

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 60 (2005)

**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

## Aufgaben

---

Lösungen sind bis zum 10. November 2005 erbeten und können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH-5415 Nussbaumen

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse [h.widmer@alumni.ethz.ch](mailto:h.widmer@alumni.ethz.ch) eingereicht werden.

### Neue Aufgaben

**Aufgabe 1218:** Alice und Bruno haben beide je einen Einfränkler und einen Zweifräenkler in ihren Hosentaschen. Beide klauben (wirklich) zufällig je eine Münze heraus und zeigen sie einander vor. Haben die vorgezeigten Münzen den gleichen Wert, wandert das Geld in die Taschen der beiden zurück; haben die Münzen verschiedene Werte, so wandern beide Münzen in die Tasche derjenigen Person, welche den Zweifräenkler vorgezeigt hat. Dann kann mit der neuen Ausgangslage nach denselben Regeln eine weitere Runde gespielt werden.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden Kinder nach  $n$  Runden den gleichen Geldbetrag in ihren Taschen, mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Alice nach  $n$  Runden einen grösseren Betrag als Bruno, und gegen welche Werte streben diese Wahrscheinlichkeiten für  $n \rightarrow \infty$  ?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Aufgabe 1219:** Im ebenen Gitter betrachten wir Minimalwege von  $(0, 0)$  nach  $(n, n)$ , welche mit dem Schritt  $(1, 0)$  starten und die Gerade  $y = x$  genau  $k$  Mal überqueren. Man bestimme für  $k = 1, 2, 3$  deren Anzahl  $a(n, k)$ .

Jany C. Binz, Bolligen, CH

**Aufgabe 1220 (Die einfache dritte Aufgabe):**

- Auf der Peripherie des Einheitskreises befindet sich das Zentrum eines zweiten Kreises. Wie gross muss dessen Radius  $\varrho$  sein, damit der Inhalt des innerhalb beider Kreise liegenden Flächenstückes halb so gross ist wie der Inhalt des Einheitskreises?

- b) Die Zweikreisfigur von Aufgabe a) rotiere jetzt um die Zentrale, so dass zwei sich durchdringende Kugeln entstehen. Wie gross muss der Radius  $\varrho$  jetzt sein, damit das Volumen des Durchdringungskörpers halb so gross ist wie das Volumen der Einheitskugel?

Walter Vetsch, St. Gallen, CH

### Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2004

**Aufgabe 1206.** Die Folge  $(a_n)$  sei durch die Startwerte  $a_1, a_2$  und die Rekursion  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) definiert. Berechne für  $n > 4$  – in Abhängigkeit der Startwerte – den Wert  $D_n(x)$  der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} & x \end{vmatrix}.$$

Hansjürg Stocker, Wädenswil, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 22 Zuschriften eingetroffen: Gerhard Bachmaier (Graz, A), Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Albert Ghensi (Zürich, CH), Friedhelm Götz (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Harald Merk (Biberach, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Caroline Ryser (Langenbruck, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Fritz Siegerist (Küschnacht, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen den Überlegungen von *Michael Vowe*: Für  $n = 5$  ist mit den beiden Startwerten  $a_1$  und  $a_2$  die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1 + a_2 \\ a_1 + 2a_2 & 2a_1 + 3a_2 & 3a_1 + 5a_2 \\ 5a_1 + 8a_2 & 8a_1 + 13a_2 & x \end{vmatrix}.$$

zu bestimmen. Sie hat den Wert

$$\begin{aligned} D_5(x) &= \tilde{D}_5(a_1, a_2, x) = 2(a_2^2 - a_1 a_2 - a_1^2)(13a_1 + 21a_2 - x) \\ &= 2(a_2^2 - a_1 a_2 - a_1^2)(a_1 f_7 + a_2 f_8 - x), \end{aligned}$$

wobei mit  $f_n$  die üblichen Fibonacci-Zahlen bezeichnet werden ( $f_1 = f_2 = 1$ ).

Weil die Substitution

$$a_1 \mapsto a_2, \quad a_2 \mapsto a_1 + a_2$$

beim Term  $a_2^2 - a_1 a_2 - a_1^2$  nur das Vorzeichen ändert und den Ausdruck  $a_1 f_n + a_2 f_{n+1}$  in  $a_1 f_{n+1} + a_2 f_{n+2}$  überführt, ergibt sich unter Berücksichtigung von  $\tilde{D}_{n+1}(a_1, a_2, x) = \tilde{D}_n(a_2, a_1 + a_2, x)$  sofort durch Induktion

$$D_n(x) = \tilde{D}_n(a_1, a_2, x) = (-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot (a_2^2 - a_1 a_2 - a_1^2)(a_1 f_{n+2} + a_2 f_{n+3} - x).$$

**Aufgabe 1207.** Beweise, dass für positive Zahlen  $x, y, z$  die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BIH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 24 Zuschriften eingetroffen: Lutz Andrews (Röthenbach, D), Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Oleg Faynshteyn (Leipzig, D), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Kee-Wai Lau (Hong Kong, China), Harald Merk (Biberach, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Fritz Siegerist (Küschnacht, CH), Christoph Soland (Belmont, CH), Eckard Specht (Magdeburg, D), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Im Wesentlichen zerfallen die Lösungen in zwei Gruppen: Entweder wird nach geschicktem Umordnen die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel dreier Zahlen verwendet, oder es wird die Konvexität gewisser passend konstruierter Funktionen ausgenützt.

Wir geben je eine typische Lösung. *Eckard Specht* und *Bernhard Ruh* argumentieren so:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} &= \frac{1}{3} \left( \frac{x}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{y}{z} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{z}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} \right) \\ &\geq \sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{zx}} + \sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}} \\ &= \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}} = \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}. \end{aligned}$$

Eine die zweite Lösungskategorie repräsentierende Lösung ist zu *Harald Merk* gelangt; vermutlich stammt sie von einem Mathematiker der Universität Bordeaux.

Durch Multiplizieren mit  $xyz$  erhält man die äquivalente Ungleichung

$$x^2z + y^2x + z^2y \geq x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{3}}z^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{5}{3}}. \quad (1)$$

Die Funktion

$$t \xrightarrow{f} x^{t+1} \cdot y^{2-2t} \cdot z^t + x^t \cdot y^{t+1} \cdot z^{2-2t} + x^{2-2t} \cdot y^t \cdot z^{t+1}$$

ist wie jede Funktion der Art

$$t \mapsto \sum_{\ell} c_{\ell} \lambda_{\ell}^t, \quad c_{\ell} > 0, \lambda_{\ell} > 0,$$

konvex. Aus der Konvexität folgt nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot f(0) + \frac{1}{3} \cdot f(1) + \frac{1}{3} \cdot f(1) &\geq f\left(\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1\right), \\ \frac{1}{3} (f(0) + 2 \cdot f(1)) &\geq f\left(\frac{2}{3}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Die Ungleichungen (1) und (2) stimmen aber überein.

**Aufgabe 1208 (Die einfache dritte Aufgabe).** Beweise: Ist  $x$  eine nicht-ganzzahlige reelle Zahl, so gilt

$$\frac{1}{\pi} \cdot \arctan(\cot(\pi \cdot x)) + x - \frac{1}{2} = [x].$$

Dabei bezeichnet  $[x]$  die grösste ganze Zahl  $\leq x$ .

Harald Merk, Biberach, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 22 Zuschriften eingegangen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Oleg Faynshteyn (Leipzig, D), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Caroline Ryser (Langenbruck, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Christoph Soland (Belmont, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Walter Vetsch (St. Gallen), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen *Albert Stadler*, dessen Lösung mit jener von *Christoph Soland* vollständig übereinstimmt, und deren Idee in fast allen Einsendungen auftritt: Weil in der Gleichung

$$\frac{1}{\pi} \cdot \arctan(\cot(\pi \cdot x)) = \frac{1}{2} + ([x] - x)$$

sowohl  $\cot(\pi \cdot x)$  als auch  $[x] - x$  Funktionen der Periode 1 sind, dürfen wir  $0 < x < 1$  annehmen, und wir müssen nur beweisen, dass

$$\frac{1}{\pi} \cdot \arctan(\cot(\pi \cdot x)) = \frac{1}{2} - x \quad \text{für } 0 < x < 1.$$

Nun ist  $\cot(\pi \cdot x) = \tan(\pi/2 - \pi \cdot x)$ , und mit

$$\frac{1}{\pi} \cdot \arctan(\cot(\pi \cdot x)) = \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(\tan(\pi/2 - \pi \cdot x)) = \frac{1}{2} - x$$

folgt die Behauptung. (Beim letzten Gleichheitszeichen wird die Voraussetzung  $0 < x < 1$  verwendet.)