

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 60 (2005)  
  
**Rubrik:** Neue Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

## Neue Aufgaben

---

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2006 erbeten und können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH-5415 Nussbaumen

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse [h.widmer@alumni.ethz.ch](mailto:h.widmer@alumni.ethz.ch) eingereicht werden.

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 1221:** Es seien  $f$  und  $g$  zwei reelle im Intervall  $[a, b]$  differenzierbare Funktionen mit  $f(x) > g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ , und es sei  $c$  fest gewählt mit  $0 < c < b - a$ . Wir betrachten nun Flächen, die vom Graphen von  $f$ , vom Graphen von  $g$  und zwei zur  $y$ -Achse parallelen Geraden im Abstand  $c$  eingeschlossen werden.

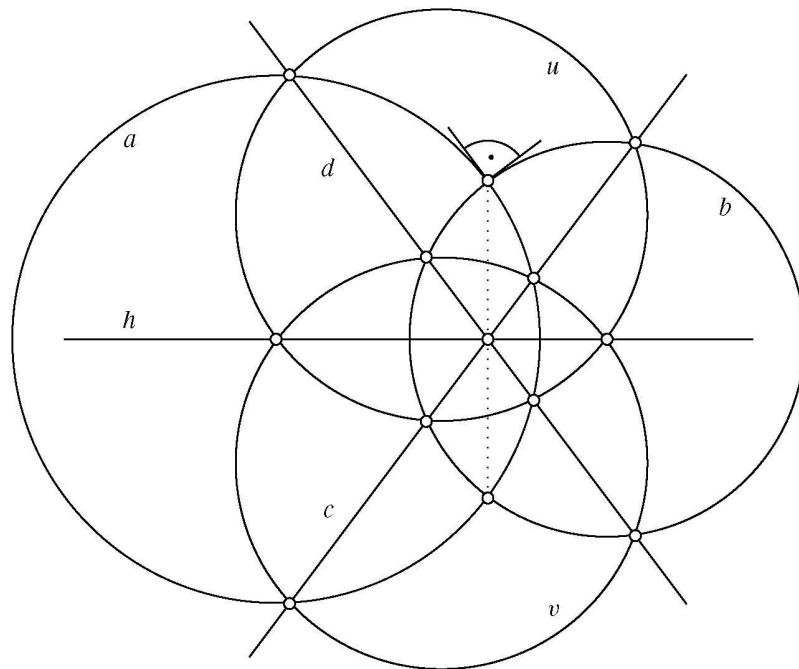
Was bedeutet es für den Inhalt einer solchen Fläche, wenn die Randstrecken auf den Parallelen gleich lang sind, und welche drei Fälle können dabei auftreten? Man finde auch ein Beispiel, bei welchem jeder Fall genau einmal auftritt, wobei die drei zugehörigen Flächen (inklusive Rand) paarweise disjunkt sein sollen.

Karl Wirth, Zürich, CH

**Aufgabe 1222:** Bestimme jene aus genau fünf Ziffern bestehenden Mengen  $M$ , die die Eigenschaft haben, dass die Aussage „Jede Quadratzahl  $1, 4, 9, \dots$  enthält mindestens eine Ziffer aus  $M$ “ wahr ist.

Peter Hohler, Aarburg, CH

**Aufgabe 1223 (Die einfache dritte Aufgabe):** Beweise die folgende Schliessungsfigur: Die Kreise  $a$  und  $b$  stehen zueinander senkrecht; die beiden Geraden  $c$  und  $d$  gehen durch den Mittelpunkt der gemeinsamen Sehne von  $a$  und  $b$  und liegen symmetrisch bezüglich der Zentralen  $h$ . Die Kreise  $u$  und  $v$  schneiden sich in den Zentren der Kreise  $a$  und  $b$ .



Roland Wyss, Flumenthal, CH

### Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2004

**Aufgabe 1209.** Es seien  $\omega_1, \omega_2$  von 0 verschiedene reelle Zahlen mit irrationalem Quotienten  $\omega_1/\omega_2$ .

Beweise: Zu jedem  $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$  gibt es eine Folge  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  reeller Zahlen derart, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\omega_1 \cdot \lambda_n) = x$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\omega_2 \cdot \lambda_n) = y$ .

Harald Merk, Biberach, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind sieben Lösungen zu dieser Aufgabe eingetroffen, nämlich von Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Zürich, CH) und Klaus Zacharias (Bergfelde, D)

Wir folgen der Lösung von *Stefan Grieder*, die weitgehend mit jener von *Jürgen Spilker* übereinstimmt: Es sei  $x \in [-1, 1]$ . Wir betrachten die Folge

$$a_\ell = \frac{\arcsin(x) + 2\ell\pi}{\omega_1}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

Für alle  $\ell \in \mathbb{N}_0$  gilt dann  $\sin(\omega_1 \cdot a_\ell) = x$ , und der erste Grenzwert ist gesichert.

Es folgt  $\omega_2 \cdot a_\ell = \underbrace{\frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \arcsin(x)}_z + \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot 2\ell\pi$ . Wegen der Irrationalität von  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  liegen die

Zahlen  $\left\{ \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \ell \right\}$  ( $\ell \in \mathbb{N}_0$ ) dicht im Intervall  $[0, 1]$ . Daraus folgt, dass die Zahlen

$$\omega_2 \cdot a_\ell \pmod{2\pi} = z + \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \ell \cdot 2\pi \pmod{2\pi}$$

dicht im Intervall  $[0, 2\pi]$  liegen. Also existiert zu gegebenem  $y$  eine Teilfolge  $\lambda_n = a_{\ell_n}$ , so dass

$$\sin(\omega_1 \lambda_n) = x \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\omega_2 \lambda_n) = y.$$

**Aufgabe 1210.** Wir betrachten normierte selbstreziproke Polynome  $p \in \mathbb{C}[z]$  vom Grad  $n$ :

$$p(z) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell z^\ell, \quad a_n = 1, \quad a_{n-\ell} = a_\ell \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Bestimme jene Polynome  $p$ , welche der Funktionalgleichung

$$p(1+z) + p(1-z) = p(z) + p(-z)$$

genügen und bei denen keine Nullstelle mit einer Nullstelle des selbstreziproken Polynoms  $q(z) = z^5 - \frac{5}{2}z^4 + z^3 + z^2 - \frac{5}{2}z + 1$  übereinstimmt.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind neun Lösungen eingegangen, nämlich von Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Oleg Faynshteyn (Leipzig, D), Friedhelm Götz (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH).

Wir folgen den Überlegungen von *Bernhard Ruh*: Das Polynom  $q$  besitzt die fünf Nullstellen

$$x_1 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = \frac{1}{2}.$$

Dabei sind  $x_1$  und  $x_2$  primitive sechste Einheitswurzeln, von denen zudem jede der Kehrwert der anderen ist:

$$x_1^6 = 1, \quad x_1^n \neq 1 \quad \text{für} \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad x_2 = \frac{1}{x_1}. \quad (1)$$

Ein Polynom  $p$  vom Grad  $n$  ist genau dann selbstreziprok, wenn es der Gleichung

$$p(z) = z^n \cdot p\left(\frac{1}{z}\right) \quad (2)$$

genügt. Aus der verlangten Beziehung

$$p(1+z) + p(1-z) = p(z) + p(-z)$$

folgen durch fortgesetztes Einsetzen von  $z = 0, 1, 2, \dots$  die Gleichheiten

$$p(0) = p(1), \quad p(-1) = p(2), \quad p(-2) = p(3), \dots$$

Weil die Eigenschaften einer Polynomfunktion durch endlich viele Punkte festgelegt sind, erfüllt  $p$  die Symmetrieeigenschaft

$$p\left(\frac{1}{2} + z\right) = p\left(\frac{1}{2} - z\right) \quad \text{bzw.} \quad p(z) = p(1-z). \quad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt  $p(x_1) = x_1^n \cdot p(x_2)$ , und aus (3) folgt  $p(x_1) = p(x_2)$ . Zusammen bedeutet das

$$p(x_1) = x_1^n \cdot p(x_1),$$

woraus aus (1) und wegen der gestellten Forderung  $p(x_1) \neq 0$  folgt, dass der Grad  $n$  des Polynoms  $p$  ein ganzzahliges Vielfaches von 6 sein muss.

Ist  $w_1 = w$  eine Nullstelle von  $p$ , so sind wegen (2) und (3) auch

$$w_2 = \frac{1}{w}, \quad w_3 = 1 - w, \quad w_4 = \frac{w-1}{w}, \quad w_5 = \frac{1}{1-w}, \quad w_6 = \frac{w}{w-1}$$

Nullstellen von  $p$ . Weitere Nullstellen treten nicht auf, weil die beiden Abbildungen  $z \mapsto \frac{1}{z}$  und  $z \mapsto 1 - z$  eine zur Diedergruppe  $\mathcal{D}_3$  isomorphe Gruppe der Ordnung 6 erzeugen.

Ist  $w_1$  keine Nullstelle von  $q$ , so sind auch  $w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$  keine Nullstellen von  $q$ . Die Bedingung, dass  $w_1$  nicht Nullstelle von  $q$  ist, ist notwendig und hinreichend dafür, dass die sechs Nullstellen  $w_i$  paarweise verschieden sind.

Somit haben die gesuchten Polynome die Teiler  $\prod_{j=1}^6 (z - w_j)$ , wobei die Bedingung

$$w_1 \notin \left\{ \frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, 2, \frac{1}{2} \right\} \cup \{0, 1\}$$

gelten muss. Mit dem Satz von Vieta erhält man für dieses Produkt

$$z^6 - 3z^5 + az^4 + (5 - 2a)z^3 + az^2 - 3z + 1, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{3}{4}, 6 \right\}.$$

Die gesuchten Polynome sind also genau die Produkte der Art

$$\prod_{\ell} \left( z^6 - 3z^5 + a_{\ell}z^4 + (5 - 2a_{\ell})z^3 + a_{\ell}z^2 - 3z + 1 \right), \quad a_{\ell} \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{3}{4}, 6 \right\}.$$

**Aufgabe 1211 (Die einfache dritte Aufgabe).** Die Quersumme einer Dezimalzahl  $\geq 10$  ist kleiner als diese Zahl. Beweise ein analoges Resultat für die höheren Potenzen: Es sei

$k > 1$ . Für die Zahl  $n$  mit der Dezimaldarstellung  $n = \sum_{\ell=0}^N z_\ell \cdot 10^\ell$  definiert man die verallgemeinerte Quersumme  $q_n^{(k)} := \sum_{\ell=0}^N z_\ell^k$ . Beweise, dass  $q_n^{(k)} < n$  für  $n \geq (k-1) \cdot 10^k$ .

Wie lässt sich die Aussage verallgemeinern, wenn man die Zifferndarstellung zu einer beliebigen Basis  $g \geq 2$  verwendet?

Jürgen Spilker, Freiburg, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind fünf Zuschriften eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Hans Egli (Zürich, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A).

Wir folgen *Stefan Grieder*: Es sei  $g \geq 2$ , und  $n$  sei eine  $N+1$ -stellige Zahl bezüglich der Basis  $g$ :

$$n = \sum_{\ell=0}^N z_\ell g^\ell, \quad \text{wobei } 0 \leq z_\ell \leq g-1 \quad (0 \leq \ell \leq N-1) \quad \text{und} \quad 0 < z_N \leq g-1.$$

Es sei  $q_g^{(k)}(n) = \sum_{\ell=0}^N z_\ell^k$  die verallgemeinerte Quersumme der Zahl  $n$ .

Wir zeigen: Ist  $k = 1$  und  $n \geq g$  oder  $k \geq 2$  und  $n \geq (k-1)g^k$ , dann gilt  $n > q_g^{(k)}(n)$ .

- Es sei zuerst  $k = 1$  und  $n \geq k$ . Dann gilt

$$n - q_g^{(1)}(n) = \sum_{\ell=0}^N z_\ell g^\ell - z_\ell = \sum_{\ell=1}^N z_\ell (g^\ell - 1) > 0,$$

weil wegen  $N \geq 1$  die Summe nicht leer und wegen  $z_N > 0$  positiv ist.

- Es sei  $k \geq 2$ ,  $g \geq 2$  und  $n \geq (k-1)g^k$ . Aus der letzten Bedingung folgt  $N \geq k$ , denn die Zahl  $n$  ist mindestens  $k+1$ -stellig. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $N > k$ : Die Zahl  $n$  ist mindestens  $k+2$ -stellig. Wir verkleinern  $n$  und nehmen nur die erste Ziffer, die wir als  $z_N = 1$  annehmen, während wir  $q_g^{(k)}(n)$  vergrößern, indem wir annehmen, dass alle Ziffern gleich  $g-1$  sind. Es gilt dann

$$\begin{aligned} n - q_g^{(k)}(n) &> g^N - (N+1)(g-1)^k \\ &= ((g-1)+1)^N - (N+1)(g-1)^k \\ &> (g-1)^N + N(g-1)^{N-1} - (N+1)(g-1)^k \\ &= (N+g-1)(g-1)^{N-1} - (N+1)(g-1)^k \geq 0. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde verwendet, dass  $N+g-1 \geq N+1$  und dass  $N-1 \geq k$  ist. In der zweitletzten Zeile wurden nur die ersten beiden der mindestens vier Summanden der Binomialreihe für  $((g-1)+1)^N$  benutzt.

- $N = k$ : Aus  $n \geq (k-1)g^k$  folgt  $z_k \geq k-1$ . In diesem Fall benützen wir für  $n$  nur die ersten zwei Ziffern, während wir wie im ersten Fall alle Ziffern von  $q_g^{(k)}(n)$  durch  $g-1$  ersetzen:

$$\begin{aligned}
 n - q_g^{(k)}(n) &> z_k g^k + z_{k-1} g^{k-1} - (z_k^k + z_{k-1}^k + (k-1)(g-1)^k) \\
 &= z_k ((g-1)+1)^k + z_{k-1} g^{k-1} + \dots \\
 &\quad - z_k^k - z_{k-1}^k - (k-1)(g-1)^k \\
 &> z_k (g-1)^k + z_k k (g-1)^{k-1} + z_{k-1} g^{k-1} + \dots \\
 &\quad - z_k^k - z_{k-1}^k - (k-1)(g-1)^k \\
 &= z_k \overbrace{(k(g-1)^{k-1} - z_k^{k-1})}^{>0} + z_{k-1} \overbrace{(g^{k-1} - z_{k-1}^{k-1})}^{>0} + \dots \\
 &\quad + \underbrace{(z_k - (k-1))(g-1)^k}_{\geq 0} \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Wiederum wurden bei der zweiten Abschätzung nur die ersten beiden Summanden der Binomialentwicklung berücksichtigt.

Nachtrag: In den Löserlisten im Heft 2 sind Hans Egli (Zürich, CH) und Beat Schweingruber (Zürich, CH) vergessen gegangen; Hans Egli hat Aufgabe 1208 gelöst, Beat Schweingruber hat alle drei Aufgaben gelöst.