, dass die Kervaire-Invariante dieser topologischen Mannigfaltigkeit 1 ist, womit die Beweisidee von Theorem 2 beendet ist.

## 5 Die weitere Entwicklung

Wie oben erklärt, kann man die Kervaire-Invariante für differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit stabiler Rahmung des Tangentialbündels in allen Dimensionen  $4k + 2$  erklären. Der Fall  $k = 0$  war übrigens lange vor Kervaire von Pontryagin betrachtet worden. In Verallgemeinerung dessen, was Kervaire gemacht hat, kann man sich fragen, für welche  $k$  es Mannigfaltigkeiten mit Kervaire-Invariante 1 gibt. Das ist von der Natur her eine ähnliche Frage wie die, ob es Abbildungen  $f : S^{4k-1} \rightarrow S^{2k}$  gibt, deren Hopf-Invariante ungerade ist. Wie oben angedeutet, gibt es eine gewisse Beziehung, die sich aber allein auf eine gewisse Definitionsmöglichkeit der quadratischen Verfeinerung bezieht. Wie im Falle der Hopf-Invariante (und mit dem gleichen Input) kann man ganz leicht solche Mannigfaltigkeiten für  $k = 0, 1$  und  $3$  angeben. Die Spekulation, dass es sich um ein ähnliches Phänomen handeln könnte, wurde durch einen tiefliegenden Satz von Browder genährt:

**Theorem 4 (Browder [1])** *Wenn es eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $n = 4k + 2$  mit einer Trivialisierung des stabilen Tangentialbündels gibt, so dass die Kervaire-Invariante 1 ist, so ist  $n$  von der Form  $2^m - 2$ .*

Für die nächsten Fälle, nämlich  $n = 30$  und  $n = 62$ , wurden tatsächlich solche Mannigfaltigkeiten mit Kervaire-Invariante 1 gefunden, oder besser für die Dimension 62 die Existenz nachgewiesen. Die meisten Topologen haben geglaubt (zumindest ich), dass das der Anfang einer Serie ist, wir also irgendwann für alle  $n = 2^m - 2$  die Existenz einer

solchen Mannigfaltigkeit nachweisen können. Vor einem Jahr haben Hopkins, Hill und Ravenel aber bewiesen:

**Theorem 5 (Hopkins, Hill, Ravenel [5])** *Für  $n > 126$  gibt es keine kompakte differenzierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Trivialisierung des stabilen Tangentialbündels, deren Kervaire-Invariante 1 ist.*

Wie schon im Falle der Dimension 10 hat das Anwendungen auf exotische Sphären, nämlich dass alle Kervaire-Sphären in der entsprechenden Dimension  $n - 1$  nicht diffeomorph zur Standardsphäre sind, also eine exotische Struktur liefern. Natürlich kann man den Satz benutzen, um Kervaires Konstruktion von Mannigfaltigkeiten ohne differenzierbare Struktur auf diese Dimensionen  $n$  zu verallgemeinern. Kervaire war also so clever, sich in eine „win-win“ Situation zu bringen, wo seine Methoden entweder eine exotische Struktur liefern oder eine nicht glättbare Mannigfaltigkeit.

Ich möchte die Gelegenheit benutzen, eine Frage anzusprechen, die angesichts so vieler exotischer Strukturen selbst auf den einfachsten kompakten Mannigfaltigkeiten wie Sphären natürlich erscheint. Wie sieht es mit kompakten Mannigfaltigkeiten aus, die eine eindeutige differenzierbare Struktur haben? Bis zur Dimension 3 ist das für alle Mannigfaltigkeiten der Fall. Ich habe bewiesen, dass es in allen Dimensionen  $n$  größer als 4 solche Mannigfaltigkeiten gibt [9]. Angesichts der Komplexität von einfachen Mannigfaltigkeiten wie Sphären überrascht vielleicht nicht, dass ich keine Konstruktion solcher Mannigfaltigkeiten kenne. Wir haben hier eine reine Existenzaussage, wobei die Mannigfaltigkeiten in gewissem Sinne so kompliziert wie möglich sind.

Die Dimension 4 verhält sich, was exotische Strukturen betrifft, völlig anders als andere Dimensionen. So hat z.B.  $\mathbb{R}^n$  für  $n \neq 4$  genau eine differenzierbare Struktur (im nicht kompakten Fall tritt dieses Phänomen also im allereinfachsten Fall auf), während Freedman unter Verwendung seiner Methoden [3] und der Resultate von Donaldson [2] exotische Strukturen auf  $\mathbb{R}^4$  nachgewiesen hat [4]. Inzwischen hat Taubes sogar gezeigt, dass es ein ganzes Kontinuum von differenzierbaren Strukturen auf  $\mathbb{R}^4$  gibt! Auch für kompakte 4-Mannigfaltigkeiten gibt es, verglichen mit den anderen Dimensionen, völlig neue Phänomene. In allen anderen Dimensionen ist die Anzahl exotischer Strukturen endlich, während es viele kompakte 4-Mannigfaltigkeiten mit unendlich vielen differenzierbaren Strukturen gibt. Aber der Fall, bei dem Kervaire in höheren Dimensionen so bahnbrechende Resultate erzielt hat, ist völlig offen, nämlich:

**Problem:** *Gibt es auf  $S^4$  eine exotische Struktur?*

## Literatur

- [1] Browder, W.: The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization. *Ann. of Math.* (2) 90 (1969), 157–186.
- [2] Donaldson, S.K.: An application of gauge theory to four-dimensional topology. *J. Differential Geom.* 18 (1983) 2, 279–315.
- [3] Freedman, M.H.: The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geom.* 17 (1982) 3, 357–453.
- [4] Gompf, R.E.: Three exotic  $\mathbb{R}^4$ 's and other anomalies. *J. Differential Geom.* 18 (1983) 2, 317–328.

- 
- [5] Hill, M.A.; Hopkins, M.J.; Ravenel, D.C.: *On the non-existence of elements of Kervaire invariant one*. Preprint 2010.
  - [6] Hirzebruch, F.: Über eine Klasse von einfachzusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* 124 (1951), 77–86.
  - [7] Kervaire, M.A.: A manifold which does not admit any differentiable structure. *Comment. Math. Helv.* 34 (1960), 257–270.
  - [8] Kervaire, M.A.; Milnor, J.W.: Groups of homotopy spheres. I. *Ann. of Math.* (2) 77 (1963), 504–537.
  - [9] Kreck, M.: Manifolds with unique differentiable structure. *Topology* 23 (1984) 2, 219–232.
  - [10] Milnor, J.: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math.* (2) 64 (1956), 399–405.
  - [11] Mislin, G.: *Hopf-Faserungen und Hopf-Invariante*. Preprint 2010.
  - [12] Rado, T.: Über den Begriff der Riemannschen Fläche. *Acta Szeged* 2 (1925), 101–121.
  - [13] Scholz, E.: *Axiomatization of the manifold concept*. [http://www.map.him.uni-bonn.de/index.php/Axiomatization\\_of\\_the\\_manifold\\_concept](http://www.map.him.uni-bonn.de/index.php/Axiomatization_of_the_manifold_concept)
  - [14] Smale, S.: Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four. *Ann. of Math.* (2) 74 (1961), 391–406.

Matthias Kreck  
Hausdorff Research Institute for Mathematics  
Universität Bonn  
D–53115 Bonn, Deutschland  
e-mail: kreck@him.uni-bonn.de