

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 57 (2002)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. August 2002 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

An diese Adresse sind auch Aufgabenvorschläge zu senden; momentan herrscht ein Mangel an neuen Aufgaben.

Aufgabe 1178: Jedes der $m \cdot n$ Einheitsquadrate eines $m \times n$ -Rechtecks wird schwarz oder weiss gefärbt. Zwei Färbungen gelten als äquivalent, wenn sie durch Achsen- oder Punktspiegelung oder durch Farbtausch auseinander hervorgehen. Man bestimme die Anzahl der verschiedenen Muster (Äquivalenzklassen).

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1179: ℓ Gefäße sind kreisförmig aufgestellt; eines enthält V_1 Liter Alkohol, die übrigen enthalten V_2, V_3, \dots, V_ℓ Liter Wasser. Beginnend mit dem Alkohol enthaltenden Gefäß werden nun mit einem Löffel a Liter Flüssigkeit ($a \leq V_1$) reihum von einem Gefäß ins nächste geleert, wobei jeweils gut umgerührt wird. Dieser Umläufigkeit wird beliebig fortgesetzt. Wie wird sich der Alkohol langfristig auf die ℓ Gefäße verteilen?

Ernst Herrmann, Siegburg, D

Aufgabe 1180 (Die einfache dritte Aufgabe): Es seien H der Höhenschnittpunkt und M_b der Mittelpunkt der Seite AC im Dreieck ABC . Die durch H gehende Normale der Geraden HM_b schneide die Seiten AB in E und BC in F . Zeige, dass H die Strecke EF halbiert.

Oleg Faynshteyn, Borsdorf, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2001

Aufgabe 1165. Wir vergleichen die Volumina folgender koaxialer Drehkörper:

- Zusammensetzung zweier Drehkegel mit Spitzen in $N(0, 0, 1)$ resp. in $S(0, 0, -1)$ und dem Kreis $k : x^2 + y^2 = 1, z = 0$ als gemeinsamer Grundfläche,
- Umkugel von a),
- Umzylinder von b),

- d) Umhyperboloid (mit gleichseitiger Hyperbel als Meridian) von c),
- e) Umzylinder von d).

Beim Vergleich der Resultate stellen wir eine störende Lücke fest. Gesucht ist ein schöner Lückenbüßer.

Hans Walser, Frauenfeld, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 12 Zuschriften eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Paul Frischknecht (Guntershausen, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Neuss, D), Volkhard Schindler (Berlin, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Da die Volumina $V_a = 2\pi/3$, $V_b = 4\pi/3$, $V_c = 6\pi/3$, $V_d = 8\pi/3$ und $V_e = 12\pi/3$ betragen, ist ein schöner Körper vom Volumen $V = 10\pi/3$ zu finden, der das Hyperboloid d) umhüllt und im Zylinder e) eingeschlossen ist. Alle unten erwähnten Körper haben die z-Achse als gemeinsame Achse, und durch Gleichungen beschriebene Meridiankurven sollen in der Ebene $y = 0$ liegen. Der Mantel des Hyperboloids d) wird dann erzeugt durch Rotation des in $|z| \leq 1$ gelegenen Teils der Hyperbel $x^2 - z^2 = 1$ um die z-Achse, und der Mantel des Zylinders e) kann durch $x^2 + y^2 = 2$ ($|z| \leq 1$) beschrieben werden.

Unsere Leser bieten die folgenden Lückenbüsser an:

- Das Hyperboloid, das durch Rotation des im Bereich $|z| \leq 1$ liegenden Teils der Hyperbel $2x^2 - z^2 = 3$ um die z-Achse erzeugt wird. (W. Burgherr, A. Calame, F. Götze, W. Janous, V. Schindler, F. Sigrist)
- Das Paraboloid, das durch Rotation des im Bereich $|z| \leq 1$ liegenden Teils der Parabel

$$z^2 = \frac{x - x_0}{\sqrt{2} - x_0} \quad \left(x_0 = \frac{\sqrt{20} - 1}{\sqrt{8}} \approx 1.2276 \right)$$

um die z-Achse erzeugt wird. (P. Bundschuh, V. Schindler)

- Die Zusammensetzung der beiden Kegelstümpfe mit gemeinsamer in der (x, y) -Ebene liegender Grundfläche $x^2 + y^2 = 4 - \sqrt{7}$, welche als Deckflächen die beiden auf den Höhen $z = \pm 1$ liegenden Kreise $x^2 + y^2 = 2$ besitzen. (M. Vowe)
- Die Zusammensetzung der beiden zur (x, y) -Ebene symmetrisch liegenden Kugelschichten, deren obere durch die Gleichung $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 2$ ($0 \leq z \leq 1$) gegeben ist. (F. Grupp, P. Frischknecht, D. Kaese, R. Wyss)
- Durch Rotation der Kurve mit der Gleichung $z^2 = (x^2 - 1)^4$ ($1 \leq x \leq \sqrt{2}$) um die z-Achse wird ein (namenloser) Körper mit den gewünschten Eigenschaften erzeugt. (F. Götze)
- Durch Rotation der Kurve mit der Gleichung

$$z^2 = \left(\frac{x - 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^\alpha \quad (|z| \leq 1)$$

um die z-Achse erhält man für $\alpha = 9 - 6\sqrt{2} + \sqrt{169 - 108\sqrt{2}}$ einen Körper mit den gewünschten Eigenschaften. (F. Götze)

Aufgabe 1166. $W_{m,n}$ sei die Menge aller minimalen Gitterwege w , die im ebenen Gitter von $(0,0)$ nach (m,n) führen ($m,n \geq 1$); ferner bezeichne $z(w)$ die Anzahl der Ecken (\sqcup, \sqcap) des Wegs w . Man bestimme $a(m,n) = \sum_{w \in W_{m,n}} z(w)$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Lösungen eingetroffen: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Neuss, D), Volkhard Schindler (Berlin, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser betrachten die Nachbarpunkte $P(m-1, n)$ und $Q(m, n-1)$ des Endpunktes (m, n) der Wege und gelangen mit der Überlegung

$$\begin{aligned} a(m, n) &= a(m-1, n) + a(m, n-1) \\ &\quad + \text{Anteil der Wege, die in } P \text{ vertikal enden} \\ &\quad + \text{Anteil der Wege, die in } Q \text{ horizontal enden} \end{aligned}$$

zur Rekursionsformel

$$a(m, n) = a(m-1, n) + a(m, n-1) + 2 \cdot \binom{m+n-2}{m-1},$$

welche dann zusammen mit den Randbedingungen $a(m, 1) = 2m$ und $a(1, n) = 2n$ nach einiger Rechnung zum Resultat

$$a(m, n) = \frac{2mn}{m+n} \cdot \binom{m+n}{m}$$

führt. *Roland Wyss* beschreitet einen anderen Weg: Codiert man die $\binom{m+n}{m}$ Minimalwege als $(0, 1)$ -Sequenzen mit m Nullen und n Einsen und schreibt die Codierungen der Grösse nach (im Sinne von Binärzahlen) untereinander (siehe Beispiel für $m = 3$ und $n = 2$),

0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0

so stehen in der ersten Spalte zuerst $\binom{m+n-1}{m-1}$ Nullen, darunter $\binom{m+n-1}{m}$ Einsen. In der zweiten Spalte kommen zuerst $\binom{m+n-2}{m-2}$ Nullen, darunter $\binom{m+n-2}{m-1}$ Einsen, dann $\binom{m+n-2}{m-1}$

Nullen und schliesslich $\binom{m+n-2}{m}$ Einsen. Im Spaltenpaar $(1, 2)$ zählt man also $\binom{m+n-2}{m-1} + \binom{m+n-2}{m-1} = 2 \cdot \binom{m+n-2}{m-1}$ Ecken, d.h. Wechsel 01 oder 10. Aus Symmetriegründen gilt dies für alle $m+n-1$ Spaltenpaare $(1, 2), (2, 3), \dots, (m+n-1, m+n)$. Für die gesamte Eckenzahl erhält man deshalb

$$a(m, n) = (m+n-1) \cdot 2 \cdot \binom{m+n-2}{m-1} = 2m \cdot \binom{m+n-1}{m} = \frac{2mn}{m+n} \cdot \binom{m+n}{m}.$$

Hans Egli und *Walther Janous* deuten die letzte Schreibweise des Resultates: Die mittlere Anzahl der Ecken ist gleich dem harmonischen Mittel $h = 2mn/(m+n)$ der beiden Zahlen m und n , und *Walther Janous* gelingt es sogar, die Varianz der Anzahl der Ecken zu bestimmen:

$$\sigma^2 = \frac{h \cdot (h-1)}{m+n-1}.$$

Aufgabe 1167 (Die einfache dritte Aufgabe). Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$s(j) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} (\alpha N + \beta k)^j.$$

Man bestimme die Werte von $s(j)$ für $0 \leq j \leq N$.

Walther Janous, Innsbruck, A

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 16 Zuschriften eingegangen: Ulrich Abel (Wettenberg, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), André Calame (Sauges, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Detlef Kaese (Neuss, D), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), H.J. Seiffert (Berlin, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Ulrich Abel, André Calame, Joachim Klose, Volkhard Schindler und *Roland Wyss* argumentieren wie folgt: Mit der binomischen Formel ergibt sich für $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} s(j) &= \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} (\alpha N + \beta k)^j \\ &= \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} \cdot \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} (\alpha N)^{j-\ell} (\beta k)^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} (\alpha N)^{j-\ell} \beta^\ell \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} k^\ell \\ &= (-1)^N \cdot N! \cdot \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} (\alpha N)^{j-\ell} \beta^\ell \cdot \sigma(\ell, N) \end{aligned}$$

mit den Stirling-Zahlen zweiter Art

$$\sigma(\ell, N) = \frac{(-1)^N}{N!} \cdot \sum_{k=0}^N (-1)^k \cdot \binom{N}{k} \cdot k^\ell.$$

Bekanntlich gilt $\sigma(\ell, N) = 0$ für $\ell < N$ und $\sigma(\ell, \ell) = 1$ für $\ell = 0, 1, 2, \dots$ Deshalb erhalten wir

$$s(j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq j \leq N-1, \\ (-\beta)^N \cdot N!, & \text{falls } j = N. \end{cases}$$

Darüber hinaus liefert unsere Formel wegen $\sigma(N+1, N) = \binom{N+1}{2}$ auch

$$\begin{aligned} s(N+1) &= (-1)^N \cdot N! \cdot \left[\binom{N+1}{N} (\alpha N)^1 \cdot \beta^N \cdot 1 + \binom{N+1}{N+1} (\alpha N)^0 \cdot \beta^{N+1} \binom{N+1}{2} \right] \\ &= (-\beta)^N \cdot \binom{N+1}{2} \cdot N! \cdot (2\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Die meisten anderen Einsender beschreiben einen Lösungsweg, der Entwicklungen der Exponentialfunktion enthält. *Gerhard Wanner* findet eine sehr elegante Variante: Er betrachtet die erzeugende Funktion

$$V(x) = \sum_{j=0}^{\infty} s(j) \cdot \frac{x^j}{j!}.$$

Die Werte $s(j)$ sind gerade die j -ten Ableitungen von V an der Stelle $x = 0$. In unserem Fall erhalten wir

$$V(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} \frac{(\alpha N + \beta k)^j x^j}{j!}.$$

Durch Vertauschen der Summationsreihenfolge ergibt sich

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((\alpha N + \beta k)x)^j}{j!} = \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} \cdot e^{(\alpha N + \beta k)x} \\ &= e^{\alpha Nx} \cdot \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} \cdot e^{\beta kx}, \end{aligned}$$

was sich mit dem binomischen Lehrsatz zu

$$V(x) = e^{\alpha Nx} \cdot (1 - e^{\beta x})^N = (e^{\alpha x}(1 - e^{\beta x}))^N$$

vereinfachen lässt. Weil diese Funktion an der Stelle $x = 0$ eine N -fache Nullstelle besitzt, sind alle Ableitungen $s(j) = 0$ für $0 \leq j \leq N-1$. Um $s(N)$ zu bestimmen, entwickeln wir V in eine Reihe: $V(x) = (-\beta)^N \cdot x^N + \dots$. Daraus ergibt sich der fehlende Wert $s(N) = (-\beta)^N \cdot N!$.