Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 60 (2005)

Artikel: A short proof of the formula of Faà di Bruno
Autor: Spindler, Karlheinz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10195

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 60 (2005) 33 – 35
0013-6018/05/010033-3

© Swiss Mathematical Society, 2005

Elemente der Mathematik

A short proof of the formula of Faà di Bruno

Karlheinz Spindler

Karlheinz Spindler received his mathematical education at the Technische Hochschule Darmstadt. After obtaining his Ph.D. in mathematics, he spent two years as a visiting assistant professor at Louisiana State University in Baton Rouge (USA) and then worked for five years in the Flight Dynamics Department of the European Space Operations Centre (ESOC) in Darmstadt. At present, he teaches mathematics and data processing at the Fachhochschule Wiesbaden. His research interests include geometric methods in control theory and parameter estimation methods related to the study of dynamical systems.

While Leibniz' formula $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ for the higher-order derivatives of the *product* of two functions is common mathematical knowledge, its analogue for the *composition* of two functions is much less well known.

Formula of Faà di Bruno. *If f and g possess derivatives up to order n, then*

$$(f \circ g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \left(f^{(k)} \circ g\right) \left(\frac{g'}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{g''}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{g^{(n)}}{n!}\right)^{k_n}.$$

The formula is due to Francesco Faà di Bruno (see [1]) who lived from 1825 to 1888 and enjoys the rare (at least for mathematicians) distinction of being a Saint of the Catholic church (canonization in 1988 by Pope John Paul II). A proof using basic umbral calculus

Ableitungsregeln (etwa die Produktregel oder die Kettenregel) sind Formeln, die die Ableitung einer aus verschiedenen Einzelfunktionen zusammengesetzten komplizierteren Funktion durch die Ableitungen der Einzelfunktionen ausdrücken. Es liegt nahe, nach solchen Regeln auch für die höheren Ableitungen einer Funktion zu fragen. Die bekannte Leibnizsche Formel drückt etwa die höheren Ableitungen des Produktes zweier Funktionen durch die Ableitungen der einzelnen Faktoren aus. Eine – weit weniger bekannte – analoge Formel für die Verkettung zweier Funktionen wurde von dem italienischen Mathematiker Francesco Faà di Bruno entdeckt; für diese Formel wird in dem vorliegenden Artikel ein kurzer und elementarer Beweis angegeben.

was given by Steven Roman in [3] where also references to other approaches can be found; a derivation using Hirzebruch's m-sequences is given in [4]. In this paper we present a completely elementary (and extremely short) proof which requires almost no prerequisites and allows the formula of Faà di Bruno to be incorporated into undergraduate calculus courses. (Some uses of the formula are given in [2].)

Proof. A trivial induction shows that there are polynomials $P_{n,k}$ (where n is the number of variables of $P_{n,k}$) such that

$$(f \circ g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} (f^{(k)} \circ g) \cdot P_{n,k}(g', g'', \ldots, g^{(n)}) \qquad (\star)$$

for all f and g. In fact, the induction shows that these polynomials are recursively given by $P_{0,0}(x) = 1$ and $P_{n+1,k}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_1 \cdot P_{n,k-1}(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} \cdot (\partial_i P_{n,k})(x_1, \ldots, x_n)$, if we interpret $P_{n,0}$ and $P_{n,n+1}$ as zero, but this is irrelevant for our argument. What is important to realize from $(\star)$ is that $(f \circ g)^{(n)}(x_0)$ depends only on the values $g^{(k)}(x_0)$ and $f^{(k)}\big(g(x_0)\big)$ where $0 \le k \le n$; hence to establish the validity of the formula at any given point x_0, we may replace the given functions f and g with any functions F and G which have the same derivatives up to order n as f and g at $g(x_0)$ and x_0, respectively. Hence, it suffices to prove the formula of Faà di Bruno for polynomials! Assuming $x_0 = 0$ and $g(x_0) = 0$ without loss of generality, we may thus write $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ and $g(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$ where $a_k = f^{(k)}(0)/k!$ and $b_k = g^{(k)}(0)/k!$ for all k. In this case the formula to be proved reduces to the claim that the coefficient of x^n in the expansion of $f\big(g(x)\big)$ is

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k,\\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} a_k b_1^{k_1} b_2^{k_2} \cdots b_n^{k_n} .$$

But this is trivial! In fact, applying the multinomial formula

$$(X_1 + \cdots + X_n)^k = \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n}$$

with $X_k := b_k x^k$, we find

$$\begin{aligned} f\big(g(x)\big) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} b_1^{k_1} b_2^{k_2} \cdots b_n^{k_n} x^{k_1+2k_2+\cdots+nk_n} . \end{aligned}$$

References

[1] Faà di Bruno, F.: *Traité Elementaire du Calcul*. Gauthier-Villars, Paris 1869.

[2] Krantz, S.G.; Parks, H.R.: *A Primer of Real Analytic Functions*. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin 1992.

[3] Roman, S.: The Formula of Faà di Bruno. *Amer. Math. Monthly* 87 (1980), 805–809.

[4] Rabe von Randow: Über die Kettenregel n-ter Ordnung. *Math. Ann.* 192 (1971), 33–46.

Karlheinz Spindler
Fachbereich MNDU
Fachhochschule Wiesbaden
Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden, Germany
e-mail: `spindler@r5.mnd.fh-wiesbaden.de`