

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 65 (2010)

**Artikel:** On a certain problem of Ulam and its generalization  
**Autor:** Biswas, Anup  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-130694>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

---

## On a certain problem of Ulam and its generalization

---

---

Anup Biswas

Anup Biswas received his Bachelor of Science degree at the University of Calcutta, India, in 2005. He was awarded his Master degree from the Tata Institute of Fundamental Research in Bangalore in 2007, where he is currently employed as a research scholar.

### Introduction

Let  $\mathbb{N}$  be the set of all positive integers with usual operations  $a + b \equiv s(a, b)$  (addition) and  $a * b \equiv m(a, b)$  (multiplication). For every bijection  $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  define two mappings  $\sigma$  and  $\mu$  from  $\mathbb{N}$  to  $\mathbb{N}$  such that  $\sigma(c) = \sigma(p(a, b)) = s(a, b)$  and  $\mu(c) = \mu(p(a, b)) = m(a, b)$  for all  $c \in \mathbb{N}$ . Such a bijection  $p$  is known as *Peano mapping*. In [1, p. 32] S.M. Ulam asked “Does there exist a Peano mapping  $p$  such that addition commutes with multiplication in the sense that  $\sigma(\mu(c)) = \mu(\sigma(c))$  for all  $c \in \mathbb{N}$ ?”. No examples were known, and then the well-known Peano mapping  $p(a, b) = 2^{a-1}(2b - 1)$  was seen by Ulam not to work, as  $\mu(\sigma(2)) = \mu(3) = 2$ ,  $\sigma(\mu(2)) = \sigma(2) = 3$ . Though the question is very natural and fascinating, it never got an answer since then.

In this article, we answer Ulam’s question in showing that no Peano mapping exists with the desired property. The proof is simple and totally elementary.

In dem nachfolgenden Beitrag wird ein auf S.M. Ulam zurückgehendes Problem gelöst. Ist  $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Bijektion, eine sog. *Peano-Abbildung*, und bedeuten  $s, m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  die Abbildungen, die durch  $s(a, b) = a + b$  (Addition) bzw.  $m(a, b) = a \cdot b$  (Multiplikation) gegeben sind, so seien  $\sigma, \mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  durch  $\sigma = s \circ p^{-1}$  bzw.  $\mu = m \circ p^{-1}$  festgelegt. Es besteht nun die Frage, ob es eine Peano-Abbildung  $p$  mit der Eigenschaft gibt, dass  $\sigma$  und  $\mu$  vertauschen, d.h. dass für alle natürlichen Zahlen  $c$  die Gleichheit  $\sigma(\mu(c)) = \mu(\sigma(c))$  gilt. Die Abbildung  $p$ , gegeben durch  $p(a, b) = 2^{a-1}(2b - 1)$ , ist beispielsweise eine Peano-Abbildung; allerdings gilt in diesem Fall  $\sigma(\mu(2)) = 3$  und  $\mu(\sigma(2)) = 2$ . Der Autor zeigt, dass dieses Beispiel keine Ausnahme darstellt, dass es also keine Peano-Abbildung gibt, die das gewünschte Vertauschen von  $\sigma$  und  $\mu$  zulässt.

We further show that no such Peano mapping exists in  $\mathbb{R}^+$ . The proof uses only quadratic extensions of  $\mathbb{Q}$ , and so works as well for the algebraic numbers  $\mathbb{A}^+$ , but it leaves the case of  $\mathbb{Q}^+$  open.

### Proof for $\mathbb{N}$

Let us assume that there exists a Peano map  $p$  such that  $\sigma$  and  $\mu$  commute. Note that  $\sigma = s \circ p^{-1}$  and  $\mu = m \circ p^{-1}$ . Therefore we have

$$m \circ p^{-1} \circ s \circ p^{-1} = s \circ p^{-1} \circ m \circ p^{-1},$$

or

$$m \circ p^{-1} \circ s = s \circ p^{-1} \circ m.$$

To simplify notation, write  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  for the bijection  $p^{-1}$ . Then

$$(m \circ f \circ s)(a, b) = (s \circ f \circ m)(a, b) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \quad (1)$$

We first show that  $f(1) = (1, 1)$ . Assume to the contrary that there exists an integer  $k > 1$  such that  $f(k) = (1, 1)$ . So

$$(m \circ f \circ s)(k - 1, 1) = m(f(k)) = m(1, 1) = 1 = (s \circ f \circ m)(k - 1, 1) = s(f(k - 1)).$$

This is impossible, as  $s(f(n)) \geq 2$  in  $\mathbb{N}$ . Moreover  $s(f(n)) = 2$  implies  $n = 1$ .

As a consequence,

$$(s \circ f \circ m)(1, 1) = s(f(1)) = 2 = (m \circ f \circ s)(1, 1) = m(f(2)).$$

Hence  $f(2) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$ . If  $f(2) = (1, 2)$ , there exists an integer  $k > 2$  such that  $f(k) = (2, 1)$ . Again from (1) we have

$$(m \circ f \circ s)(k - 1, 1) = 2 = (s \circ f \circ m)(k - 1, 1) = s(f(k - 1)).$$

So  $k - 1 = 1$  or  $k = 2$ , a contradiction. The same argument works with  $f(2) = (2, 1)$ . This proves that there is no Peano mapping for which  $\sigma$  and  $\mu$  commute.  $\square$

### Proof for $\mathbb{R}^+$

As above, suppose to the contrary that a bijection  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  exists, satisfying

$$(m \circ f \circ s)(a, b) = (s \circ f \circ m)(a, b) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \quad (2)$$

Take three real numbers  $u, v, w$  such that the system of five equations

$$x_i + y_i = u_i, \quad x_i \cdot y_i = v_i \quad (1 \leq i \leq 5)$$

with

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = u_4 = v_1 = v_3 = v_5 &= u, \\ u_3 = v_2 &= v, \\ u_5 = v_4 &= w \end{aligned}$$

has positive real solutions (e.g.  $u = 6, v = 7, w = 8$ ).

Let  $f(u) = (a, b)$ . From  $m \circ f(x_i + y_i) = s \circ f(x_i \cdot y_i)$  (equation (2)), one gets

$$\begin{aligned} m \circ f(u) &= m \circ f(v) = m \circ f(w) = ab, \\ s \circ f(u) &= s \circ f(v) = s \circ f(w) = a + b. \end{aligned}$$

As there are at most two solutions for  $f(u)$ ,  $f(v)$ , and  $f(w)$ , namely  $(a, b)$  and  $(b, a)$ , the map  $f$  cannot be a bijection, establishing the desired result.  $\square$

## References

- [1] Ulam, S.M.: *Problems in Modern Mathematics*. John Wiley, New York 1964.

Anup Biswas  
 Centre for Applicable Mathematics  
 Tata Institute of Fundamental Research  
 Post Bag No 6503, Chikkabommasandra  
 Bangalore–560065, India  
 e-mail: anup@math.tifrbng.res.in