Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 57 (2002)

Artikel: Die Navier-Stokes-Gleichung
Autor: Seiler, Ruedi
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7608

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 57 (2002) 109 – 114
0013-6018/02/030109-6

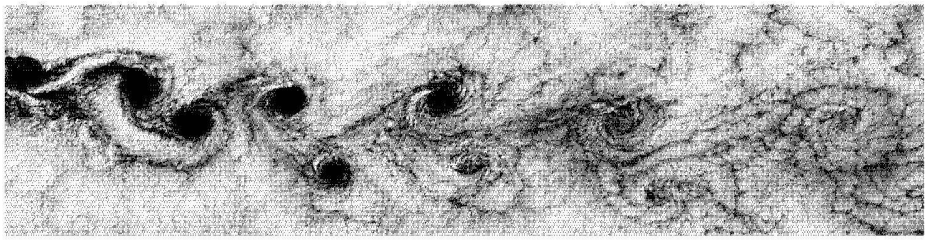
© Birkhäuser Verlag, Basel, 2002

Elemente der Mathematik

Die Navier-Stokes-Gleichung

Ruedi Seiler*

Die ganze Vielfalt der Dynamik von Flüssigkeiten – sei es das gemächliche Dahinziehen der Wasser-Wirbel hinter einem Brückenpfeiler, die Wolken-Wirbel auf der Leeseite eines hohen Berges im Pazifik längs einer Kármánschen Wirbelstrasse oder das Fliessen des



Blutes in unseren Adern – ist zusammengefasst in einer einzigen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung, der Navier-Stokes-Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld $u(t,x)$ und den skalaren Druck $p(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in G \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ oder 3 Dimensionen:

$$\rho\,(u_t + (u,\nabla)u) = \eta\Delta u - \nabla p + f\,. \tag{1}$$

Dabei bezeichnen $\eta > 0$ die Viskosität, $\rho > 0$ die Dichte und $f(t,x)$ das äussere Kraftfeld. Gesucht sind Lösungen von (1), die der Inkompressibilitätsbedingung

$$(\nabla, u) = 0 \tag{2}$$

genügen. Der Druck kann aus der Navier-Stokes-Gleichung eliminiert, d.h. durch Geschwindigkeitsfeld und äussere Kraft ausgedrückt werden.

Die Gleichungen (1) und (2) beschreiben inkompressible Flüssigkeiten mathematisch vollständig. Deshalb ist die Navier-Stokes-Gleichung die fundamentale Gleichung der

* E. Emmrich, V. Enss, J. Fröhlich, A. Jäkel, S. Jeschke, H.-J. Kaltenbach, E. Zorn haben mich bei der Abfassung dieser Note mit Rat und Tat unterstützt. Die Aufnahme der Alejandro-Selrik Insel aus dem Landsat 7 Satelliten wurde von U.S. Geology Survey zur Verfügung gestellt. Ihnen allen sei hier herzlich gedankt.

Hydrodynamik und steht in diesem Sinne auf derselben Stufe wie etwa die Schrödingergleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Sie reduziert Fragen der Hydrodynamik auf ein Rechenproblem. Dieses ist allerdings derart komplex, dass nur die einfachsten Situationen und diese auch nur mit den leistungsfähigsten Computern numerisch bewältigt werden können [3]. Die Navier-Stokes-Gleichung kann als die Newtonsche Gleichung für Flüssigkeiten oder als ein Skalenlimes der Boltzmanngleichung aufgefasst werden. In diesem Sinne hat sie einen weniger fundamentalen Charakter als die eben genannte Schrödingergleichung.

Wesentliche qualitative Probleme der Navier-Stokes-Gleichung sind nur teilweise verstanden. Dazu gehört das Anfangswert- und das zugehörige Regularitätsproblem. Die dabei auftretenden Schwierigkeiten hängen wesentlich mit der Nichtlinearität der Gleichung zusammen, denn für entsprechende lineare Gleichungen wie z.B. die Schrödingergleichung sind sie längst gelöst.

Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems (AWP) für die Navier-Stokes-Gleichung gehört zu den zentralen Problemen der Mathematischen Physik. Die Schwierigkeit dieser Frage war bereits Max Planck bewusst, von dem überliefert ist, dass er daran glaubte, zu seinen Lebzeiten die Quantenmechanik zu verstehen, aber skeptisch war, ob ihm dies mit der Hydrodynamik gelänge.

Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des AWPs ist aus mehreren Gründen für die Navier-Stokes-Gleichung bedeutsam. Zum ersten ist sie eine Voraussetzung für die Beschreibung von Turbulenz, zum zweiten ist es durchaus möglich, dass das AWP nur für endliche Zeiten eine Lösung hat. Für ein solches Verhalten gibt es tatsächlich numerische Hinweise, von denen man aber nicht weiss, wie ernst sie zu nehmen sind. Zum dritten kann von einer Lösung des analytischen Problems erwartet werden, dass sie die numerische Behandlung des AWPs drastisch verbessert. Das folgende Millenniumsproblem ist deshalb nicht nur wegen der damit verbundenen Million Dollar interessant, sondern von grosser theoretischer und praktischer Bedeutung:

> *Beweise die Existenz oder die Nichtexistenz regulärer Lösungen der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung für alle Zeiten unter physikalisch motivierten Voraussetzungen an die Anfangsbedingungen, die zugelassenen Gebiete und die äusseren Kraftfelder.*

Bereits vor fast vierzig Jahren hat Ladyzenskaya das Anfangs- und Regularitätsproblem für den zweidimensionalen, wesentlich einfacheren Fall gelöst [4]. In drei Dimensionen kann das AWP für zwei Spezialfälle gelöst werden, nämlich für genügend kleine Anfangsdaten oder für genügend kleine Zeiten.

Wie kann es dazu kommen, dass das AWP nur für endliche Zeiten lösbar ist? Mathematisch gesehen sind mindestens zwei Mechanismen denkbar. Um den ersten zu erklären, fassen wir das AWP für die partielle Differentialgleichung (1) als ein AWP für eine gewöhnliche Differentialgleichung auf einem geeigneten Funktionenraum auf. Die Lösung kann dann eventuell in endlicher Zeit zum Rand laufen und damit nicht weiter fortsetzbar sein. Auch im zweiten Mechanismus wird das AWP (1) in ein AWP für Differentialgleichungen längs Charakteristiken umgeschrieben. Dies geht solange gut, wie sich diese nicht kreuzen (vgl. Nr. 3, unten).

Die Existenz schwacher Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung in drei und mehr Dimensionen ist verhältnismässig einfach zu zeigen. Dies wurde bereits vor fast siebzig Jahren von Leray erkannt [5]. Die Eindeutigkeit und Regularität bleibt allerdings dabei aussen vor, da der Beweis wesentlich auf einem Kompaktheitsargument beruht und auf die Eindeutigkeit von Grenzwerten so typischerweise nicht geschlossen werden kann.

Nach dieser Einleitung beschreiben wir nun die Problemstellung etwas ausführlicher.

1. Trockenes Wasser ist nach J. v. Neumann eine Flüssigkeit, deren Viskosität vernachlässigt werden kann. Für diesen Fall gelten die Eulergleichungen. Sie können heuristisch aus der Newtonschen Gleichung hergeleitet werden. Auf die Seitenflächen eines kleinen Würfels im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ wirken Kräfte in der Richtung der Flächennormalen n und vom Betrag Fläche mal Druck p. Die resultierende Kraft auf den Würfel ergibt sich dann zu $-\nabla p$. Der Impuls des Würfels ist ρu. Die Ableitung des Impulses längs der Bahn eines Flüssigkeitsteilchens ist gleich der Kraft (Newton). Daraus ergeben sich im inkompressiblen Fall die Eulergleichungen für inkompressible Flüssigkeiten:

$$\rho(u_t + (u, \nabla)u) = -\nabla p\,, \tag{3}$$

$$(\nabla, u) = 0\,. \tag{4}$$

Die Herleitung der Gleichungen suggeriert die folgenden Randbedingungen: Der Geschwindigkeitsvektor u steht senkrecht auf der Flächennormalen n:

$$(u(t,x), n(x)) = 0 \quad (t \geq 0\,,\ x \in \partial G)\,.$$

2. Nasses Wasser: Reibungskräfte oder Scherkräfte zwischen benachbarten Schichten realer Flüssigkeiten können oftmals nicht vernachlässigt werden. Dies gibt Anlass zur Viskosität, die durch eine Materialkonstante η beschrieben wird.

Um die visköse Reibung einer Flüssigkeit zu messen, wird diese zwischen zwei parallele Platten im Abstand x gefüllt, die eine fest, die andere wird mit der Geschwindigkeit u gezogen. Die dazu notwendige Kraft F ist für kleine u proportional zum Gradienten der Geschwindigkeit und zur Fläche A der Platte, d.h.

$$F = \eta A u_x\,.$$

Bereits bei der Definition von η ist die visköse Randbedingung $u = 0$ verwendet worden, d.h. die Geschwindigkeit der Flüssigkeit verschwindet am Rand des Gebietes. Dass dies physikalisch sinnvoll ist, kann jeder beim Abstauben eines Ventilators erleben: Auf den Rotorflächen bleibt der Staub liegen!

Die Scherkräfte geben zu einem zusätzlichen Term in der hydrodynamischen Gleichung Anlass:

$$\begin{aligned} \rho\,(u_t + (u, \nabla)u) &= \eta \triangle u - \nabla p\,, \\ (\nabla, u) &= 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Dies ist die Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible visköse Flüssigkeiten. Der Druck kann im Prinzip aus der Gleichung eliminiert werden, denn die Divergenz von (5) ergibt

$$p = \triangle^{-1} \rho(\nabla, (u, \nabla)u)\,. \tag{6}$$

Die Beschreibung der Strömung um einen runden Brückenpfeiler mit der Navier-Stokes-Gleichung (5) enthält auf den ersten Blick vier Parameter: die Viskosität η, die Dichte ρ, den Radius r des Pfeilers und die Geschwindigkeit u_∞ der Flüssigkeit sehr weit weg vom Pfeiler. Tatsächlich enthält das Problem jedoch nur einen einzigen dimensionslosen Parameter, die Reynoldszahl

$$R := 2\frac{\rho u_\infty r}{\eta}\,. \tag{7}$$

Dies ist eine der bedeutsamsten Eigenschaften der Navier-Stokes-Gleichung und von grosser praktischer Bedeutung. Die Grösse der Reynoldszahl charakterisiert das qualitative Verhalten der Strömung (vgl. z.B. Feynman Lectures, Band 2).

3. Mathematische Ansätze: Eine schöne Darstellung des Standes der Kunst ist in den beiden einleitenden Kapiteln der kürzlich erschienenen Dissertation von E. Emmrich [1] enthalten.

Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems, Regularität: Zwei Mechanismen sind von Bedeutung, die der Existenz regulärer Lösungen für alle Zeiten entgegenstehen.

a) Verhalten am Rand: Jede Lösung $u(t), t \in [0, T)$ auf G, die nicht über die Zeit T hinaus fortgesetzt werden kann, „läuft für $t \to T$ gegen den Rand von G".

Beispiel: Das AWP auf $G := \mathbb{R}^1_x$

$$x_t(t) = ax^3(t), \quad x(0) = x_0$$

hat die eindeutige Lösung

$$x(t) = x_0(1 - 2x_0^2 at)^{-1/2}\,,$$

die für positive Werte von a nicht über $T := 1/2x_0^2 a$ hinaus fortgesetzt werden kann. Wird aber vermieden, dass eine Lösung zum Rand hin läuft, kann sie auf ganz $\{t \geq 0\}$ fortgesetzt werden. Dazu dienen Liapunovfunktionen. Falls im obigen Beispiel $a \leq 0$ vorausgesetzt wird, ist x^2 eine Liapunovfunktion auf $\mathbb{R}^1_x$.

b) Kreuzung von Charakteristiken, Schock: Partielle Differentialgleichungen können auf gewöhnliche Differentialgleichungen längs der Charakteristiken zurückgeführt werden, solange diese sich nicht kreuzen.

Beispiel: Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) &= 0\,, \\ u(t=0,x) &= u_0(x) \end{aligned} \tag{8}$$

bedeutet, dass u längs des Vektorfeldes $(1, u(t,x))$ auf $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ konstant ist und bei $(t = 0, x_0)$ den Wert $u_0(x_0)$ annimmt. Die Integralkurven dieses Vektorfeldes, die Charakteristiken, sind Lösungen der Familie von Anfangswertproblemen

$$\begin{aligned} x_t(t,x_0) &= u(t, x(t,x_0))\,, \\ x(0,x_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{9}$$

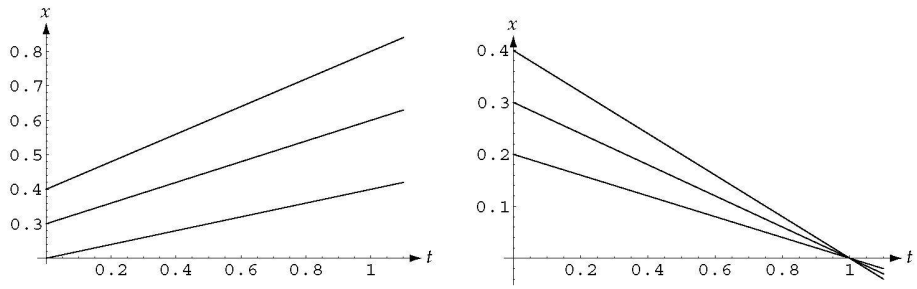
und gegeben durch

$$x(t, x_0) = tu_0(x_0) + x_0 \,. \tag{10}$$

Daraus kann problemlos die Lösung des ursprünglichen AWPs (8) berechnet werden, *wenn die Charakteristiken sich nicht schneiden*, d.h. falls (10) eindeutig nach x_0 aufgelöst werden kann. Dies gilt für $u_{0,x}(x) > 0$, z.B. für $u_0(x) := ax$, $a > 0$. Dann ist

$$u(t, x) = x_0/(at + 1)$$

und für alle $t > 0$ definiert (Fig. unten links). Im anderen Fall kreuzen sich die Charakteristiken und trotz regulärer Anfangswerte kann nach einer Zeit T^* eine Singularität entstehen (Fig. unten rechts). Für den Fall $a < 0$ im obigen Beispiel ist $T^* = 1/|a|$.



Die Galerkin-Methode: Die inkompressible Navier-Stokes-Gleichung auf dem 3-dimensionalen Torus $G = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ lautet im Fourierraum und für die Dichte $\rho = 1$ folgendermassen:

$$\begin{aligned} &\hat{u}_t(t, k) = -\eta k^2 \cdot \hat{u}(t, k) + P^{\perp}(k) \cdot \sum_{k=k'+k''} (\hat{u}(t, k'), k'') \cdot \hat{u}(t, k''), \\ &(k, \hat{u}(t, k)) = 0 \qquad\qquad (k, k', k'' \in (2\pi\mathbb{Z} \setminus \{0\})^3) \,. \end{aligned} \tag{11}$$

$P^{\perp}(k)$ ist die Projektion auf den zu k senkrechten Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Sie soll den Druck aus der ursprünglichen Gleichung (5) eliminieren. Die inkompressible Navier-Stokes-Gleichung ist somit ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die Galerkin-Methode besteht darin, nur endlich viele Fouriermoden zuzulassen und die Gleichung auf diese Weise zu „trunkieren"; d.h. wir betrachten Geschwindigkeiten $u^N(t, x)$ mit Fourierkoeffizienten $\hat{u}^N(t, k)$, die ausschliesslich auf dem diskreten Würfel $[-2\pi N, 2\pi N]^3$ von Null verschieden sind, und der Gleichung (11) genügen. Darauf können die bekannten Methoden aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen angewandt werden. Eine geeignet gewählte Liapunovfunktion (kinetische Energie) führt auf das Resultat

$$\|u^N(t, \cdot)\|_2 \leq \|u(t = 0, \cdot)\|_2 \quad (N \in \mathbb{N}).$$

Da die Kugel vom Radius $\|u(t = 0, \cdot)\|_2$ in $L^2(G)$ schwach kompakt ist, existiert eine schwache Lösung des Anfangswertproblems der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung. Daraus folgt das Resultat von J. Leray und E. Hopf:

Theorem *Für jede Wahl der Anfangsgeschwindigkeit* $u_0 \in L^2(G)$, $(\nabla, u_0) = 0$, *existiert eine schwache Lösung des Anfangswertproblems der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung* $u \in L^\infty([0,\infty), L^2(G)) \cap L^2([0,\infty), H^1(G))$, *d.h. für beliebige Testfunktionen* $\phi \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)$, div $\phi = 0$, *ist*

$$\int_0^\infty \int_G (-(u, \phi_t) - (u, \Delta\phi) + (u, (u, \nabla)\phi))dtdx + \int_G (u(t=0), \phi)dx = 0\,.$$

4. Die Hauptakteure:

Claude Louis Marie Henri Navier, geb. 1785 in Dijon. Waise mit 9 Jahren, adoptiert von seinem Onkel, selbst berühmter Bauingenieur, Ingenieurstudium an der École Polytechnique, Freundschaft mit seinem Lehrer Fourier. Studium und Lehrer an der „École des Ponts et Chaussées". Betont Bedeutung der Mathematik und Physik für das Ingenieurstudium. Arbeiten u.a. über Flüssigkeiten, Eisenbahn, Konstruktion von Hängebrücken. Politischer Mensch mit sozialen Idealen. Begreift Industrialisierung als Chance zur Verbesserung der Welt. Projekt einer Hängebrücke über die Seine in Paris endet in Katastrophe: Unvollendeter Bau stürzt ins Wasser. Gest. 1836 in Paris.

George Gabriel Stokes, geb. 1819 in Skreen, Irland in ärmlichen Verhältnissen. Vater und alle 3 Brüder Pfarrer, Mutter Pfarrerstochter, mit 18 J. Universität Cambridge, mit 23 J. „On the steady motion of incompressible fluids", mit 30 J. „Lucasian Professor" in Cambridge. Übt grossen Einfluss auf Maxwell aus. Gest. 1903 in Cambridge.

Literatur

[1] Emmrich, E.: *Analysis von Zeitdiskretisierungen des inkompressiblen Navier-Stokes-Problems*, Dissertation, Berlin 2001.

[2] Fefferman, Ch.: Existence & smoothness of the Navier-Stokes equation. http://www.claymath.org/prizeproblems/navierstokes.htm

[3] Kaltenbach, H.-J.; Jäkel, A.: *A hybrid direct/iterative algorithm for solution of Poisson's equation based on the Schur complement method*, 3rd Int. FORTWIHIR Conference on HPSEC, Erlangen 2001, Breuer, M. et al. (eds.).

[4] Ladyzhenskaya, O.A.: *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach, rev. engl. edition, 1963, and second edition 1969.

[5] Leray, J.: Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.* 63 (1934), 193–248.

Ruedi Seiler
Institut für Mathematik
Technische Universität Berlin
Strasse des 17. Juni 135
D–10623 Berlin
e-mail: `seiler@math.tu-berlin.de`