Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 57 (2002)

Artikel: De Hodge-Vermutung
Autor: Kurke, Herbert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7611

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 57 (2002) 127 – 132
0013-6018/02/030127-6

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2002

Elemente der Mathematik

Die Hodge-Vermutung

Herbert Kurke

1 Einführung

Bekanntlich ist eine geschlossene, orientierbare Fläche S homöomorph zu einer Sphäre mit g Henkeln, d.h. S lässt sich umkehrbar eindeutig und stetig auf eine Sphäre mit g Henkeln abbilden. Die natürliche Zahl g wird das Geschlecht von S genannt; es ist eine topologische Invariante der Fläche S. Dieses Ergebnis lässt sich mit Hilfe der singulären Homologietheorie auch algebraisch beschreiben. Ist N eine n-dimensionale, topologische Mannigfaltigkeit, d.h. N ist ein topologischer Hausdorff-Raum, der lokal zum $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist, so können wir N die *singulären Homologiegruppen* $H_k(N)$ $(k \in \mathbb{Z})$ zuordnen. Diese werden durch gewisse rationale Linearkombinationen k-dimensionaler Simplices, den sogenannten *geschlossenen k-Ketten*, erzeugt. Es stellt sich heraus, dass die Isomorphieklassen der $\mathbb{Q}$-Vektorräume $H_k(N)$ topologische Invarianten der Mannigfaltigkeit N sind. Im Spezialfall $N = S$ stellen wir $H_1(S)$ als $2g$-dimensional fest, was zur gewünschten algebraischen Interpretation des Geschlechts g führt.

Neben den Homologiegruppen $H_*(N) = H_*(N, \mathbb{Q})$ mit rationalen Koeffizienten werden dual dazu auch die Kohomologiegruppen $H^*(N) = H^*(N, \mathbb{Q})$ der Mannigfaltigkeit N betrachtet. Für einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum K, z.B. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, setzen wir weiter $H_*(N, K) := H_*(N) \otimes K$, $H^*(N, K) := H^*(N) \otimes K$. Die Homologie- bzw. Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in K besitzen dann folgende Eigenschaften:

(i) Es besteht die Gleichheit $H^*(N, K) = \mathrm{Hom}(H_*(N), K)$.

(ii) $H^*(N)$ besitzt die Struktur einer graduierten, assoziativen Algebra; das Produkt von α mit β ist durch das Cup-Produkt $\alpha \cup \beta$ gegeben. $H_*(N, K)$ besitzt die Struktur eines graduierten $H^*(N)$-Moduls; die Modulstruktur ist durch das Cap-Produkt $\cap$ gegeben.

(iii) Ist die n-dimensionale Mannigfaltigkeit N geschlossen und orientiert, so besitzt $H_n(N)$ ein kanonisches erzeugendes Element, die *Fundamentalklasse* $[N]$; weiter ist $H_k(N) = 0$ für $k < 0$ und $k > n$.

(iv) Poincaré-Dualität: Ist N wiederum geschlossen und orientiert, so besteht eine Isomorphie $H^k(N) \cong H_{n-k}(N)$, gegeben durch die Zuordnung $\alpha \mapsto \alpha \cap [N]$.

(v) Ist M eine geschlossene, orientierte, p-dimensionale Untermannigfaltigkeit von N, so induziert die Einbettung $i : M \to N$ einen Homomorphismus $i_* : H_p(M) \to H_p(N)$. Nach (iv) entspricht das Bild der Fundamentalklasse $i_*[M] \in H_p(N)$ einer

Kohomologieklasse in $H^{n-p}(N)$, welche wir mit $z(M)$ bezeichnen. Zwischen M und $z(M)$ besteht die Beziehung

$$(\alpha \cup z(M)) \cap [N] = i^*\alpha \cap [M] \qquad (\alpha \in H^p(N)).$$

Ist $K = \mathbb{R}$ und N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so lassen sich die Kohomologiegruppen $H^k(N, K)$ mit den de Rhamschen Kohomologiegruppen $H^k_{\mathrm{DR}}(N, \mathbb{R})$ identifizieren; diese werden durch glatte, geschlossene Differentialformen vom Grad k erzeugt. Legt man auf N noch eine Riemannsche Metrik fest, so besagt der Satz von Hodge, dass für geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeiten N jede Kohomologieklasse in $H^k_{\mathrm{DR}}(N, \mathbb{R})$ durch genau eine *harmonische* Differentialform repräsentiert werden kann.

Ist nun $N = X$ eine komplexe, projektiv algebraische Mannigfaltigkeit, d.h. X ist gegeben als Nullstellenmenge homogener Polynome in einem komplexen, projektiven Raum, so geht es bei der Hodge-Vermutung darum, diejenigen Kohomologieklassen $\gamma \in H^*(X)$ zu charakterisieren, die Kohomologieklassen von *algebraischen* Untervarietäten Y sind, d.h. für die $\gamma = z(Y)$ gilt, wobei Y durch polynomiale Gleichungen definiert ist.

Um die Hodge-Vermutung im vierten Abschnitt genau formulieren zu können, besprechen wir im nächsten Abschnitt zunächst den Begriff einer „Hodge-Struktur" und wenden diesen dann im dritten Abschnitt auf die Kohomologie von sogenannten „Kähler-Mannigfaltigkeiten" an.

2 Hodge-Strukturen

Eine reelle Hodge-Struktur vom Gewicht k auf einem endlich dimensionalen reellen Vektorraum H ist durch die folgenden, zueinander äquivalenten Daten gegeben:

(i) Eine Zerlegung von $H_{\mathbb{C}} = H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ in eine direkte Summe komplexer Unterräume $H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$ mit $H^{q,p} = \overline{H^{p,q}}$ (Hodge-Zerlegung).

(ii) Eine absteigende Filtrierung $\{F^p\}$ von $H_{\mathbb{C}}$ durch komplexe Unterräume F^p, d.h. $H_{\mathbb{C}} \supseteq \ldots \supseteq F^p \supseteq F^{p+1} \supseteq \ldots \supseteq \{0\}$, so dass F^p und $\overline{F^{k-p+1}}$ zueinander komplementäre Unterräume sind (Hodge-Filtrierung).

(iii) Eine rationale Darstellung der Gruppe $R = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \right\}$ auf H vom Gewicht k, d.h. ein Homomorphismus $\rho_H : R \to \mathrm{GL}(H)$ mit der Eigenschaft $\rho_H \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a^k \cdot \mathrm{id}$.

Die Äquivalenz von (i) mit (ii) ergibt sich aus $F^p = \bigoplus_{r \geq p} H^{r,s}$ bzw. $H^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}$. Die Äquivalenz von (i) mit (iii) ergibt sich aus der Tatsache, dass $H^{p,q}$ Eigenraum zum Charakter $z^p \overline{z}^q : R \to \mathbb{C}^*$ mit $z(g) = a + ib$, $\overline{z}(g) = a - ib$ ist.

Eine *Hodge-Struktur* vom Gewicht k ist eine reelle Hodge-Struktur H, in der ausserdem ein Gitter $H_{\mathbb{Z}} \subset H$, d.h. eine Untergruppe, die von einer Basis von H erzeugt wird, ausgezeichnet ist. *Morphismen* von Hodge-Strukturen H, H' sind $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $\varphi : H \to H'$ mit $\varphi(H_{\mathbb{Z}}) \subseteq H'_{\mathbb{Z}}$, die nach $\mathbb{C}$-linearer Fortsetzung die Hodge-Zerlegung erhalten, also $\varphi(H^{p,q}) \subseteq H'^{p,q}$ bzw. $\varphi \circ \rho_{H'} = \rho_H \circ \varphi$ erfüllen.

3 Kähler-Mannigfaltigkeiten und projektive algebraische Mannigfaltigkeiten

Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Die komplexe Struktur induziert rationale Darstellungen vom Gewicht 1 der Gruppe R (Abschnitt 2, (iii)) auf den Tangential- und Kotangentialräumen von X, als reelle glatte Mannigfaltigkeit aufgefasst, so dass $C = \varrho\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ der Multiplikation mit i entspricht. Daher wird eine Zerlegung des Raumes der glatten Differentialformen induziert, d.h.

$$A^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(X).$$

Bezeichnen $z = (z_1, \ldots, z_n)$ lokale holomorphe Koordinaten auf X, so ist eine (p,q)-Form η lokal gegeben durch

$$\eta = \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_p\le n \\ 1\le j_1<\ldots<j_q\le n}} f_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_q}(z,\bar z)\, dz_{i_1}\wedge\ldots\wedge dz_{i_p}\wedge d\bar z_{j_1}\wedge\ldots\wedge d\bar z_{j_q},$$

wobei $f_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_q}(z,\bar z)$ glatte, komplexwertige Funktionen sind.

Indem wir X als $2n$-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit auffassen, können wir X mit einer Riemannschen Metrik g versehen. Eine Metrik heisst *Kählersch*, wenn die Bilinearform $\omega(v,w) = g(Cv,w)$ alternierend und geschlossen ist, d.h. die Gleichung $d\omega = 0$ erfüllt; hierbei sind v, w Tangentialvektoren. Wir nennen ω eine *Kähler-Form* und das Paar (X,ω) eine *Kähler-Mannigfaltigkeit*, die Metrik ist dann $g(v,w) = \omega(v,Cw)$.

Ein wichtiges Beispiel ist der komplexe projektive Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ versehen mit der Fubini-Study-Metrik $\|\cdot\|$; in diesem Fall gilt

$$\omega = \frac{i}{2\pi}\cdot\partial\bar\partial\log\left(\frac{\|z\|^2}{|z_0|^2}\right)$$

für $z = (z_0 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ mit $z_0 \neq 0$. Die Fubini-Study-Metrik induziert auf jeder komplexen Untermannigfaltigkeit $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ eine Kähler-Metrik, so dass all diese Kähler-Mannigfaltigkeiten sind. Nach einem Satz von W.L. Chow sind die abgeschlossenen, analytischen Untervarietäten von $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ genau die glatten, algebraischen Untervarietäten von $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (siehe [6]).

Jede Kähler-Metrik einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit (X,ω) definiert nicht verschwindende Kohomologieklassen

$$[\omega^k] \in H^{2k}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{R}) \quad (k = 1,\ldots,\dim(X)).$$

Wenn $[\omega] \in H^2(X,\mathbb{Q})$ ist, so heisst (X,ω) eine *Hodge-Mannigfaltigkeit*. Dies ist z.B. für projektiv algebraische Mannigfaltigkeiten der Fall; daher taucht für den projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ in der Formel für ω der Normierungsfaktor $1/\pi$ auf. Nach dem Einbettungssatz von Kodaira gilt nun auch die Umkehrung: Wenn für eine geschlossene Kähler-Mannigfaltigkeit (X,ω) die Klasse $[\omega]$ rational ist, d.h. $[\omega] \in H^2(X,\mathbb{Q})$ gilt, so besitzt X

eine projektive Einbettung, so dass ein Vielfaches $k \cdot [\omega]$ von $[\omega]$ die Fubini-Study-Klasse enthält.

Das Besondere im Falle von kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten (X, ω) ist das folgende: Definiert man den Operator L durch $L(\alpha) := \omega \wedge \alpha$ und bezeichnet mit Λ den zu L (punktweise) adjungierten Operator, so zeigt sich, dass im Kählerschen Fall der Laplace-Operator Δ (ein natürlicher Differentialoperator 2. Ordnung) sowohl mit den Operatoren L und Λ als auch mit der Operation der Gruppe R aus Abschnitt 2 vertauscht. Als Folge daraus erhält man für kompakte, n-dimensionale Kähler-Mannigfaltigkeiten:

(i) $H^k(X, \mathbb{R})$ besitzt eine kanonische Hodge-Strukur vom Gewicht k, d.h. $H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$, wobei die Räume $H^{p,q}(X)$ durch gewisse (p, q)-Formen erzeugt werden.

(ii) Die Kähler-Form ω induziert zueinander adjungierte Operatoren L bzw. Λ auf $H^*(X, \mathbb{R})$ vom Grad 2 bzw. -2 (genauer: $L \in \mathrm{Hom}(H^k(X, \mathbb{R}), H^{k+2}(X, \mathbb{R}))^{(1,1)}$ bzw. $\Lambda \in \mathrm{Hom}(H^k(X, \mathbb{R}), H^{k-2}(X, \mathbb{R}))^{(-1,-1)}$).

(iii) Durch die Zuordnung

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix} \mapsto a\Pi + b\Lambda + cL \quad (\text{mit } \Pi = (k-n) \cdot \mathrm{id} \text{ auf } H^k(X, \mathbb{R}))$$

wird $H^*(X, \mathbb{R})$ zu einer Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

(iv) Die Abbildung $H^k(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{L} H^{k+2}(X, \mathbb{R})$ ist injektiv für $k \leq n-1$ und surjektiv für $k \geq n-1$; die Abbildung $H^{p,q}(X) \xrightarrow{L} H^{p+1,q+1}(X)$ ist injektiv für $p+q \leq n-1$ und surjektiv für $p+q \geq n-1$.

(v) Harter Lefschetz-Satz: Die Abbildung $H^{n-k}(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{L^k} H^{n+k}(X, \mathbb{R})$ ist ein Isomorphismus.

4 Die Hodge-Vermutung

4.1 Zyklenabbildung, Niveau-Filtrierung

Es sei X wiederum eine n-dimensionale, komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subseteq X$ eine analytische Untervarietät der Kodimension $\mathrm{kodim}(Y, X) = n - \dim(Y) = p$. Die Untervarietät Y definiert nach dem im ersten Abschnitt Gesagten eine Kohomologieklasse $z(Y) \in H^{2p}(X)$. Weiter besteht eine exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H^k(Y) \longrightarrow H^{k+2p}(X) \longrightarrow H^{k+2p}(X \setminus Y) \longrightarrow \ldots$$

Die *Niveau-Filtrierung* $N^pH^*(X)$ von $H^*(X)$ wird dann durch

$$N^pH^*(X) = \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ \mathrm{kodim}(Y,X) \geq p}} \mathrm{Ker}\,(H^*(X) \longrightarrow H^*(X \setminus Y))$$

definiert. Sie ist über $\mathbb{Q}$, ja sogar über $\mathbb{Z}$, definiert; daher gilt $N^pH^*(X, K) = N^pH^*(X) \otimes K$ für $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Es lässt sich nun zeigen, dass die Niveau-Filtrierung feiner als die Hodge-Filtrierung ist, d.h. es besteht die Inklusion

$$N^pH^*(X, \mathbb{C}) \subseteq F^pH^*(X) = \bigoplus_{r \geq p} H^{r,s}(X).$$

Weiter stellt man $N^pH^m(X,\mathbb{Q}) = 0$ für $m < 2p$ fest; damit erhalten wir für $k \geq 0$

$$N^pH^{2p+k}(X,\mathbb{C}) \subseteq H^{p,p+k}(X) \oplus H^{p+1,p-1+k}(X) \oplus \cdots \oplus H^{p+k,p}(X)\,.$$

Speziell erkennen wir $z(Y)$ als ein Element von $H^{2p}(X,\mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X)$.

4.2 Hodge-Vermutung

Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subseteq X$ eine analytische Untervarietät, so haben wir soeben festgestellt, dass $z(Y) \in H^{2p}(X,\mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X)$ gilt. Die populäre Form der Hodge-Vermutung ist nun die Umkehrung diese Sachverhalts (siehe [4]):

Hodge-Vermutung: Der Durchschnitt $H^{2p}(X,\mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X)$ wird durch die Kohomologieklassen $z(Y)$, die zu algebraischen Untervarietäten $Y \subseteq X$ gehören, erzeugt.

Die von Hodge 1950 formulierte Vermutung wurde 1969 durch A. Grothendieck präzisiert (siehe [3]):

Allgemeine Hodge-Vermutung: Für $m \geq 2p$ ist jede über $\mathbb{Q}$ definierte Unter-Hodge-Struktur $V \subseteq H^m(X,\mathbb{Q})$ von $H^m(X,\mathbb{R})$ mit $V^{j,k} = 0$ für $|j-k| > m-2p$ in $N^pH^m(X,\mathbb{Q})$ enthalten.

Für $m = 2p$ fällt die allgemeine Hodge-Vermutung mit der populären Form zusammen. Die ursprüngliche Vermutung, dass $N^pH^m(X,\mathbb{Q})$ selbst eine Unter-Hodge-Struktur von $H^m(X)$ ist, hat Grothendieck anhand eines Beispiels, Produkt von 3 geeignet gewählten elliptischen Kurven, widerlegt. Hodge selbst hatte seine Vermutung für ganzzahlige Kohomologieklassen formuliert; dies war zu optimistisch, wie M.F. Atiyah und F. Hirzebruch in [1] gezeigt haben, so dass die Vermutung auf rationale Kohomologieklassen bezogen wurde.

4.3 Der Fall $m = 2$

Ist X eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit und $\mathscr{L}$ ein komplexes Geradenbündel auf X, so findet man dazu einen Zusammenhang ∇, so dass dessen Krümmung $\nabla \circ \nabla$ eine Form vom Typ $(1,1)$ ist. Zerlegt man ∇ in Formen vom Typ $(1,0)$ und $(0,1)$, d.h.

$$\nabla = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}\,,$$

so folgt $\nabla^{0,1} \circ \nabla^{0,1} = 0$. Dies ist aber gerade die Integrabilitätsbedingung für die Existenz lokaler, nicht verschwindender Schnitte s von $\mathscr{L}$ mit $\nabla^{0,1}s = 0$, welche zu einer holomorphen Struktur auf $\mathscr{L}$ führt. Mit Hilfe solcher Schnitte können wir nun die erste Chern-Form und somit die erste Chern-Klasse $c_1(\mathscr{L})$ von $\mathscr{L}$ definieren; sie ist eine Kohomologieklasse vom Typ $(1,1)$. Indem wir die Gruppe der Isomorphieklassen holomorpher Geradenbündel auf X mit $\mathrm{Pic}(X)$ bezeichnen, erhalten wir das folgende Ergebnis:

Auf kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten X ist das Bild von $\mathrm{Pic}(X)$ unter c_1 in $H^2_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{R})$ gleich dem Durchschnitt von $H^{1,1}(X)$ mit dem Bild von $H^2(X,\mathbb{Z})$.

Auf projektiv algebraischen Mannigfaltigkeiten besitzt nach [6] jedes holomorphe Geradenbündel $\mathscr{L}$ einen meromorphen Schnitt $s \neq 0$. Diesem Schnitt lässt sich ein Divisor $\mathrm{div}(s) = \sum_\alpha n_\alpha V_\alpha$ zuordnen; diese Schreibweise bedeutet, dass der Schnitt s entlang V_α

eine n_α-fache Nullstelle bzw. Polstelle hat, wenn $n_\alpha > 0$ bzw. $n_\alpha < 0$ ist. Zwischen der ersten Chern-Klasse von $\mathscr{L}$ und dem Divisor $\operatorname{div}(s)$ besteht nun der Zusammenhang

$$c_1(\mathscr{L}) = \sum_\alpha n_\alpha z(V_\alpha)\,,$$

was gerade die Bestätigung der Hodge-Vermutung für Kozyklen der Kodimension 2 bedeutet.

Für $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ist die Kähler-Form ω der Fubini-Study-Metrik die erste Chern-Form des Hopf-Bündels. Damit sind die Operatoren L und Λ auf projektiven algebraischen Varietäten über $\mathbb{Q}$ definiert, also gilt der harte Lefschetz-Satz bereits für $H^*(X, \mathbb{Q})$. Der Operator L entspricht dabei dem Cup-Produkt mit der Zykel-Klasse $z(H)$ eines Hyperebenenschnittes H. Aufgrund des harten Lefschetz-Satzes gilt dann die Hodge-Vermutung also auch für Kozyklen der Kodimension 2. Darüber hinaus sind bis heute aber nur Spezialfälle bekannt, in denen die Hodge-Vermutung richtig ist.

Literatur

[1] Atiyah, M.F.; Hirzebruch, F.: Analytic cycles on complex manifolds. *Topology* 1 (1962), 25–45.

[2] Deligne, P.: The Hodge conjecture. http://www.claymath.org/prizeproblems/hodge.htm

[3] Grothendieck, A.: Hodge's general conjecture is false for trivial reasons. *Topology* 8 (1969), 299–303.

[4] Hodge, W.V.D.: *The topological invariants of algebraic varieties*. Proc. ICM (1950), 181–192.

[5] Kodaira, K.; Spencer, D.C.: Divisor classes on algebraic varieties. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 39 (1953), 872–877.

[6] Serre, J.P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 6 (1956), 1–42.

[7] Weil, A.: *Introduction à l'étude des variétés Kaehleriennes*. Publ. Univ. Nancago VI (1958).

Herbert Kurke
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
D–10099 Berlin
e-mail: `kurke@mathematik.hu-berlin.de`