Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 63 (2008)

Artikel: Über eine bemerkenswerte Eigenschaft von Dezimalbrüchen und

gewissen anderen Systembrüchen

Autor: Deschauer, Stefan

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-99063

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 30.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elemente der Mathematik

Über eine bemerkenswerte Eigenschaft von Dezimalbrüchen und gewissen anderen Systembrüchen

Stefan Deschauer

Stefan Deschauer studierte Mathematik, katholische Theologie und Erziehungswissenschaften an der Universität Marburg. Nach der Promotion in Ulm und einigen Jahren im Schuldienst war er an den Universitäten Eichstätt und Erlangen tätig, bevor er 1994 den Ruf auf eine Professur für Didaktik der Mathematik an der TU Dresden annahm.

Während eines Unterrichtsbesuchs in einer 7. Klasse eines Dresdner Gymnasiums sollte eine Schülerin den Dezimalbruch 2,5 in einen gemeinen Bruch verwandeln. Ihre spontane Antwort war " $\frac{2}{5}$ ", dann korrigierte sie und gab " $\frac{5}{2}$ " an. Für den Mathematiker ergab sich sogleich folgende Frage:

Gibt es weitere endliche Dezimalbrüche, deren Wert mit dem Quotienten aus der natürlichen Zahl, die aus den Nachkommastellen gebildet wird, und der Vorkommazahl übereinstimmt?

Zu welchen Ergebnissen führt die entsprechende Untersuchung bei g-adischen Systembrüchen?

Der Reiz dieses keineswegs trivialen Problems besteht darin, dass die Fragestellung eigentlich so naheliegend ist, wichtige Teillösungen mit Methoden der elementaren Zahlentheorie gewonnen werden können und genügend offene Fragen bleiben.

Eine fehlerhafte Umwandlung von 2,5 (in $\frac{2}{5}$) im Unterricht machte den Autor auf die augenfällige Darstellung 2,5 = $\frac{5}{2}$ aufmerksam. Gibt es im Dezimalsystem noch weitere solcher Darstellungen, wobei die (ein- oder mehrstellige) Vorkommazahl mit dem Nenner und die (ein- oder mehrstellige) Nachkommazahl mit dem Zähler des gemeinen Bruchs übereinstimmt? Der elementare, aber attraktive Weg zur (negativen) Antwort weckt Neugier auf die Situation in anderen g-adischen Systemen. Ohne Weiteres findet man unendlich viele g mit mindestens einer Darstellung (in obigem Sinne). Schwieriger ist es zu zeigen, dass sogar unendlich viele g mit mindestens zwei Darstellungen existieren, und diese explizit anzugeben.

1 Dezimalbrüche

Wir betrachten also allgemein Dezimalbrüche

$$a, a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, \quad a \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \le a_{\nu} \le 9 \quad (0 \le \nu \le n)$$

mit der Eigenschaft

$$a, a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 = \frac{z}{a}, \quad z = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} \cdot 10^{\nu} < 10^{n+1}.$$
 (1)

Es folgt nach Multiplikation mit $10^{n+1} \cdot a$:

$$10^{n+1} \cdot a^2 + az = 10^{n+1} \cdot z \tag{2}$$

mit $a^2 + a < 10^{n+1}$ wegen $10^{n+1} \cdot a^2 = (10^{n+1} - a)z < (10^{n+1} - a)10^{n+1}$.

1.1 Analyse des Terms für z

Wir können nun nach z auflösen und den entstehenden Term studieren. Es gilt

$$z = \frac{10^{n+1} \cdot a^2}{10^{n+1} - a}. (3)$$

Eine Umformung des Terms für z führt zu

$$z = a^2 + q$$
, $q = \frac{a^3}{10^{n+1} - a} \in \mathbb{N}^*$ mit $a^2 < 10^{n+1} - a = \frac{a^3}{q}$, also $q < a.$ ¹ (4)

Letzteres ergibt sich auch aus der Identität

$$\frac{z}{10^{n+1}} = \frac{q}{a}.\tag{5}$$

Gemäß (4) oder (5) betrachten wir die multiplikative Darstellung

$$a(a^2 + q) = 10^{n+1}q, \quad q < a.$$
 (6)

Mit der Zerlegung

$$q = 2^{s} \cdot 5^{t} \cdot q' \cdot q'', \quad s, t \ge 0, \quad (10, q' \cdot q'') = 1, \quad q'|a, \quad q''|(a^{2} + q)$$
 (7)

- die Wahl von q^\prime und $q^{\prime\prime}$ ist zunächst nicht notwendig eindeutig - ergeben sich die Darstellungen

$$a = 2^{i} \cdot 5^{k} q', \ 0 \le i \le n + 1 + s, \ 0 \le k \le n + 1 + t$$

mit $i + k \ge 1$ wegen $q < a$; (8)

$$a^{2} + q = 2^{n+1+s-i} \cdot 5^{n+1+t-k} \cdot q''.$$
(Wiederum sind nicht beide Potenzen = 1.)

¹Insgesamt gilt $z = a^2 + q < a^2 + a < 10^{n+1}$.

Andererseits ist

$$\frac{a^2 + q}{q''} = \frac{2^{2i} \cdot 5^{2k} \cdot q'^2 + 2^s \cdot 5^t \cdot q'q''}{q''} = 2^{2i} \cdot 5^{2k} \cdot \frac{q'^2}{q''} + 2^s \cdot 5^t \cdot q', \tag{10}$$

so dass wegen der Bedingung der Teilerfremdheit in (7) gilt:

$$q''|q'^2. (11)$$

Darüber hinaus ergibt sich aus (10) und (9)

$$\frac{a^2 + q}{q'} = 2^{2i} \cdot 5^{2k} \cdot q' + 2^s \cdot 5^t \cdot q'' = 2^{n+1+s-i} \cdot 5^{n+1+t-k} \cdot \frac{q''}{q'}$$

mit q'|q'' und

$$\frac{a^2 + q}{a'^2} = 2^{2i} \cdot 5^{2k} + 2^s \cdot 5^t \cdot \frac{q''}{q'} = 2^{n+1+s-i} \cdot 5^{n+1+t-k} \cdot \frac{q''}{a'^2}$$
 (12)

mit

$$q^{\prime 2}|q^{\prime \prime}. \tag{13}$$

Mit (11) folgt

$$q'' = q'^2$$
 und daher $q = 2^s \cdot 5^t \cdot q'^3$ (gemäß (7)). (14)

Weiterhin ergibt sich nun aus (12)

$$q' = \frac{2^{n+1+s-i} \cdot 5^{n+1+t-k} - 2^{2i} \cdot 5^{2k}}{2^s \cdot 5^t} = 2^{n+1-i} \cdot 5^{n+1-k} - 2^{2i-s} \cdot 5^{2k-t}$$
 (15)

mit den im Vergleich zu (7) und (8) eingeschränkten Exponentenbedingungen $0 \le i, k \le n+1, \ 0 \le s \le 2i, \ 0 \le t \le 2k.$

Wegen (10, q') = 1 reduziert sich (15) zunächst auf vier Darstellungsformen für q':

$$i = k = n + 1, \ 0 \le s, t \le 2n + 2 : q_1' = 1 - 2^{2n + 2 - s} \cdot 5^{2n + 2 - t},$$
 (16)

$$s = 2i, \ t = 2k, \ 0 \le i, k \le n+1: \ q_2' = 2^{n+1-i} \cdot 5^{n+1-k} - 1,$$
 (17)

$$k = n + 1$$
, $s = 2i$, $0 \le i \le n + 1$, $0 \le t \le 2n + 2$: $q_3' = 2^{n+1-i} - 5^{2n+2-t}$, (18)

$$i = n + 1, \ t = 2k, \ 0 \le k \le n + 1, \ 0 \le s \le 2n + 2 : q_4' = 5^{n+1-k} - 2^{2n+2-s}.$$
 (19)

Dabei scheidet (16) von vornherein aus wegen $q_1' \le 0$. Die anderen q' sind auch noch hinsichtlich des Kriteriums q < a zu untersuchen. Nach (14) und (8) ist q < a äquivalent zu

$$q^{\prime 2} < 2^{i-s} \cdot 5^{k-t}, \tag{20}$$

und die Wahl von s und t in (17) führt wiederum zu keinem $q' \ge 1$. Im Fall (18) müsste $1 \le q_3'^2 < \frac{5^{n+1-t}}{2^i} \le 5^{n+1-t}$ mit $t \le n$ gelten im Widerspruch zur Abschätzung $q_3' = 1$

 $2^{n+1-i}-5^{2n+2-t} \le 2^{n+1}-5^{n+2} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Entsprechende Überlegungen führen nur bei q_4' zu keinem Widerspruch. Nach (19) und (20) gilt es nun, q_4' zu finden mit

$$1 \le q_4^{\prime 2} < 2^{n+1-s} \cdot 5^{-k}. \tag{21}$$

Hieraus folgt $5^k < 2^{n+1-s}$ mit $s \le n$ und mit (19) $2^s \cdot 5^{2k} < 2^{2n+2-s} < 5^{n+1-k}$ wegen $q_4' \ge 1$. Daher gilt $2^s < 5^{n+1-3k}$ mit $k \le \frac{n}{3}$, insgesamt also eine Verschärfung der Bedingungen für s, k gegenüber (19). Für die weiteren Überlegungen genügen aber die Schranken $0 \le s$, $k \le n$. Setzt man gemäß (19)

$$(1 \le) q_4' = u - v \quad \text{mit } u := 5^{n+1-k} \text{ und } v := 2^{2n+2-s},$$
 (22)

so erhält man nach Division von $q_4^{\prime 2}$ durch uv infolge von (21) die obere Abschätzung

$$\frac{u}{v} + \frac{v}{u} - 2 < \frac{1}{10^{n+1}}. (23)$$

1.2 Bestimmung von u und v

Wir betrachten zuerst den Fall $n \ge 1$ und nehmen zunächst an, dass

$$u_k(n) > v_s(n) \wedge u_k(n-1) > v_s(n-1), \quad 0 \le s, k \le n,$$
 (24)

gilt, wobei $u_k(n-1) = 5^{n-k}$ und $v_s(n-1) = 2^{2n-s}$ ist. Dafür ist k auf $0 \le k \le n-1$ einzuschränken. Dann kann die linke Seite von (23) folgendermaßen nach unten abgeschätzt werden:

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{u_k(n-1)}{v_s(n-1)} + \frac{4}{5} \cdot \frac{v_s(n-1)}{u_k(n-1)} - 2 > \frac{5}{4} + \frac{4}{5} - 2 = \frac{1}{20} > \frac{1}{10^{n+1}}.$$
 (25)

Dazu beachte man, dass die Funktion $f(x) = x + \frac{1}{x}$ für x > 1 streng monoton wächst und $x = \frac{5}{4} \cdot \frac{u}{v}$ ein Produkt aus zwei Faktoren ist, die beide 1 übersteigen. (24) lässt sich also mit (23) nicht vereinbaren. Es verbleibt jetzt noch der Fall

$$u_k(n) > \nu_s(n) \wedge u_k(n-1) < \nu_s(n-1), \quad 0 \le s, k \le n.$$
 (26)

Äquivalent dazu ist die Ungleichungskette

$$\frac{2^{2n+2}}{5^{n+1}} < \frac{2^s}{5^k} < \frac{2^{2n}}{5^n}. (27)$$

Mithilfe des Faktors $\frac{5^3}{2^7} = \frac{125}{128}$, der noch näher bei 1 liegt als $\frac{2^2}{5^1} = \frac{4}{5}$, lässt sich $\frac{2^{2n}}{5^n}$ mehrfach passend verkleinern, womit konkrete $\frac{2^s}{5^k}$ unter der Bedingung (27) erzeugt werden können. Hierbei ist zu beachten, dass $\frac{4}{5} < \frac{5^{3l}}{2^{7l}} < 1$, $l \in \mathbb{N}$, genau dann gilt, wenn l im

Intervall [1; 9] liegt. Damit können s und k die folgenden Werte annehmen, womit eine weitere Einschränkung von n verbunden ist:

$$s = 2n - 7l, \quad k = n - 3l, \quad n \ge \frac{7}{2}l, \quad l = 1, \dots, 9.$$
 (28)

Gibt es noch andere s und k, die (27) erfüllen? Hierzu betrachten wir die zu (27) äquivalente Ungleichungskette

$$2^{2n+2-s} < 5^{n+1-k} < 2^{2n-s} \cdot 5. (29)$$

Wegen $0 \le s \le n$ ist $2^{2n+2-s} \ge 8$ mit der Folge $k \le n-1$ und rechts $s \le 2n-3$. Nun beginnt ein hübscher "Schaukel-Algorithmus": Man erhält weiter $2^{2n+2-s} \ge 32$ und $k \le n-2$, so dass rechts $s \le 2n-5$ folgt. Dann ist aber $2^{2n+2-s} \ge 128$, $k \le n-3$ und rechts $s \le 2n-7$. Damit ergibt sich aus (29)

$$512 \cdot 2^{2n-7-s} < 625 \cdot 5^{n-3-k} < 128 \cdot 2^{2n-7-s} \cdot 5 \tag{30}$$

mit ausschließlich nicht-negativen Exponenten, wobei aber jetzt die Schranken von k und s stagnieren. Das Verfahren bricht an dieser Stelle ab. Aus (27) bzw. (29) folgt also einerseits die Exponentenbedingung

$$s \le 2n - 7 \quad \text{und} \quad k \le n - 3, \tag{31}$$

andererseits erweist sich der Fall l=1 in (28) wieder als eine Lösung von (27), wie man an der gültigen Ungleichungskette $512 < 625 < 128 \cdot 5$ in (30) erkennt. s=2n-7 und k=n-3 sind also die maximalen Exponenten, für die die Ungleichungskette (27) erfüllt ist. s und k mit l=2 in (28) müssen nun die zweithöchsten Exponenten sein, denn angenommen, (27) würde durch ein Paar (s,k) mit 2n-14 < s < 2n-7, n-6 < k < n-3 erfüllt, dann ergäbe sich wegen $\frac{2^s}{5^k} \cdot \frac{2^7}{5^3} < \frac{2^{2n}}{5^n}$ auch noch für (s+7,k+3) mit 2n-7 < s+7 < 2n, n-3 < k+3 < n eine Lösung. Diese Exponentenbedingungen widersprechen aber (31).

Da sich diese Überlegung für alle $l=3,\ldots,9$ fortsetzen lässt, sind mit (28) tatsächlich alle Lösungen von (27) erfasst. Nach (22) folgt nun

$$\frac{u_k(n)}{v_s(n)} + \frac{v_s(n)}{u_k(n)} - 2 = \frac{5}{4} \left(\frac{125}{128}\right)^l + \frac{4}{5} \left(\frac{128}{125}\right)^l - 2. \tag{32}$$

Die Funktion auf der rechten Seite fällt offenbar streng monoton mit l. Das Minimum wird also für l=9 angenommen und ist größer als $9 \cdot 10^{-5}$. Andererseits lässt sich die rechte Seite von (23) mit

$$\frac{1}{10^{n+1}} \le \frac{1}{10^{\frac{7}{2}+l}} \tag{33}$$

nach oben abschätzen, wobei das Maximum für l=1 angenommen wird und kleiner als $4\cdot 10^{-5}$ ist. Damit gilt auch hier $\frac{u_k(n)}{v_s(n)}+\frac{v_s(n)}{u_k(n)}-2>\frac{1}{10^{n+1}}$ im Widerspruch zu (23).

Unser Problem ist also auf n=0 reduziert. Es folgt $s=k=0, u_0(0)=5, v_0(0)=4, \frac{u_0(n)}{v_0(n)}+\frac{v_0(n)}{u_0(n)}-2=\frac{1}{20}<\frac{1}{10^1}$ gemäß (23), $q_4'=1$ mit i=1, t=0 nach (19), q=1 nach (14), a=2 nach (8), $z=a_0=5$ nach (4) und (1). Damit gilt

Satz 1. 2,5 ist der einzige Dezimalbruch, der die Eigenschaft (1) besitzt.

2 g-adische Systembrüche

Im Weiteren wollen wir nun allgemein g-adische Systembrüche $a, a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a \in \mathbb{N}^*, 0 \le a_{\nu} \le g-1 \ (0 \le \nu \le n)$ mit der Eigenschaft

$$(a, a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_g = \frac{z}{a}, \quad z = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} \cdot g^{\nu} < g^{n+1},$$
 (1')

betrachten.

2.1 $g = p^{\alpha}$, p Primzahl, $\alpha \ge 1$

Die Schritte (2)–(15) für g=10 lassen sich weitgehend analog auf $g=p^{\alpha}$ übertragen: Mit den alten Bezeichnungen erhält man jetzt $q''=q'^2$, $q=p^s\cdot q'^3$ und schließlich

$$q'=p^{\alpha(n+1)-i}-p^{2i-s}$$
mit den Exponentenbedingungen $1 \le i \le \alpha(n+1), \ 0 \le s \le 2i.$

Wegen (p, q') = 1 reduziert sich (15') nun auf nur zwei Darstellungsformen für q':

$$1 \le i = \alpha(n+1), \quad 0 \le s \le 2\alpha(n+1) : q_1' = 1 - p^{2\alpha(n+1)-s},$$
 (16')

$$s = 2i, \quad 1 \le i \le \alpha(n+1) : q_2' = p^{\alpha(n+1)-i} - 1.$$
 (17')

Einerseits gilt $q_1' \le 0$, andererseits ist q < a wegen $a = p^i \cdot q'$ jetzt äquivalent zu (20') $q'^2 < p^{i-s}$, so dass für $q' = q_2'$ mit s = 2i folgt: $q_2'^2 < p^{-i} \le p^{-1}$ – im Widerspruch zu $q_2' \ge 1$. Daher gilt

Satz 2. Ist g > 1 eine Primzahlpotenz, so gibt es im zugehörigen g-adischen System keine Darstellung gemäß (1').

2.2 g-adische Systeme mit mindestens einer Darstellung²

Ersetzt man 10 durch g, so erhält man

$$\frac{z}{g^{n+1}} = \frac{q}{a} \tag{5'}$$

 $^{^2}$ Unter einer "Darstellung" sei hier und im Folgenden die Darstellung gemäß (1') gemeint.

mit

$$z = a^2 + q, \quad q = \frac{a^3}{g^{n+1} - a} < a.$$
 (4')

Daraus folgt unmittelbar

Satz 3. Ein g-adisches System hat genau dann mindestens eine Darstellung, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ und ein natürliches q, $1 \le q < a$, $q|a^3$, existieren mit $g^{n+1} = \frac{a^3}{q} + a$. Die zugehörige Darstellung ist

$$(a, a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_g = \frac{a^2 + q}{a}, \quad a^2 + q = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} \cdot g^{\nu}.$$

Beispiele. n = 0 (Darstellung bezogen auf 1 Nachkommastelle):

$$q=1, a=2$$
: $g=10, (2,5)_{10}=\frac{5}{2}$
 $q=4, a=6$: $g=60, (6, [40])_{60}=\left(\frac{[40]}{6}\right)_{60}$ (gemeinsamer Wert: $6\frac{2}{3}$) 3
 $n=1$ (Darstellung bezogen auf 2 Nachkommastellen):
 $q=2, a=4$: $g=6, (4,30)_6=\left(\frac{30}{4}\right)_6$ (gemeinsamer Wert: $4\frac{1}{2}$)
 $q=27, a=36$: $g=42, ([36], [31][21])_{42}=\left(\frac{[31][21]}{[36]}\right)_{42}$ (gemeinsamer Wert: $36\frac{3}{4}$)

Bemerkung. Die Frage, ob es Darstellungen gibt, die sich auf mehr als 2 Nachkommastellen beziehen $(n \ge 2)$, ist offen.

Wir wollen nun die folgende Tabelle studieren, in der alle Werte g unterhalb von 10000 mit $g=\frac{a^3}{q}+a$ unter der Bedingung $1\leq q< a, q|a^3$ (n=0) der Größe nach aufgelistet sind, und zur weiteren Theoriebildung beitragen.

10	30	36	60	68	78		
2 *1	3 *1	$4*2 = 6^2$	6*4	4 * 1	6*3		
114	130	135	136				Î
6*2	5*1	10 *8	8 *4				
204	210	222	228	252	260	264	
12 *9	10*5	6*1	12 *8	9 * 3	10 *4	8 * 2	
300	350	357	390				
12 *6	7 *1	14 *8	15 *9				
406	444						
14 *7	12*4						
504	510	520	528	588			
18 *12	10*2	8*1 = 20*16	16 *8	12 *3			
666	690						
18 *9	15 *5						

³Einziffrige Zahlen werden durch eckige Klammern gekennzeichnet, um Missverständnisse zu vermeiden.

700	738	747	792				
14 *4	9*1	18 *8	24 *18				
820	876	888					
20 * 10	12*2	24 *16					
990							
18*6 = 22*11							
1010	1020	1030	1040	1050			
10 *1	20*8	30*27	16 *4	21 *9			
1110	1140	1155	1176	500000			
30 * 25	15 *3	30 *24	24 *12				
1342	1344	1353	1364	1378	1380	1386	
11 *1	21 *7	22 *8	33 *27	26*13	30 * 20	14 *2	
1400	1476	1494	1530	1560	1596	1620	
28 * 16	18*4	36*32	30*18	24 *9	28 * 14	20 *5	
1740	1750	1752	1764	1830	1962	1980	
12 *1	35 *25	24 *8	$36*27 = 42^2$	30 * 15	18 *3	36*24	
2020	2040	2064	2080	2100	10 75	30 121	
20 *4	40*32	16 *2	32 *16	42 * 36			
2210	2214	2223	2236	2280	2328	2346	
13 *1	27 *9	26 *8	39 *27	30 * 12	24 *6	34 *17	
2600	2628	2684	2688	30 *12	24 *0	JT 117	
40 *25	36*18	22 *4	42 *28				
2706	2730	2758	2772	2786	2926	2934	2952
44 *32	30*10	14 *1	28 * 8	42 *27	38 * 19	18 *2	36 *16
3030	3108	3120	3129	3150	3164	3175	3240
30 *9	21 *3	48 *36	42 *24	25 *5	28 *7	50*40	40 *20
	VAAA10		 	t			40 *20
3300 22 11	3390	3405 30 *8	3420	3480 24 *4	3504 48 *32	3570 42 *21	
33 *11	15*1		45 *27				4060
3640	3690	3916	3924	4020	4026	4040	4060
56 * 49	45 *25	44 *22	36*12	20 *2	33 *9	40 * 16	60 *54
4112	4128	4144	4158	4278	4380		
16 *1	32 *8	48 * 27	42 * 18	46 * 23	60 * 50	4/22	4202
4420	4428	4446	4530	4560	4602	4632	4656
26 *4	54 *36	52 * 32	30 *6	60 * 48	39 *13	24 *3	48 *24
4860	4930	4947	4964	4981	5050	5166	5220
60 * 45	17*1	34 *8	51 *27	68 *64	50 * 25	63 * 49	36*9
5334	5346	5368	5390	5430	5460	5516	5544
42 * 14	22 *2	44 *16	66 * 54	30 *5	52*26 = 60*40	28 *4	56 *32
5850	5868	5886	5904	6060			
18 *1	36*8	54 *27	72 *64	60 * 36			
6120	6160	6192	6195	6216	6300	6328	6440
45 * 15	35 *7	48 * 18	70 *56	42 * 12	50 * 20	56*28	40 *10
6588	6600	6615	6630	6669	6710	6780	6786
27 *3	66 *44	54 *24	39 *9	78 *72	55 *25	30 *4	58 *29
6810	6878	6897					
60 * 32	19 *1	38 *8	55,000 10 10	9232 1000	Name of		25 (it 10,000
6916	6930	6935	6936	6960	6984	7070	7260
57 *27	70 * 50	76 *64	24 *2	48 * 16	72 *54	70 * 49	60 * 30
7750	7788	7812	7848	7854			
62 *31	44 *11	36 *6	72 *48	51 *17			

8020	8040	8052	8060	8080	8224	8256	8274
20 *1	40 *8	66 * 36	60 *27	80 *64	32 *4	64 *32	42 *9
8316	8610	8645	8700	8778			
84 *72	35 *5	70 *40	60 * 25	66 * 33			
8802	8814	8840	8866	9030	9060	9090	
54 *18	26*2	52 * 16	78 *54	30 *3	60 *24	90 *81	
9204	9264	9282	9303	9316	9324	9345	9394
78 *52	48 * 12	21 *1	42 *8	68 *34	63 *27	84 *64	77 *49
9450	9492	9804	9810	9860	9870	9894	
75 *45	84 *63	57 * 19	90 * 75	34 *4	70 *35	68 *32	

Tabelle 1 für
$$2 \le g \le 10000, g = a*q := \frac{a^3}{q} + a, 1 \le q < a, q | a^3$$

Nach Satz 2 treten für g keine Primzahlpotenzen auf, so dass g mindestens zwei verschiedene Primfaktoren enthält. Speziell gibt es Zahlen g, die sich in genau zwei verschiedene Primfaktoren zerlegen lassen, z.B. 10 und 4981 (= $17 \cdot 293$).

Es kommen gerade und ungerade g vor, wobei alle Endziffern ausgeschöpft werden, aber die geraden g dominieren (in der Tabelle) bei Weitem. Ungerades g zieht offenbar gerades g nach sich. Darüber hinaus erhält man sofort folgendes Kriterium:

$$g$$
 ist ungerade genau dann, wenn gilt:
$$a = 2^i a', \ q = 2^{3i} q', \ i \ge 1, \ a', \ q' \text{ ungerade.}$$
 (34)

Dabei gilt $q'|a'|^3$. Weiterhin hat g die Produktdarstellungen

$$g = \frac{a}{(a,q)} \cdot \left(\frac{a^2}{\frac{q}{(a,q)}} + (a,q)\right) = \frac{a}{(a,q)} \cdot \left(\frac{(a,q)^2}{\frac{q}{(a,q)}} \cdot \left(\frac{a}{(a,q)}\right)^2 + (a,q)\right).$$
(35)

In diesem Zusammenhang bietet sich auch an, die Werte q zu klassifizieren:

$$(q < a) \land (q|a), \tag{36}$$

$$(q < a) \land (q \nmid a) \land (q \mid a^2), \tag{36'}$$

$$(q < a) \wedge (q \nmid a^2) \wedge (q \mid a^3). \tag{36''}$$

In den Fällen (36) und (36') lässt sich (35) vereinfachen, und man erhält $g = \frac{a}{q} \cdot (a^2 + q)$ bzw. $g = \frac{a}{(a,q)} \cdot (a,q) \cdot \left(\frac{a^2}{q} + 1\right)$, wobei kein Faktor gleich 1 ist. Man sieht direkt – auch ohne Rückgriff auf das Kriterium (34) – leicht ein, dass in diesen Fällen g stets gerade ist.

2.3 g-adische Systeme mit mindestens zwei Darstellungen

In der Tabelle 1 fallen weiterhin die Werte $g=520,\,990,\,5460$ auf, die nach Satz 3 (Fall n=0) jeweils mindestens zwei verschiedene auf die 1. Nachkommastelle bezogene Dar-

stellungen besitzen, und zwar

$$(8, [65])_{520} = \left(\frac{[65]}{8}\right)_{520} \qquad \text{(gemeinsamer Wert: } 8\frac{1}{8}\text{)},$$

$$([20], [416])_{520} = \left(\frac{[416]}{[20]}\right)_{520} \qquad \text{(gemeinsamer Wert: } 20\frac{4}{5}\text{)}$$

bzw.

([18], [330])₉₉₀ =
$$\left(\frac{[330]}{[18]}\right)_{990}$$
 (gemeinsamer Wert: $18\frac{1}{3}$),
([22], [495])₉₉₀ = $\left(\frac{[495]}{[22]}\right)_{990}$ (gemeinsamer Wert: $22\frac{1}{2}$)

bzw.

([52], [2730])₅₄₆₀ =
$$\left(\frac{[2730]}{[52]}\right)_{5460}$$
 (gemeinsamer Wert: $52\frac{1}{2}$),
([60], [3640])₅₄₆₀ = $\left(\frac{[3640]}{[60]}\right)_{5460}$ (gemeinsamer Wert: $60\frac{2}{3}$)

und möglicherweise noch weitere, falls für diese g außerdem noch die Identität $g^{n+1} = \frac{b^3}{r} + b$ ($r < b, r | b^3$) für ein $n \ge 1$ gilt. (Im Bereich der Tabelle 1 ist dies nicht der Fall.)

Es stellt sich nun natürlicherweise die Frage, ob es unendlich viele g mit (mindestens) zwei Darstellungen gibt und ob man gegebenenfalls zumindest eine unendliche Teilmenge dieser g konkret angeben kann.

Dabei sollen zwei Darstellungen bezüglich g, die sich jeweils auf die 1. Nachkommastelle beziehen, als 1/1-Darstellungen von g bezeichnet werden. Außerdem gehen wir noch kurz auf 1/2-Darstellungen von g ein, d.h. auf Darstellungen bezüglich g, von denen sich die eine auf die 1. Nachkommastelle, die andere auf die ersten beiden Nachkommastellen bezieht.

2.3.1 g-adische Systeme mit 1/1-Darstellungen

Hier sind g zu finden mit

$$g = \frac{a^3}{a} + a = \frac{b^3}{r} + b, \quad a \neq b, \quad q < a, \quad q \mid a^3, \quad r < b, \quad r \mid b^3.$$
 (37)

Sei o.B.d.A. a < b. Die Tabelle 1 lieferte die Beispiele g = 520, g = 990 und g = 5460. Wir wollen nur den speziellen Fall q|a,r|b betrachten, wie er für g = 990 vorliegt, und erhalten mit $a = \lambda q$, $b = \mu r$, $1 < \lambda \le a$, $1 < \mu \le b$

$$g = a(\lambda a + 1) = b(\mu b + 1), \quad 2 \le \mu < \lambda,$$
 (37')

bzw.

$$\frac{a}{b} = \frac{\mu b + 1}{\lambda a + 1}, \quad \mu | b, \quad \lambda | a, \quad 2 \le \mu < \lambda. \tag{38}$$

Mit s = (a, b) schreiben wir $a = \alpha s, b = \beta s$:

$$\frac{\alpha s}{\beta s} = \frac{\mu \beta s + 1}{\lambda \alpha s + 1}, \quad \alpha < \beta, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad \mu | \beta s, \quad \lambda | \alpha s, \quad 2 \le \mu < \lambda. \tag{38'}$$

Für die Zahl k, mit der der Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ zu $\frac{\mu\beta s+1}{\lambda\alpha s+1}$ erweitert wird, gilt $k=\frac{\lambda\alpha s-\mu\beta s}{\beta-\alpha}$, woraus einerseits $k+\lambda s=\frac{(\lambda-\mu)\beta s}{\beta-\alpha}$, andererseits $k+\mu s=\frac{(\lambda-\mu)\alpha s}{\beta-\alpha}$ folgt. Somit ergibt sich

$$\beta - \alpha | (\lambda - \mu)s. \tag{39}$$

Wir nehmen nun eine erneute Spezialisierung vor:

$$\beta - \alpha = (\lambda - \mu)s. \tag{39'}$$

Dann ist

$$k + \lambda s = \beta, \quad k + \mu s = \alpha,$$
 (40)

und wegen der Erweiterungseigenschaft von k ergibt sich aus (38'):

$$k(k + \mu s) = \mu(k + \lambda s)s + 1, \quad k(k + \lambda s) = \lambda(k + \mu s)s + 1.$$

Aus beiden Gleichungen erhält man

$$k^2 - 1 = \mu \lambda s^2,\tag{41}$$

was nach (40) zu $k^2-1=(\alpha-k)(\beta-k)$ mit $k=\frac{\alpha\beta+1}{\alpha+\beta}$ führt, woraus wieder wegen (40) die Darstellungen

$$\mu s = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha + \beta}, \quad \lambda s = \frac{\beta^2 - 1}{\alpha + \beta},$$
 (42)

folgen. Einzellösungen des Systems (42) unter den Bedingungen aus (38') sind nun leicht zu finden. Wählt man z.B. $\mu=s=2$ und α ungerade, d.h. $\alpha=2\gamma-1$, so ist nach (42) $\beta=\gamma^2-3\gamma+1$ und $\lambda=\frac{1}{2}(\gamma-2)(\gamma-3)$. Dabei muss nach (38) $\gamma\geq 5$ sein. Es folgt

$$\frac{(2\gamma - 1) \cdot 2}{(\gamma^2 - 3\gamma + 1) \cdot 2} = \frac{2(\gamma^2 - 3\gamma + 1) \cdot 2 + 1}{\frac{1}{2}(\gamma - 2)(\gamma - 3)(2\gamma - 1) \cdot 2 + 1}.$$
 (38")

Hier ist $\mu | \beta s$ trivialerweise allgemein erfüllt. $2 = \mu < \lambda \land \lambda | \alpha s$ kann offenbar nur für endlich viele α erfüllt sein, hier für $\alpha_1 = 9$, $\beta_1 = 11$ mit $\lambda_1 = 3$ oder $\alpha_2 = 15$, $\beta_2 = 41$ mit $\lambda_2 = 15$. Damit erhält man die Darstellungen $\frac{9}{11} = \frac{18}{22} = \frac{2 \cdot 22 + 1}{3 \cdot 18 + 1}$ mit q = 6, r = 11, k = 5 sowie $\frac{15}{41} = \frac{30}{82} = \frac{2 \cdot 82 + 1}{15 \cdot 30 + 1}$ mit q = 2, r = 41, k = 11.

Nach Satz 3 führt die erste zu einem bereits bekannten Beispiel (g = 990), die zweite zu einem neuen:

$$\begin{aligned} &\text{([30], [902])}_{13530} = \left(\frac{\text{[902]}}{\text{[30]}}\right)_{13530} \text{ sowie ([82], [6765])}_{13530} = \left(\frac{\text{[6765]}}{\text{[82]}}\right)_{13530} \\ &\text{(gemeinsame Werte: } 30\frac{1}{15} \text{ bzw. } 82\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Unser Ziel ist es aber, unendlich viele α , β zu finden, die (38') erfüllen. Dazu bietet sich an, möglichst schwache Teilbarkeitsbedingungen zu fordern, d.h. $\mu=2$ und $\lambda=3$ zu wählen.

Nach (41) folgt $k^2 - 1 = 6s^2$ mit ungeradem k, etwa k = 2m - 1, und daraus $2m(m-1) = 3s^2$ mit geradem s ($s = 2\sigma$). Damit ist die erste Bedingung $\mu | \beta s$ bereits erfüllt. Wir erhalten

$$3\sigma^2 = \frac{1}{2}m(m-1). (43)$$

Aus (40) folgt $m = \frac{1}{2}(\alpha - 4\sigma + 1) = \gamma - 2\sigma$ mit $\alpha = 2\gamma - 1$ (wegen ungeradem k und $\mu = 2$), also

$$3\sigma^2 = \frac{1}{2}(\gamma - 2\sigma)(\gamma - 2\sigma - 1). \tag{43'}$$

Wir zeigen zunächst, dass m aus (43) bzw. γ aus (43') stets ungerade ist.

Angenommen, es sei m = 2t:

Im Fall 3|2t-1 existiert dann ein ungerades l (l=2l'-1) mit 2t-1=3l. Es folgt t=3l'-1 und $\sigma^2=(3l'-1)(2l'-1)$ mit teilerfremden quadratischen Faktoren. Mit den Bezeichnungen $3l'-1=c^2$, $2l'-1=d^2$ folgt $2c^2-1=3d^2$ mit ungeradem d (d=2d'-1). Hieraus erhält man $c^2=2(3d'(d'-1)+1)$ mit ungeradem zweiten Faktor, was zum Widerspruch führt.

Im Fall 3|t|(t=3l) erhalten wir die Darstellung $\sigma^2=l(6l-1)$, wiederum mit teilerfremden quadratischen Faktoren (c^2,d^2) . Es folgt $6c^2-1=d^2$ mit ungeradem d (d=2d'-1) und hieraus $3c^2=2d'(d'-1)+1$, wobei aber d'(d'-1) nur die Reste 0 oder 2 mod 3 annehmen kann, was erneut zum Widerspruch führt.

m ist also ungerade. Mit m = 2t + 1 ergibt sich daher aus (43)

$$3\sigma^2 = (2t+1)t\tag{44}$$

bzw. aus (43') mit $\gamma = 2\delta + 1$:

$$3\sigma^2 = (2\delta - 2\sigma + 1)(\delta - \sigma). \tag{44'}$$

Die folgende Tabelle gibt die ersten acht Werte für t, m, σ an, die (44) bzw. (43) erfüllen.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
t_n	1	12	121	1200	11881	117612	1164241	11524800
m_n	3	25	243	2401	23763	235225	2328483	23049601
σ_n	1	10	99	980	9701	96030	950599	9409960

Tabelle 2

Es lassen sich folgende Vermutungen beweisen:

$$t_{n+1} - \sigma_{n+1} = t_n + \sigma_n; \quad m_{n+1} - 2\sigma_{n+1} = m_n + 2\sigma_n,$$
 (45)

$$\sigma_{n+1} = 5\sigma_n + 4t_n + 1 = 5\sigma_n + 2m_n - 1,\tag{46}$$

$$t_{n+1} = 6\sigma_n + 5t_n + 1; \quad m_{n+1} = 12\sigma_n + 5m_n - 2,$$
 (47)

$$\sigma_1 = 1, \ \sigma_2 = 10, \ \sigma_{n+2} = 10\sigma_{n+1} - \sigma_n,$$
 (48)

$$t_1 = 1$$
, $t_2 = 12$, $t_{n+2} = 10t_{n+1} - t_n + 2$;

$$m_1 = 3, m_2 = 25, m_{n+2} = 10m_{n+1} - m_n - 4,$$
 (49)

$$\sigma_{2n} = 2(4t_n + 1)\sigma_n = 2(2m_n - 1)\sigma_n,\tag{50}$$

$$t_{2n} = 4(2t_n + 1)t_n; \quad m_{2n} = (2m_n - 1)^2.$$
 (51)

Es lässt sich zeigen, dass damit die Lösungen von (43) bzw. (44) vollständig erfasst werden. Außerdem gilt nach (46) und (44)

$$\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = 5 + \frac{4t_{n+1}}{\sigma_n} = 5 + \sqrt{3} \cdot \frac{4t_{n+1}}{\sqrt{t_n(2t_n+1)}} = 5 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{8 + \frac{1}{t_n(2t_n+1)}}$$

mit $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = 5 + \sqrt{24}$, so dass für σ_n – wie nach der Rekursionsformel (48) zu erwarten war – nach Berücksichtigung eines normierenden Faktors (vgl. n=1) eine BINET-Formel entsteht:

$$\sigma_n = \frac{1}{2\sqrt{24}} \cdot \left(\left(5 + \sqrt{24} \right)^n - \left(5 - \sqrt{24} \right)^n \right).$$
 (52)

Wir kommen nun auf die zweite Teilbarkeitsbedingung $\lambda | \alpha s$ mit $\lambda = 3$, $\alpha = 2\gamma - 1 = 4\delta + 1$, $s = 2\sigma$ zurück. Sie ist genau dann erfüllt, wenn 3 Teiler von σ oder Teiler von $4\delta + 1$ ist.

Zum Fall $3|\sigma$: Nach Tabelle 2 ist $\sigma_3 \equiv 0 \mod 3$, $\sigma_6 \equiv 0 \mod 3$, und allgemein führt $\sigma_{3n'} \equiv 0 \mod 3$ zu $\sigma_{3(n'+1)} \equiv 0 \mod 3$ wegen $\sigma_{3(n'+1)} \equiv \sigma_{3n'+2} - \sigma_{3n'+1} \equiv \sigma_{3n'+1} - \sigma_{3n'+1} - \sigma_{3n'} \equiv 0 \mod 3$ nach (48). Aus $\sigma_{3n'} \equiv 0 \mod 3$ folgt nach (48) andererseits $\sigma_{3n'-1} \equiv \sigma_{3n'-2} \mod 3$, wobei der Rest 0 nicht angenommen wird, weil sonst alle σ_n durch 3 teilbar wären im Widerspruch zu $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 10$. Es gilt also $3|\sigma_n$ genau dann, wenn 3|n.

Zum Fall $3|4\delta + 1$: Aus (44) und (44') ergibt sich $\delta = \sigma + t$ und daher $4\delta + 1 = 4\sigma + 4t + 1$. Indiziert man die rechte Seite mit n, so gelangt man gemäß (46) und (48) zu den äquivalenten Bedingungen $3|\sigma_{n+1} - \sigma_n$ und $3|\sigma_{n+2}$.

Insgesamt ist – in indizierter Schreibweise – die zweite Teilbarkeitsbedingung $\lambda | \alpha_n s_n$ mit $\lambda = 3$ daher genau dann erfüllt, wenn $n \not\equiv 2 \mod 3$ ist. Dabei ist $k_n = 2m_n - 1 = 4t_n + 1$, also nach (50)

$$k_n = \frac{\sigma_{2n}}{2\sigma_n},\tag{53}$$

und wegen $\mu = 2$, $s_n = 2\sigma_n$ gilt für α_n nach (40), (46): $\alpha_n = k_n + 4\sigma_n = 4t_n + 1 + 4\sigma_n$ bzw.

$$\alpha_n = \sigma_{n+1} - \sigma_n. \tag{54}$$

Daraus folgt für β_n im Hinblick auf (39') wegen $\lambda - \mu = 1$:

$$\beta_n = \sigma_{n+1} + \sigma_n. \tag{55}$$

Die "quasi-reziproke" Gleichung (38') ist daher für $s_n = 2\sigma_n$ und α_n , β_n aus (54) und (55) erfüllt, und für $n \not\equiv 2 \mod 3$ sind die geforderten Teilbarkeitsbedingungen – trivial: $2|(\sigma_{n+1} + \sigma_n)2\sigma_n$, nichttrivial: $3|(\sigma_{n+1} - \sigma_n)2\sigma_n$ – garantiert:

$$\frac{(\sigma_{n+1} - \sigma_n) \cdot 2\sigma_n}{(\sigma_{n+1} + \sigma_n) \cdot 2\sigma_n} = \frac{2(\sigma_{n+1} + \sigma_n)2\sigma_n + 1}{3(\sigma_{n+1} - \sigma_n)2\sigma_n + 1},\tag{56}$$

wobei $\frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{\sigma_{n+1} + \sigma_n}$ ein vollständig gekürzter Bruch ist, der mit $\frac{\sigma_{2n}}{2\sigma_n}$ zum Bruch auf der rechten Seite von (56) erweitert wird. Weiterhin gilt nach (37') $g_n = b_n(2b_n + 1)$ bzw. (u.a. nach (55))

$$g_n = (\sigma_{n+1} + \sigma_n) \cdot 2\sigma_n \cdot \left(4(\sigma_{n+1} + \sigma_n)\sigma_n + 1\right) \tag{57}$$

mit $g_1 = 990 = 99 \cdot 10$, $g_2 = 9506980 = 9701 \cdot 980$, so dass man – vgl. Tabelle 2 – folgenden vereinfachten Ausdruck für g_n vermuten kann:

$$g_n = \sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}. \tag{58}$$

Zum Nachweis greift man auf die Beziehungen (44), (46), (50) und (51) zurück und stellt fest, dass die rechten Seiten von (57) und (58) mit $5\sigma_{2n}^2 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_{4n}$ übereinstimmen.

Schließlich sind noch $a_n^2 + q_n$, $b_n^2 + r_n$ zu bestimmen:

$$a_n^2 + q_n = \frac{q_n}{a_n} \cdot g_n = \frac{1}{3} g_n = \frac{1}{3} \cdot \sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}; \quad b_n^2 + r_n = \frac{r_n}{b_n} \cdot g_n = \frac{1}{2} g_n = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}.$$

Insgesamt gilt nach Satz 3:

Satz 4. Es gibt unendlich viele g-adische Systeme mit 1/1-Darstellungen. Dazu gehören $g_n = \sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}$, σ_n aus (52), $n \not\equiv 2 \mod 3$, mit den Darstellungen

$$\left((\sigma_{n+1} - \sigma_n) \cdot 2\sigma_n, \frac{1}{3}\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n} \right)_{\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}} = \left(\frac{\frac{1}{3}\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}}{(\sigma_{n+1} - \sigma_n) \cdot 2\sigma_n} \right)_{\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}}$$
(59)

gemeinsamer Wert: $(\sigma_{n+1} - \sigma_n)2\sigma_n \frac{1}{3}$

$$\left((\sigma_{n+1} + \sigma_n) \cdot 2\sigma_n, \frac{1}{2}\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n} \right)_{\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}} = \left(\frac{\frac{1}{2}\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}}{(\sigma_{n+1} + \sigma_n) \cdot 2\sigma_n} \right)_{\sigma_{2n+1} \cdot \sigma_{2n}}$$
(60)

gemeinsamer Wert: $(\sigma_{n+1} + \sigma_n)2\sigma_n \frac{1}{2}$.

Beispiele (zu (56) und Satz 4):

$$n = 1: \frac{9 \cdot 2 \cdot 1}{11 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 1 + 1}{3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 1 + 1} \quad (k_1 = 5),$$

$$([18], [330])_{990} = \left(\frac{[330]}{[18]}\right)_{990} = 18\frac{1}{3}; ([22], [495])_{990} = \left(\frac{[495]}{[22]}\right)_{990} = 22\frac{1}{2};$$

$$n = 3: \frac{881 \cdot 2 \cdot 99}{1079 \cdot 2 \cdot 99} = \frac{2 \cdot 1079 \cdot 2 \cdot 99 + 1}{3 \cdot 881 \cdot 2 \cdot 99 + 1} \quad (k_3 = 485),$$

$$([174438], [30428673990])_{91286021970} = \left(\frac{[30428673990]}{[174438]}\right)_{91286021970} = 174438\frac{1}{3},$$

$$([213642], [45643010985])_{91286021970} = \left(\frac{[45643010985]}{[213642]}\right)_{91286021970} = 213642\frac{1}{2};$$

$$n = 4: \frac{8721 \cdot 2 \cdot 980}{10681 \cdot 2 \cdot 980} = \frac{2 \cdot 10681 \cdot 2 \cdot 980 + 1}{3 \cdot 8721 \cdot 2 \cdot 980 + 1} \quad (k_4 = 4801).$$

Die Darstellungen gemäß Satz 4 sollen hier übergangen werden.

2.3.2 g-adische Systeme mit 1/2-Darstellungen⁴

Es gilt also unendlich viele g_n zu finden mit

$$g_n = \frac{a_n^3}{q_n} + a_n (q_n < a_n, q_n | a_n^3) \quad \text{und} \quad g_n^2 = \frac{b_n^3}{r_n} + b_n (r_n < b_n, r_n | b_n^3).$$
 (61)

Hier führt die mit den Bedingungen konforme Spezialisierung $a_n = 2\alpha_n$, $q_n|4\alpha_n^2$, $b_n = 4\alpha_n^2$, $r_n = 2\alpha_n^2$ zu

$$\alpha_n^2 = \frac{1}{2} q_n (q_n - 1). \tag{62}$$

Die ersten Beispiele sind $1^2=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1$, $6^2=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 8$, $35^2=\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 49$, $204^2=\frac{1}{2}\cdot 289\cdot 288$. Wegen $q_n<2\alpha_n$ muss dabei aber nach (62) $q_n>2$ sein. Da (q_n) streng monoton wächst, ist n=1 $(q_1=2)$ auszuschließen. Es lässt sich nun zeigen, dass es unendlich viele solcher quadratischer Werte von arithmetischen Reihen gibt: Es gilt die Rekursionsformel $\alpha_{n+2}=6\alpha_{n+1}-\alpha_n$ und

$$\alpha_n = \frac{1}{2\sqrt{8}} \cdot \left(\left(3 + \sqrt{8} \right)^n - \left(3 - \sqrt{8} \right)^n \right), \quad q_n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{8\alpha_n^2 + 1} + 1 \right) \quad (n > 1). \quad (63)$$

Wegen $g_n = 2\alpha_n(2q_n - 1) = \alpha_{2n}$ erhält man schließlich

Satz 5. Es gibt unendlich viele g-adische Systeme mit 1/2-Darstellungen. Dazu gehören $g_n = \alpha_{2n}$, α_n aus (62) bzw. (63), n > 1, mit den Darstellungen

$$(2\alpha_n, q_n(2q_n - 1))_{\alpha_{2n}} = \left(\frac{q_n(2q_n - 1)}{2\alpha_n}\right)_{\alpha_{2n}} \quad (1 \text{ Nachkommastelle}), \tag{64}$$

$$\left(4\alpha_n^2, \left[\frac{\alpha_{2n}}{2}\right][0]\right)_{\alpha_{2n}} = \left(\frac{\left[\frac{\alpha_{2n}}{2}\right][0]}{4\alpha_n^2}\right)_{\alpha_{2n}} (2 \, Nachkommastellen). \tag{65}$$

Beispiele:

$$n = 2: ([12], [153])_{204} = \left(\frac{[153]}{[12]}\right)_{204} \left(\text{gemeinsamer Wert: } 12\frac{3}{4}\right),$$

$$([144], [102][0])_{204} = \left(\frac{[102][0]}{[144]}\right)_{204} \left(\text{gemeinsamer Wert: } 144\frac{1}{2}\right);$$

$$n = 3: ([70], [4950])_{6930} = \left(\frac{[4950]}{[70]}\right)_{6930} \left(\text{gemeinsamer Wert: } 70\frac{5}{7}\right),$$

$$([4900], [3465][0])_{6930} = \left(\frac{[3465][0]}{[4900]}\right)_{6930} \left(\text{gemeinsamer Wert: } 4900\frac{1}{2}\right).$$

⁴In diesem Abschnitt wird aus Platzgründen auf die Beweise verzichtet. Die Methoden ähneln denen in 2.3.1.

Bemerkung: Es lassen sich auch Einzelbeispiele mit 1/2-Darstellungen konstruieren, bei denen die zweite Nachkommastelle "besetzt" ist, z.B.

$$\begin{aligned} &([6214],[38614134])_{709906002} = \left(\frac{[38614134]}{[6214]}\right)_{709906002} \left(\text{gemeinsamer Wert:} 6214\frac{13}{239}\right), \\ &([38613796],[2100313][436865232])_{709906002} = \left(\frac{[2100313][436865232]}{[38613796]}\right)_{709906002} \\ &\left(\text{gemeinsamer Wert:} \ 38613796\frac{1}{338}\right). \end{aligned}$$

Ein Nachweis dafür, dass unendlich viele 1/2-Darstellungen mit "besetzten" zweiten Nachkommastellen existieren, konnte nicht geführt werden.

3 Weitere Fragen

zu Satz 3:

Gibt es M/N-Darstellungen mit (o.B.d.A.) $M \le N$ sowie $(M, N) \ne (1, 1), (1, 2)$? Gibt es insbesondere 2/2-Darstellungen und solche, die sich auf mehr als 2 Nachkommastellen $(n \ge 2)$ beziehen?

Gibt es ein praktikables Kriterium, das im Fall $g = \frac{a^3}{q} + a$ $(1 \le q < a, q | a^3)$ weitere Darstellungen ausschließt? (Vgl. die Ausführungen zu g = 10 in 1.)

zu 2.3.1:

Lassen sich aus (37) mit $q \nmid a \lor r \nmid b$ unendlich viele g mit 1/1-Darstellungen konstruieren? (Vgl. die Beispiele 520 und 5460 in Tabelle 1.)

Schreibt man (39) in der Form $(\beta - \alpha)h = (\lambda - \mu)s$ und vermeidet die Spezialisierung h = 1 (39'), so erhält man

$$k + \lambda s = \beta h$$
, $k + \mu s = \alpha h$, $k^2 - h = \mu \lambda s^2$, $\mu s = \frac{\alpha^2 h - 1}{\alpha + \beta}$, $\lambda s = \frac{\beta^2 h - 1}{\alpha + \beta}$.

Erreicht man auf diese Weise mithilfe der Variablen h einen größeren "Gestaltungsspielraum", um unendlich viele g mit 1/1-Darstellungen konstruieren zu können?

zu Satz 5:

Gibt es unendlich viele *g*-adische Systeme mit 1/2-Darstellungen und "besetzten" zweiten Nachkommastellen?

Stefan Deschauer
Technische Universität Dresden
Fachrichtung Mathematik
D-01062 Dresden, Deutschland
e-mail: Stefan.Deschauer@tu-dresden.de