

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 64 (2009)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2010 erbeten. Sie können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

- *bis Dezember 2009*
Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Rieden
- *ab Januar 2010*
Dr. Hansruedi Widmer, Gartenstrasse 19, CH-5400 Baden

gesandt werden. In einem gängigen Format abgefasste Lösungen können auch als Attachment über die E-Mail-Adresse h.widmer@alumni.ethz.ch eingereicht werden.

Aufgabe 1269: Die Innenfläche eines zum Teil gefüllten Sektglases habe die Form eines Rotationsparaboloids. Es sei T der tiefste Punkt im Glas (bzw. der Scheitel des Paraboloids). Das Glas wird nun in Schieflage gebracht, und man beobachtet, dass die Oberfläche der Flüssigkeit sowohl den (kreisförmigen) Rand des Glases als auch den Punkt T berührt. Zu wie viel Prozent ist das Glas gefüllt?

Albert Stadler, Herrliberg, CH

Aufgabe 1270: Es seien p eine beliebige Primzahl und m eine beliebige positive ganze Zahl. Wir betrachten die Folge

$$a_n = p^{m+n} - p^m + 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Man weise nach, dass die Folge eine (unendliche) Teilfolge mit paarweise teilerfremden Gliedern enthält.

Walther Janous, Innsbruck, A

Aufgabe 1271 (Die einfache dritte Aufgabe): Für die reellen positiven Parameterwerte u, v, w mit $v \neq u \cdot w$ sind die Geraden

$$g_1 : x = u, \quad g_2 : y = v, \quad g_3 : y = w \cdot x$$

gegeben. Durch die Abbildung

$$\begin{aligned}\bar{x} &= a \cdot x^c, \\ \bar{y} &= b \cdot y^c\end{aligned}$$

sind die Geraden in die Geraden

$$\bar{g}_1 : \bar{x} = \bar{u}, \quad \bar{g}_2 : \bar{y} = \bar{v}, \quad \bar{g}_3 : \bar{y} = \bar{w} \cdot \bar{x}$$

überzuführen. Dabei sind \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} ebenfalls gegebene positive Zahlen mit $\bar{v} \neq \bar{u} \cdot \bar{w}$. Wie sind a , b und c zu wählen?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2008

Aufgabe 1257. k Kugeln werden unabhängig und zufällig in n Behälter gelegt. Die Zufallsvariable X zähle die nichtleeren Behälter. Bestimme den Erwartungswert $E(X)$ und die spektrale Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X = x)$ von X ($n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \{0, 1, \dots, n\}$).

Fritz Siegerist, Küsnacht, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 7 Lösungsbeiträge zu dieser Aufgabe eingetroffen, nämlich von Johann Brandstetter (Wien, A), Stefan Grieder (Zürich, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Problemlösegruppe MND (Giessen–Friedberg, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen *Stefan Grieder*: Es sei eine Verteilung von k Kugeln in n Behälter gegeben, wobei i die Anzahl der nicht leeren Behälter bezeichnet. Jede solche Verteilung gibt Anlass zu einer Partition der Menge $\{1, 2, \dots, k\}$ in i nichtleere Teilmengen. Zu einer gegebenen Partition gibt es $(n)_i = n(n-1) \cdots (n-i+1)$ verschiedene Verteilungen, die zu dieser Partition führen.

Bezeichnen $\sigma(k, i)$ die Stirlingschen Zahlen zweiter Art, so ist $\sigma(k, i)$ die Anzahl der Partitionen einer k -elementigen Menge in i nichtleere Teilmengen. Es gilt daher mit dem vorher Gesagten

$$P(X = i) = \frac{1}{n^k} \sigma(k, i) (n)_i.$$

Weil man k Kugeln auf n^k Arten in n Behälter verteilen kann, notiert man noch

$$n^k = \sum_{i \geq 0} \sigma(k, i) (n)_i.$$

Für $E(X)$ ergibt sich dann

$$E(X) = \frac{1}{n^k} \sum_{i \geq 0} i \sigma(k, i) (n)_i = \frac{1}{n^k} \sum_{i \geq 0} (n - (n-i)) \sigma(k, i) (n)_i$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{i \geq 0} \sigma(k, i)(n)_i - \frac{1}{n^k} \sigma(k, i)(n-i)(n)_i \\
&\stackrel{(\star)}{=} n - \frac{1}{n^k} \sum_{i \geq 0} \sigma(k, i)n(n-1)_i = n - \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{i \geq 0} \sigma(k, i)(n-1)_i \\
&= n - \frac{(n-1)^k}{n^{k-1}}.
\end{aligned}$$

Bei (\star) wurde die leicht zu verifizierende Identität $(n-i)(n)_i = n(n-1)_i$ verwendet.

Mit anderen Worten: Zählt $Y = n - X$ die Anzahl der leeren Behälter, so gilt

$$E(Y) = \frac{(n-1)^k}{n^{k-1}}.$$

Bemerkung: Die Problemlösegruppe MND der Fachhochschule Giessen–Friedberg berechnet auch die Varianz. Sie erhält

$$V(X) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k - n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2k}.$$

Aufgabe 1258. Gegeben seien die drei Summen

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-1-3k}{n-1}, \\
s_2 &= \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k}, \\
s_3 &= \left(\frac{3}{2}\right)^n \sum_{k \geq 0} 3^{-k} \binom{2k}{k} \binom{k}{n-k}.
\end{aligned}$$

Beweise, dass $s_1 = s_2 = s_3$ ($n \geq 1$).

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 4 Lösungen eingegangen, nämlich von Peter Bundschuh (Köln, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Die folgende Lösung stammt von *Stefan Grieder*: Zuerst wird $s_2 = s_3$ nachgewiesen. Dazu entwickelt man die vom Parameter $\lambda \neq 0$ abhängige Funktion

$$f_\lambda(x) = \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{\lambda}{x} + 1\right)^n$$

nach Potenzen von x . Gemäss der Multinomialentwicklung ergibt sich

$$f_\lambda(x) = \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{\lambda}{x} + 1\right)^n = \sum_{k+i+j=n} \frac{n!}{k! i! j!} x^{k-i} \lambda^{i-k}.$$

Von dieser Entwicklung bestimmt man das konstante Glied, man setzt also $i = k$ und $j = n - 2k$:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{\lambda}{x} + 1\right)^n &= \dots + \sum_{k \geq 0} \frac{n!}{k! k! (n-2k)!} x^0 + \dots \\
 &= \dots + \sum_{k \geq 0} \frac{n! (n-k)!}{k! (n-k)! k! (n-2k)!} x^0 + \dots \\
 &= \dots + \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} x^0 + \dots = \dots + s_2 x^0 + \dots
 \end{aligned}$$

Man erkennt, dass das konstante Glied vom Parameter λ unabhängig ist. Wir entwickeln nun den Term $f_2(x)$ nach Potenzen von x , formen aber zuvor etwas um:

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x} + 1\right)^n = \left(\frac{(x+1)^2 + 3}{2x}\right)^n \\
 &= 2^{-n} \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} 3^{n-k} x^{-n} (x+1)^{2k} \\
 &= 2^{-n} \sum_{k \geq 0} 3^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{i \geq 0} \binom{2k}{i} x^{i-n} \\
 &= \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^n \sum_{k \geq 0} 3^{-k} \binom{n}{k} \binom{2k}{n} x^0 + \dots \\
 &= \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^n \sum_{k \geq 0} 3^{-k} \frac{n! (2k)!}{k! (n-k)! n! (2k-n)!} x^0 + \dots \\
 &= \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^n \sum_{k \geq 0} 3^{-k} \frac{(2k)! k!}{k! k! (n-k)! (2k-n)!} x^0 + \dots \\
 &= \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^n \sum_{k \geq 0} 3^{-k} \binom{2k}{k} \binom{k}{n-k} x^0 + \dots = \dots + s_3 x^0 + \dots
 \end{aligned}$$

Für den verbleibenden Nachweis verwenden wir einerseits die bekannte (formale) Potenzreihe

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{n-1+\ell}{n-1} x^{\ell} = 1 + \binom{n}{n-1} x + \binom{n+1}{n-1} x^2 + \binom{n+2}{n-1} x^3 + \dots,$$

andererseits schreiben wir $f_1(x)$ als

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \left(x + \frac{1}{x} + 1\right)^n = \frac{(x^2 + x + 1)^n}{x^n} = \frac{(x^3 - 1)^n}{x^n} \frac{1}{(x-1)^n} \\
 &= \frac{(x^3 - 1)^n}{x^n} (-1)^n \left(1 + \binom{n}{n-1} x + \binom{n+1}{n-1} x^2 + \binom{n+2}{n-1} x^3 + \dots\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{3\ell-n} (-1)^{n-\ell} \right) (-1)^n \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{n-1+\ell}{n-1} x^{\ell} \right) \\
&= \left(\sum_{\ell=0}^n (-1)^{\ell} \binom{n}{\ell} x^{3\ell-n} \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{n-1+\ell}{n-1} x^{\ell} \right).
\end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren lässt sich das konstante Glied leicht ermitteln, und man stellt fest, dass es mit s_1 übereinstimmt:

$$s_1 = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-1-3k}{n-1}.$$

Bemerkungen:

1. In den obigen Formeln sind alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ im Sinne des Pascalschen Dreiecks zu verstehen, sie sind also 0, falls $n < 0$.
2. Die am Schluss zur Bestimmung des Koeffizienten des konstanten Gliedes x^0 verwendete Methode des Koeffizientenvergleiches liefert interessante Formeln, wenn man sie auf andere Exponenten anwendet. Beispielsweise erhält man

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+s-3k-1}{n-1} = 0 \quad \text{für } s > 2n.$$

3. Der Aufgabensteller stiess auf die drei Summen s_1 , s_2 und s_3 , als er mit verschiedenen Methoden die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ mit $x_i \in \{0, 1, 2\}$ berechnete.
4. *Peter Bundschuh* findet zwei weitere mit s_1 übereinstimmende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
s_4 &= 4^{-n} \sum_{k \geq 0} (-1)^{n-k} 3^k \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}, \\
s_5 &= (-1)^n \left(\sum_{\substack{k \geq 0 \\ 3|(n+k)}} \binom{n}{k}^2 - \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 3|(n+k-1)}} \binom{n}{k}^2 \right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 1259 (Die einfache dritte Aufgabe). Bestimme alle Lösungen $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ der Gleichung

$$x^3 - y^3 = xy + 503.$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BA

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von 18 Lösern eingetroffen: Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D),

Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Harald Merk (Biberach, D), Fritz Siegerist (Küschnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen *Hans Egli*: Wir setzen $x = y + d$ ($d \in \mathbb{N}$) in die gegebene Gleichung ein und erhalten nach kurzer Umformung

$$y^2 + dy + \frac{d^3 - 503}{3d - 1} = 0$$

und daraus die Lösungen

$$y_{1,2} = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{d^3 - 503}{3d - 1}}.$$

Damit einer der beiden y -Werte positiv wird, muss $d^3 - 503$ negativ sein, was nur für $d = 1, 2, 3, \dots, 7$ der Fall ist. Nur für $d = 2$ und $d = 7$ wird y ganzzahlig. Dies führt zu den beiden Lösungen $(x, y) = (11, 9)$ und $(x, y) = (8, 1)$.