Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 63 (2008)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 19.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 63 (2008) 102 – 106
0013-6018/08/020102-5

© Swiss Mathematical Society, 2008

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2008 erbeten und können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH–5415 Nussbaumen

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Momentan herrscht ein gewisser Mangel an neuen Aufgaben. Aufgabenvorschläge können ebenfalls über die obige Adresse eingesandt werden.

Aufgabe 1254: Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$, und es gelte

$$f'(x) + \sin(x) \leq 1 + \sin(f(x)) \qquad \text{für} \quad x \geq 0.$$

Beweise, dass $f(x) \leq x$ für $x \geq 0$.

Mihály Bencze, Braşov, RO

Aufgabe 1255: In die $2n$ Felder eines $2 \times n$-Rechtecks fülle man natürliche Zahlen $1, 2, 3, 4$ so ein, dass die Summe der Zahlen in jedem Teilquadrat 6 oder 7 beträgt. Man bestimme die Anzahl e_n der möglichen Einfüllungen rekursiv und als Funktion von n.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1256 (Die einfache dritte Aufgabe): Man drücke

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\sin(\beta-\gamma)\\ &+ \sin(\gamma)\sin(\delta)\sin(\gamma-\delta) + \sin(\delta)\sin(\alpha)\sin(\delta-\alpha)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\alpha-\beta) + \cos(\beta)\cos(\gamma)\sin(\beta-\gamma)\\ &+ \cos(\gamma)\cos(\delta)\sin(\gamma-\delta) + \cos(\delta)\cos(\alpha)\sin(\delta-\alpha)\end{aligned}$$

jeweils als Produkt von drei Sinustermen aus.

Stanley Rabinowitz, Chelmsford, USA

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2007

Aufgabe 1242. Beweise, dass für reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \ldots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2} < \sqrt{n}\,.$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BA

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 12 Lösungen eingetroffen: Gheorghe Bercea (München, D), Christian Blatter (Greifensee, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hongkong, CN), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Paul Weisenhorn (Fautenbach, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen *Gheorghe Bercea*: Für reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gilt die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem quadratischen Mittel:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}\,,$$

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \le \sqrt{n}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\,. \tag{1}$$

Mit $a_\ell = \dfrac{x_\ell}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\ell^2}$ $(1 \le \ell \le n)$ bleibt nur noch zu zeigen, dass

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 < 1. \tag{2}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a_\ell^2 &= \frac{x_\ell^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\ell^2)^2} \\ &\le \frac{x_\ell^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{\ell-1}^2)(1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\ell^2)} \\ &= \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{\ell-1}^2} - \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\ell^2}\,, \end{aligned}$$

also

$$a_\ell^2 \le \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{\ell-1}^2} - \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\ell^2}\,. \tag{3}$$

Summiert man diese Ungleichungen (3) über alle ℓ, so ergibt sich

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \le 1 - \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2} < 1. \tag{4}$$

Walther Janous macht darauf aufmerksam, dass diese Aufgabe in [1] bereits publiziert ist.

[1] Djukić, D. et al.: *The IMO Compendium*. Springer Science+Business Media, 2006, 313 und 676.

Aufgabe 1243. Es sei S eine schiefsymmetrische 3×3-Matrix. Man finde alle 3×3-Matrizen A mit reellen Elementen, so dass AS wieder schiefsymmetrisch ist. Man zeige ferner, dass für diese Matrizen $AS = s \cdot S$ gilt mit einem gewissen Skalar s.

Götz Trenkler, Dortmund, D und Dietrich Trenkler, Osnabrück, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 14 Zuschriften eingetroffen: André Calame (Sauges, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Ignace Morand (Préverenges, CH), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Paul Weisenhorn (Fautenbach, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Hans Heiner Storrer argumentiert wie folgt: Die nachfolgenden Überlegungen gelten für Matrizen über einem beliebigen Körper K. Dabei ist das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{x}$ wie im Fall $K = \mathbb{R}$ definiert. Durch Auflösung des entsprechenden Gleichungssystems stellt man fest, dass auch im Fall eines beliebigen Körpers die Beziehung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{0}$ genau dann gilt, wenn $\vec{a}$ und $\vec{x}$ linear abhängig sind, was im Fall $K = \mathbb{R}$ von der geometrischen Interpretation her klar ist.

Jede schiefsymmetrische 3×3-Matrix kann in der Form

$$\mathcal{S}(\vec{a}) := \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit dem Vektor} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

Wie man sofort nachrechnet, gilt dann für einen Vektor $\vec{x}$

$$\mathcal{S}(\vec{a})\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x} \quad \text{sowie} \quad \vec{x}^\top \mathcal{S}(\vec{a}) = (\vec{x} \times \vec{a})^\top .$$

Dabei bezeichnet $^\top$ die Transposition. Nach dem eingangs Gesagten folgt, dass $\mathcal{S}(\vec{a})\vec{x} = \vec{0}$ genau dann gilt, wenn $\vec{a}$ und $\vec{x}$ linear abhängig sind. (Analog für $\vec{x}^\top \mathcal{S}(\vec{a}) = \vec{0}^\top$.)

Wir bestimmen zuerst die Matrizen Q, welche $\mathcal{S}(\vec{a})$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$ von links annullieren. Dazu seien $\vec{q}_i^{\,\top}$, $i = 1, 2, 3$, die Zeilenvektoren von Q. Dann gilt

$$Q\mathcal{S}(\vec{a}) = 0 \iff (\vec{q}_i \times \vec{a})^\top = \vec{0}^\top \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3 .$$

Wie wir eben gesehen haben, ist dies dazu äquivalent, dass $\vec{q}_i$ und $\vec{a}$ linear abhängig sind, mithin zur Existenz von $r_i \in K$ mit $\vec{q}_i^{\,\top} = r_i \vec{a}^\top$. Setzen wir einfachheitshalber $r_1 = r$, $r_2 = s$, $r_3 = t$, so folgt, dass die Matrizen Q mit $Q\mathcal{S}(\vec{a}) = 0$ genau die Matrizen der Form

$$Q = \begin{pmatrix} ra & rb & rc \\ sa & sb & sc \\ ta & tb & tc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r, s, t \in K \tag{1}$$

sind.

Es sei nun S eine schiefsymmetrische 3×3-Matrix. Wir schreiben $S = \mathcal{S}(\vec{a})$ für einen Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ (der Fall $\vec{a} = \vec{0}$, also $S = 0$, ist uninteressant). Ist nun $B = AS$ schiefsymmetrisch, so muss B die Form $B = \mathcal{S}(\vec{b})$ für einen Vektor $\vec{b}$ haben. Wegen $S\vec{a} = \mathcal{S}(\vec{a})\vec{a} = \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ ist auch $\mathcal{S}(\vec{b})\vec{a} = AS\vec{a} = \vec{0}$, somit sind $\vec{b}$ und $\vec{a}$ linear abhängig, d.h. $\vec{b}$ hat die Form $\vec{b} = k\vec{a}$ für ein $k \in K$. Es folgt

$$AS = B = \mathcal{S}(\vec{b}) = \mathcal{S}(k\vec{a}) = k\mathcal{S}(\vec{a}) = kS\,.$$

Damit ist die eine Behauptung bewiesen.

Aus $AS = kS$ folgt $(A - kE)S = 0$ (E bezeichnet die Einheitsmatrix). Somit annulliert $A - kE$ die Matrix $S = \mathcal{S}(\vec{a})$ und hat damit die Form (1). Damit ergibt sich, dass A die folgende Gestalt haben muss:

$$\begin{aligned} A &= kE + \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = kE + \begin{pmatrix} ra & rb & rc \\ sa & sb & sc \\ ta & tb & tc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k+ra & rb & rc \\ sa & k+sb & sc \\ ta & tb & k+tc \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad k, r, s, t \in K\,. \end{aligned}$$

Diese Gestalt ist aber auch hinreichend dafür, dass AS schiefsymmetrisch ist; es gilt ja sogar $AS = kS$.

Bemerkungen:

1. Die Menge aller Matrizen A, derart, dass AS schiefsymmetrisch ist, bildet (für ein festes S) eine Unteralgebra der K-Algebra der 3×3-Matrizen über K.
2. Es sei S eine schiefsymmetrische $n \times n$-Matrix. Im Fall $n = 3$ gilt, wie wir gesehen haben: Wenn AS schiefsymmetrisch ist, dann ist $AS = kS$ für einen Skalar k. Dies gilt aufgrund einer trivialen Rechnung auch für $n = 2$. Für $n \geq 4$ trifft die Aussage aber nicht mehr zu. So ist etwa mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   das Produkt AS zwar schiefsymmetrisch, aber nicht von der Form kS.

   Entsprechende Beispiele lassen sich für $n > 4$ angeben.

Aufgabe 1244 (Die einfache dritte Aufgabe). Es seien A, B, C und D vier verschiedene Punkte einer Ebene. Zeige, dass der Term

$$T = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}$$

von einem einzigen Winkel abhängt.

Wie ist es, wenn die vier Punkte nicht in einer Ebene liegen?

Karl Wirth, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 20 Zuschriften eingegangen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BA), Gheorghe Bercea (München, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck,A), Dieter Koller (Zürich, CH), Ignace Morand (Préverenges, CH), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Paul Weisenhorn (Fautenbach, D), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser argumentieren wie *Michael Vowe*:
Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ die Ortsvektoren der Punkte A, B, C und D, so gilt

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 &= (\vec{c}-\vec{a})^2 + (\vec{d}-\vec{b})^2 - (\vec{d}-\vec{a})^2 - (\vec{c}-\vec{b})^2 \\ &= 2(\vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c}) \\ &= -2(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{d}-\vec{c}) \\ &= -2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\cos(\varphi).\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet φ den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$. Setzt man dieses Ergebnis im Term der Aufgabenstellung ein, so ergibt sich $T = -2\cos(\varphi)$. Aufgrund der Herleitung gilt dies auch im Raum, wobei die Geraden AB und CD windschief sein können.