

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 61 (2006)

Artikel: A short note on the Erdős-Debrunner inequality
Autor: Janous, Walther
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1182>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

A short note on the Erdős-Debrunner inequality

Walther Janous*

Walther Janous hat an der Universität in Innsbruck und an der Ohio State University in Columbus (USA) studiert. Seit 1978 arbeitet er als Gymnasialprofessor an einer Mädchenschule in Innsbruck. Neben seiner Lehrtätigkeit ist er auch im Betreuersteam der österreichischen Mathematikolympiade engagiert und mitverantwortlich für die „Wissenschaftlichen Nachrichten“, einem für österreichische Gymnasiallehrer herausgegebenen Organ.

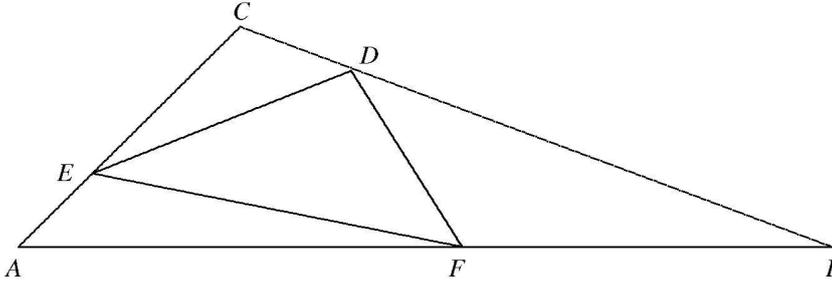
Introduction

Let ABC be an arbitrary triangle and D, E, F arbitrary points on sides BC, CA, AB , resp., all three being different from the vertices of ABC .

Then, triangle ABC is divided into four smaller triangles, a central one DEF , and three corner ones AEF, BDF, CED .

* This research is partially supported by grant 04-39-3265-2/03 (11.XII.2003) of the Federal Ministry of Education and Sciences, Bosnia and Herzegovina.

Ungleichungen, die verschiedene Elemente eines oder mehrerer Dreiecke in Beziehung zueinander setzen, haben in der mathematischen Literatur eine lange Tradition. Wegen ihrer Schönheit und den oft überraschenden Ideen dahinter treten sie häufig in den Aufgabenteilen vieler Zeitschriften und mitunter auch bei mathematischen Wettbewerben auf. Ein Beispiel eines derartigen Ergebnisses ist die in diesem Beitrag betrachtete auf P. Erdős und H. Debrunner zurückgehende Ungleichung, in der die Flächeninhalte von vier Teildreiecken eines beliebigen Ausgangsdreiecks verglichen werden. Im vorliegenden Beitrag wird der beste Exponent einer analogen Ungleichung, in der das Potenzmittel von drei der vier Flächeninhalte durch den vierten abgeschätzt wird, auf ein kleines Intervall eingegrenzt. Für den genauen Wert dieses Exponenten wird eine Vermutung aufgestellt.



Let F_1, F_2, F_3 be the areas of the three corner triangles and F_0 be the one of the central triangle. Then the *Erdős-Debrunner inequality* says

$$F_0 \geq \min(F_1, F_2, F_3), \quad (1)$$

where equality occurs if and only if D, E, F are the midpoints of the respective sides. See [1, p. 81] for an extensive list of references concerning this inequality; furthermore, the appropriate chapters in [3] and [4] report a host of results (and some of their proofs) related to two triangles, one inscribed in the other.

Speaking in the language of power-means, inequality (1) reads

$$F_0 \geq M_{-\infty}(F_1, F_2, F_3),$$

where the p -th power-mean of three positive real numbers x, y, z is defined by

$$M_p(x, y, z) = \begin{cases} \left(\frac{x^p + y^p + z^p}{3} \right)^{(1/p)} & p \neq 0, \\ \sqrt[3]{xyz} & p = 0. \end{cases}$$

Then, $M_p(x, y, z)$ is (weakly) increasing as p increases, and

$$M_{-\infty}(x, y, z) = \lim_{p \rightarrow -\infty} M_p(x, y, z) = \min(x, y, z).$$

Therefore, it is natural to ask whether or not there do exist inequalities of the type

$$F_0 \geq M_p(F_1, F_2, F_3), \quad (2)$$

where $p > -\infty$.

Subsequently, we will show that this is indeed so and we will give a bound for the maximum value p_{\max} of p . Thereby, we will also falsify a result stated and "proven" in [2]. At the end of this note, we shall state two conjectures for further research.

Bounds for p_{\max}

Before stating the announced result, we are going to introduce the method of proof frequently applied in situations as the present one.

Let BC, CA, AB be divided by D, E, F in ratios $t : (1-t), u : (1-u), v : (1-v)$, resp., where $0 < t, u, v < 1$. Then, we have

$$F_1 = (1-u) \cdot v \cdot F_\Delta, \quad F_2 = (1-v) \cdot t \cdot F_\Delta, \quad F_3 = (1-t) \cdot u \cdot F_\Delta,$$

where F_Δ denotes the area of triangle ABC . For this, note for instance for F_1 : $AF = v \cdot AB$, and $AE = (1-u) \cdot AC$. Therefore, $F_0 = F_\Delta - F_1 - F_2 - F_3$ becomes

$$F_0 = (t \cdot u \cdot v + (1-t) \cdot (1-u) \cdot (1-v)) \cdot F_\Delta.$$

Furthermore,

$$\frac{F_0}{F_1} = \frac{1-t-u-v+tu+tv+uv}{(1-u)v} = \frac{1-t}{v} + \frac{t}{1-u} - 1.$$

Since we get similar expressions for F_0/F_2 and F_0/F_3 , we introduce the notation

$$x = \frac{t}{1-u}, \quad y = \frac{u}{1-v}, \quad z = \frac{v}{1-t},$$

yielding

$$\frac{F_0}{F_1} = \frac{1}{z} + x - 1, \quad \frac{F_0}{F_2} = \frac{1}{x} + y - 1, \quad \frac{F_0}{F_3} = \frac{1}{y} + z - 1.$$

We now show that p has to be negative for inequality (2) to hold in general. Indeed, let $p = 0$. Then, for (2) the inequality $F_0/F_1 \cdot F_0/F_2 \cdot F_0/F_3 \geq 1$ had to be valid. But $t = 1/2$, $u = 1/3$ and $v = 2/3$ lead to the contradiction $8/9 \geq 1$.

Therefore, we let $p = -q$, where $q > 0$, and thus, obtain for (2) the equivalent inequality

$$F_1^{-q} + F_2^{-q} + F_3^{-q} \geq 3 \cdot F_0^{-q},$$

i.e.,

$$\left(\frac{F_0}{F_1}\right)^q + \left(\frac{F_0}{F_2}\right)^q + \left(\frac{F_0}{F_3}\right)^q \geq 3,$$

hence,

$$\left(\frac{1}{z} + x - 1\right)^q + \left(\frac{1}{x} + y - 1\right)^q + \left(\frac{1}{y} + z - 1\right)^q \geq 3, \quad (3)$$

where of course $x, y, z > 0$ have to satisfy

$$\frac{1}{z} + x - 1 \geq 0, \quad \frac{1}{x} + y - 1 \geq 0, \quad \frac{1}{y} + z - 1 \geq 0.$$

We are now in the position to state and prove the following

Theorem. *The quantity p_{\max} in inequality (2) satisfies*

$$-1 \leq p_{\max} \leq -\frac{\ln(3/2)}{\ln(2)}.$$

Proof. In order to prove this assertion, we have to show that the minimal value q_{\min} such that inequality (3) holds true in general, fulfils $\ln(3/2)/\ln(2) \leq q_{\min} \leq 1$.

i) Case $q_{\min} \leq 1$: Indeed, inequality (3) becomes for $q = 1$

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + z + \frac{1}{z} \geq 6.$$

But this inequality follows from $t + 1/t \geq 2$, whenever $t > 0$.

ii) Case $q_{\min} \geq \ln(3/2)/\ln(2)$: We let $t = 1/2$, and $v = 1 - u$ ($0 < u < 1$). Then, we find

$$\frac{F_0}{F_1} = \frac{u}{1-u}, \quad \frac{F_0}{F_2} = \frac{F_0}{F_3} = 2(1-u),$$

whence inequality (3) reads

$$\left(\frac{u}{1-u}\right)^q + 2 \cdot (2(1-u))^q \geq 3$$

with $0 < u < 1$. Since the expression on the left-hand side of this inequality is continuous as $u \rightarrow 0$, we arrive at $2 \cdot 2^q \geq 3$, which completes the proof of the theorem. \square

Remark. In [2] it is "shown" by an erroneous argument that p_{\max} equals $-1/3$ contradicting the inequality $p_{\max} \leq -\ln(3/2)/\ln(2) = -0.58\dots$

Two conjectures

At the end of this note we state two conjectures. (The second of them is very likely to be settled by non elementary means only.)

Conjecture 1. Let x , y and z be positive real numbers such that $1/z + x - 1 \geq 0$, $1/x + y - 1 \geq 0$ and $1/y + z - 1 \geq 0$. Then, for any $q > 0$ the minimum of the left-hand expression in (3) is attained at x , y and z satisfying $x \cdot y \cdot z = 1$.

Conjecture 2. In the above theorem, the equality $p_{\max} = -\ln(3/2)/\ln(2)$ holds true.

References

- [1] Bottema, O. et al.: *Geometric Inequalities*. Wolters and Noordhoff, Groningen 1969.
- [2] Mavlo, D.: Solution of Problem 4 (posed by himself) [in Bulgarian]. *Obuch. po matem. i inform.* XIV (1989) 3, 48–51.
- [3] Mitrović, D.S. et al.: *Recent Advances in Geometric Inequalities*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1989.
- [4] Mitrović, D.S. et al.: Addenda to the Monograph *Recent Advances in Geometric Inequalities*. I. *J. Ningbo Univ.* 4 (1991) 2, 79–145.

Walther Janous
 Ursulinengymnasium
 Fürstenweg 86
 A-6020 Innsbruck, Austria
 e-mail: walther.janous@tirol.com