

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 59 (2004)  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen erbeten bis zum 10. November 2004 an:

Hansruedi Widmer, Boldstrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

**Aufgabe 1206:** Die Folge  $(a_n)$  sei durch die Startwerte  $a_1, a_2$  und die Rekursion  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) definiert. Berechne für  $n > 4$  – in Abhängigkeit von den Startwerten – die Determinante

$$D_n(x) := \begin{vmatrix} a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} & x \end{vmatrix}.$$

Hansjürg Stocker, Wädenswil, CH

**Aufgabe 1207:** Beweise, dass für positive Zahlen  $x, y, z$  die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BIH

**Aufgabe 1208 (Die einfache dritte Aufgabe):** Beweise: Ist  $x$  eine nicht-ganzzahlige reelle Zahl, so gilt

$$\frac{1}{\pi} \cdot \arctan(\cot(\pi \cdot x)) + x - \frac{1}{2} = [x].$$

Dabei bezeichnet  $[x]$  die grösste ganze Zahl  $\leq x$ .

Harald Merk, Biberach, D

**Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2003**

**Aufgabe 1193.** Durch Hintereinanderschreiben der Glieder der rekursiv gegebenen Folgen

$$\begin{array}{lcl} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n & \text{und} & b_{n+2} = b_{n+1} + b_n \\ a_1 = a_2 = 1 & & b_1 = 1, \quad b_2 = 3 \end{array}$$

bilden wir die beiden nichtabbrechenden Dezimalzahlen

$$a = 0.112358111321 \dots \quad \text{und} \quad b = 0.134711182947 \dots$$

Man zeige, dass  $a$  und  $b$  irrational sind.

Ernst Herrmann, Siegburg, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 11 Zuschriften eingetroffen: Peter Bundschuh (Bonn, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Joachim Klose (Bonn, D), Stephan Kocher (Bern, CH), eine gemeinsame Lösung von Günter Köhler (Würzburg, D) und Jürgen Spilker (Freiburg, D), Harald Merk (Biberach, D), Daniel Neuenschwander (Bern, CH), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH).

Fast alle Einsender argumentieren wie *Gerhard Wanner* und benützen (oder beweisen) ein Ergebnis aus einem in den Elementen (Band 58, pp. 26–33) erschienenen Artikel von Jürgen Spilker: Folgen mit  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  besitzen die Eigenschaft, dass zu vorgegebener Ziffernzahl mindestens vier Folgenglieder existieren.

Wären  $a$  oder  $b$  rational, dann müsste der Dezimalbruch ab einer gewissen Ziffer periodisch werden, sagen wir mit Periode  $m$ . Liegen die vier  $a_\ell$ , welche  $m$  Ziffern besitzen, im periodischen Bereich, dann sind also alle vier identisch, was ein Widerspruch ist. Ansonsten muss man  $m$  verdoppeln, verdreifachen usw. bis der Widerspruch entsteht.

**Aufgabe 1194.** Bei einer Sportveranstaltung, an welcher  $n$  Sportler teilnehmen, werden die besten  $r$  Sportler ( $r \leq n$ ) in die Rangliste aufgenommen. Vorausgesetzt, dass die besten  $r$  Teilnehmer unterschiedlich gut abgeschnitten haben, gibt es  $n!/(n-r)!$  mögliche Ranglisten. Sind jedoch mehrere Teilnehmer ex aequo platziert, so werden die darauffolgenden Ränge nicht vergeben; bei  $r = 4$  Rängen sind die Rangfolgentypen 1111, 1114, 1133, 1134, 1222, 1224, 1233, 1234 möglich. Hingegen sind 1122 oder 1113 keine möglichen Rangfolgentypen.

Bestimme die Anzahl  $b(n, r)$  von möglichen Ranglisten.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 4 Zuschriften eingetroffen: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Fritz Siegerist (Meilen, CH).

*Bernhard Ruh* bestimmt zuerst die Anzahl der Ranglistentypen: Jedem Ranglistentyp mit  $r$  klassierten Personen entspricht bijektiv eine geordnete Partition der Zahl  $r$ . Beispielsweise entspricht (für  $r = 4$ ) der Partition  $1 + 3$  der Typ 1222 und der Partition  $2 + 1 + 1$

der Typ 1134. Diese Zahlen sind in der Literatur als geordnete Bellsche Zahlen  $B(r)$  bekannt. Sie können rekursiv mit

$$B(0) = 1, \quad B(r) = \sum_{\ell=0}^{r-1} \binom{r}{\ell} \cdot B(\ell)$$

oder mit der Summenformel

$$B(r) = \sum_{\ell=1}^r \ell! \cdot S(r, \ell),$$

wobei  $S(r, \ell)$  die Stirlingschen Zahlen zweiter Art bezeichnen, berechnet werden. Zudem treten sie auf als Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{2 - e^x} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B(r)}{r!} \cdot x^r.$$

Weil für  $n \geq r$  sich die  $r$  qualifizierten Sportler auf  $\binom{n}{r}$  Arten auswählen lassen, gibt es also

$$\binom{n}{r} \cdot B(r)$$

mögliche Ranglisten.

Walther Janous gibt mit

<http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html>

eine Quelle an, unter welcher sich so ziemlich alles Bekannte zu dieser Ranglistenfrage finden lässt.

Fritz Siegerist kritisiert, dass bei der Auswahl der Rangierten vorausgesetzt wird, dass sie besser sind als die Übrigen, dass sie aber unter sich gleich gut sein dürfen.

**Aufgabe 1196 (Die einfache (?) dritte Aufgabe).** In einem vom Wendepunkt verschiedenen Punkt  $A$  einer kubischen Parabel legen wir die Tangente  $t_A$ ; sie hat mit der Kurve noch einen weiteren Punkt  $B$  gemeinsam. Mit  $F_1$  bezeichnen wir den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das von der Kurve und  $t_A$  eingeschlossen wird. Im Punkt  $B$  legen wir nun die Kurventangente  $t_B$ , welche die kubische Parabel noch in  $C$  schneidet; das von der Kurve und  $t_B$  begrenzte endliche Flächenstück besitze den Inhalt  $F_2$ .

- Wie gross ist das Verhältnis  $F_1/F_2$ ?
- Wie lässt sich das Ergebnis auf Graphen von Polynomen vom Grad  $n > 3$  verallgemeinern?

Hans Rudolf Schneebeli, Wettingen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 10 Zuschriften eingegangen: Hans Egli (Zürich, CH), Stefan Gmünder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), André Kiener (Oberdorf, CH), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Hansjürg Stocker (Wädenswil, CH), Hansklaus Rummler (Freiburg, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Nicht alle Löser sind auf die Idee gekommen, bei Aufgabe b) die Tangente durch das Taylorpolynom vom Grad  $n - 2$  zu ersetzen.

Wir folgen der Lösung von *André Kiener*: Es sei  $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k \cdot x^k$  ein Polynom vom Grad  $n$ . Wir schreiben

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot (x-a)^k \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad \text{für} \quad k = 0, \dots, n.$$

Insbesondere ist  $\alpha_n = c_n$  und  $\alpha_{n-1} = c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot a$ .

Der Graph des Taylorpolynoms  $t_a(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k \cdot (x-a)^k$  schneidet den Graphen von  $f$  ausser an der Stelle  $a$  auch bei

$$b = a - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = a - \frac{c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot a}{c_n},$$

denn

$$f(x) - t_a(x) = (x-a)^{n-1}(\alpha_{n-1} + \alpha_n(x-a)).$$

Der Inhalt des endlichen Flächenstückes zwischen den Graphen von  $f$  und  $t_a$  misst also

$$\begin{aligned} F(a) &= \left| \int_a^b (f(x) - t_a(x)) \, dx \right| = \left| \alpha_{n-1} \cdot \frac{(b-a)^n}{n} + \alpha_n \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} \right| \\ &= \left| (b-a)^n \cdot \left( \frac{\alpha_{n-1}}{n} + \frac{\alpha_n}{n+1} \left( -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right) \right) \right| = \left| (b-a)^n \cdot \alpha_{n-1} \cdot \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right| \\ &= \left| \frac{(\alpha_{n-1})^{n+1}}{n(n+1)(\alpha_n)^n} \right| = \left| \frac{(c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot a)^{n+1}}{n(n+1)(c_n)^n} \right|. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{F(a)}{F(b)} &= \left| \frac{c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot a}{c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot b} \right|^{n+1} \\ &= \left| \frac{c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot a}{c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot a - n \cdot (c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot a)} \right|^{n+1} \\ &= \frac{1}{(n-1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Für  $n = 3$  ergibt sich  $\frac{F(a)}{F(b)} = \frac{1}{16}$ .