

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 57 (2002)  
  
**Rubrik:** Bücher und Computersoftware

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

---

## Bücher und Computersoftware

---

---

**P. de la Harpe: Topics in Geometric Group Theory.** vi + 310 Seiten, \$45 (gebunden), \$20 (broschiert). Chicago Lectures Notes in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago 2000. ISBN 0-226-31719-6 (gebunden), ISBN 0-226-31721-8 (broschiert).

Die Gruppentheorie besteht seit ihren Anfängen im 19. Jahrhundert aus mehreren Zweigen, die nur lose miteinander verbunden sind. Neben bekannteren Teilen, etwa der Theorie der endlichen Gruppen oder der Darstellungstheorie dieser Gruppen, gibt es insbesondere noch die sogenannte *kombinatorische Gruppentheorie*. Sie befasst sich mit Gruppen, welche durch Erzeugende und Relationen gegeben sind, also durch eine Beschreibung, die bei Fundamentalgruppen von topologischen Räumen von Nutzen ist.

In den achtziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts erlebte die kombinatorische Gruppentheorie eine starke Erweiterung. Diese Erweiterung wurde durch Gromows Idee ausgelöst, Gruppen zu geometrischen Objekten zu machen und diese Objekte mit Methoden, die der Analysis nahestehen, zu untersuchen. Diese erweiterte kombinatorische Gruppentheorie, oft *geometrische Gruppentheorie* genannt, ist das Thema des Buches von P. de la Harpe. Im Folgenden erläutere ich einige Ideen und Resultate der geometrischen Gruppentheorie an Hand von leicht verständlichen Beispielen und skizziere dann den Inhalt des Buches.

Ich erkläre zuerst, wie man jeder endlich erzeugbaren Gruppe  $\Gamma$  einen metrischen Raum zuordnen kann. Sei  $S \subset \Gamma$  eine endliche Teilmenge, welche  $\Gamma$  erzeugt. Nach Definition besitzt jedes Element  $\gamma \in \Gamma$  eine Darstellung der Form  $\gamma = s_1 \cdot s_2 \cdots s_\ell$ ; in ihr bezeichnet jeder Faktor  $s_i$  ein Element von  $S$  oder das Inverse eines solchen Elementes. Ordnet man nun  $\gamma \in \Gamma$  die Länge  $\ell$  des kürzesten Produktes  $s_1 \cdots s_\ell$ , welches  $\gamma$  darstellt, zu, so erhält man eine Funktion  $\ell_S: \Gamma \rightarrow \mathbb{N}$ . Sie erlaubt es, eine Metrik  $d_S$  auf  $\Gamma$  zu definieren: man setzt  $d_S(e, \gamma) = \ell_S(\gamma)$  und allgemeiner  $d(\gamma_1, \gamma_2) = \ell_S(\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)$ . Aus der Definition folgt unmittelbar, dass jede Linkstranslation  $L_\gamma: \gamma_1 \mapsto \gamma \cdot \gamma_1$  die Abstandsfunktion  $d_S$  erhält, also eine (bijektive) Isometrie ist.

Zwei einfache Beispiele sollen das Gesagte verdinglichen. Seien zunächst  $\Gamma = \mathbb{Z}$  und  $S = \{1\}$ . Dann ist  $d_S(m, n)$  der übliche Abstand  $|m - n|$  auf  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ . Nun ist aber auch  $S' = \{2, 3\}$  ein Erzeugendensystem. Die Abstände  $d_{S'}(0, m)$  der Zahlen  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  von 0 berechnen sich zu  $0, 2, 1, 1, 2, 2, 2$ ; ferner gilt  $d_{S'}(0, m) = k$ , falls  $m \in \{3k - 2, 3k - 1, 3k\}$  liegt und  $k \geq 2$  ist. Die Abstandsfunktion  $d_{S'}$  erfüllt also für weit entfernte Zahlen annähernd die Gleichung  $d_{S'}(m, n) = \frac{1}{3}|m - n|$ .

Als zweites Beispiel betrachten wir die Gruppe  $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ ; sie besitzt  $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$  als Erzeugendensystem. Es gilt  $d_S(x, y) = 1$  genau dann, wenn  $d_2(x, y) = 1$  ist; dabei bezeichnet  $d_2$  den üblichen euklidischen Abstand auf  $\mathbb{R}^2$ . Im allgemeinen stimmt die Metrik  $d_S$  aber nicht mit der Einschränkung von  $d_2$  auf  $\mathbb{Z}^2$  überein; vielmehr ist  $d_S(x, y) = \|x - y\|_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ .

Bisher haben wir jedem Paar  $(\Gamma, S)$ , das aus einer endlich erzeugbaren Gruppe  $\Gamma$  und einem endlichen Erzeugendensystem  $S$  besteht, einen metrischen Raum  $(\Gamma, d_S)$  zugeordnet. Die Wahl des Erzeugendensystems  $S$  ist willkürlich; sie fließt aber in die Definition von  $d_S$  ein. Um diese Abhängigkeit unwichtig zu machen, geht man von Isometrien zwischen metrischen Räumen zu *Quasi-Isometrien* über. Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  beliebige metrische Räume und  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Man nennt  $f$  eine Quasi-Isometrie, falls es Konstanten  $\lambda > 0$  und  $C \geq 0, D \geq 0$  gibt, so dass die Abschätzung

$$\lambda^{-1} \cdot d_X(x, x') - C \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda \cdot d_X(x, x') + C$$

für alle  $x, x'$  aus  $X$  richtig ist und jedes  $y \in Y$  von einem geeigneten Bildpunkt  $f(x_y)$  höchstens den Abstand  $D$  aufweist. Eine Quasi-Isometrie braucht weder stetig, noch injektiv, noch surjektiv zu sein. Es ist aber so,

dass eine Quasi-Isometrie  $f: X \rightarrow Y$  genau dann existiert, falls es eine Quasi-Isometrie von  $Y$  in  $X$  hinein gibt.

Seien nun  $\Gamma$  eine endlich erzeugbare Gruppe und  $S, S'$  zwei endliche Erzeugendensysteme von  $\Gamma$ . Dann ist die Identität  $\text{id}: \Gamma \rightarrow \Gamma$  eine Quasi-Isometrie von  $(\Gamma, d_S)$  nach  $(\Gamma, d_{S'})$ . Das Beispiel  $\Gamma = \mathbb{Z}^2$  mit  $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$  zeigt noch etwas ganz anderes: ist  $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Inklusionsabbildung, so gilt

$$d_2(x, y) \leq d_S(x, y) = \|x - y\|_1 \leq \sqrt{2} \cdot d_2(x, y).$$

Es ist also  $f$  eine Quasi-Isometrie mit  $\lambda = \sqrt{2}$  und  $C = 0, D = \sqrt{2}/2$ .

Dieses Beispiel legt die Frage nahe, ob die Relation der Quasi-Isometrie nicht so grob ist, dass keine interessanten Aussagen über quasi-isometrische Gruppen gemacht werden können. Das Beispiel deutet aber auch an, dass die Frage wohl zu verneinen ist. So wächst die Anzahl der Elemente einer Kreisscheibe  $B_k((0, 0))$  mit Mittelpunkt  $(0, 0)$  und Radius  $k$  annähernd quadratisch mit  $k$ , genau so wie dies für den Inhalt von euklidischen Kreisscheiben gilt. Hingegen wachsen Kugeln in  $(\mathbb{Z}, \{1\})$  linear mit dem Radius, und solche in  $(\mathbb{Z}^3, S)$  mit  $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  annähernd kubisch.

Gestützt auf diese Beispiele kann ich nun zwei wichtige Themen des Buches skizzieren. In Kapitel IV wird die Konstruktion  $(\Gamma, S) \mapsto (\Gamma, d_S)$  sowie der Begriff der Quasi-Isometrie besprochen und durch viele Beispiele verdeutlicht. In den Kapiteln VI, VII und VIII geht es dann um das Wachstum der Kugeln  $B_k$  in den metrischen Räumen  $(\Gamma, d_S)$ . Dieses Wachstum kann polynomial sein, etwa bei den Gruppen  $\mathbb{Z}^n$  mit  $n \geq 1$ ; bei den meisten der bekannten Gruppen ist es aber exponentiell. Interessant ist nun, dass es auch Gruppen  $\Gamma$  gibt, bei denen die Anzahl der Elemente in den Kugeln  $B_k$  schneller wächst als ein Polynom, aber langsamer als eine Exponentialfunktion  $k \mapsto a^k$  mit  $a > 1$ . Kapitel VIII ist dem Studium einer solchen Gruppe gewidmet; sie wurde vom russischen Mathematiker R.I. Grigorchuk in den achtziger Jahren entdeckt und untersucht.

R. Strebel, Fribourg

**J. Kirtland: Identification Numbers and Check Digit Schemes.** Class Room Resource Materials. xi + 174 Seiten, \$ 31.50. The Mathematical Association of America, Washington D.C. 2001; ISBN 0-88385-720-0.

Diskrete Mathematik – oder konkrete Kombinatorik, algebraische Strukturtheorie, Zahlentheorie – hat in der Elementarmathematik oft den Beigeschmack der harten, trockenen, abstrakten Lehre. Allerdings baut die Informationstechnologie auf Methoden und Erkenntnisse aus der diskreten Mathematik, die nun eine vergleichbar tragende Rolle zu spielen beginnt, wie die Infinitesimalrechnung für die Physik und die klassischen Ingenieurdisziplinen.

Kirtland geht von den Anwendungen aus und motiviert damit den Einsatz der diskreten Mathematik anhand überzeugender Beispiele, denen wir alle im täglichen Leben begegnen: Die Nummer auf dem Flugticket oder auf den Banknoten, der Barcode und die EAN-Artikel-Nummer oder die ISBN. Was hat es mit diesen Nummern auf sich? Welche Anforderungen stellen wir an derartige Kodierungen? Wie lassen sich diese Anforderungen erfüllen?

Das Buch ist für den unmittelbaren Gebrauch (in der Hand der Unterrichtenden!) im Unterricht konzipiert. Motivationen, Einführungen, Definitionen, Beispiele, Sätze und Übungen sind inbegriffen, aber ganz wesentlich sind nach Kirtlands Überzeugung die „writing assignments“ und Gruppenaktivitäten, welche Bestandteil jedes Kapitels bilden.

Gerade weil der Text hart am konkreten Beispiel bleibt, ist er für den Schuleinsatz sehr tauglich. Neben der Kodierungstheorie, welche die fehlerfreie Handhabung, Übermittlung und Speicherung von Zeichenfolgen behandelt, kommt als kryptologische Anwendung der Zahlentheorie und modularer Arithmetik auch das RSA Verschlüsselungsverfahren zur Sprache. Inbegriffen ist aber auch eine Einführung in den Funktionsbegriff, Permutationen endlicher Mengen, Gruppen von Kongruenzabbildungen als Vorbereitung auf die Gruppentheorie, die zur Erzeugung eines Kodierungsverfahrens nach Verhoeff benötigt wird.

Schüler, die nach diesem Text unterrichtet wurden, haben einen doppelten Gewinn: Sie kennen sich in grundlegenden Beispielen der Kodierungstheorie aus und sind motiviert für die Begriffsbildungen der abstrakten Algebra. Es mag erstaunen, aber Programmierung wird in diesem Text aus dem Umfeld der Informationsverarbeitung nirgends verlangt, eine Lücke, die sich gewiss durch eigene Ideen leicht schliessen liesse. Mit Gewissheit gibt der Text ein Muster für die Behandlung von praxisrelevanten, attraktiven Fragen, welches den

Nutzen von abstrakter Mathematik überzeugend und schülerfreundlich belegt. Die didaktische Aufbereitung macht Ernst mit der Eigentätigkeit der Lernenden und erhebt eigenes Schreiben zum Programm. Ein besonderes Verdienst dieses Textes: Er bereitet den Boden für anregende und unverbrauchte Themen im Umfeld einer zeitgemässen und realitätsbezogenen Elementarmathematik.

H.R. Schneebeli, Baden

**M. Emmer: The Fantastic World of M.C. Escher.** Video, VHS PAL. Spieldauer 55 Minuten, sFr. 62.–. Springer, Berlin u.a. 2001; ISBN 3-540-92645-3.

Dieses Video gibt zunächst einen ganz kurzen biographischen Abriss über Maurits Cornelis Escher, um seinen künstlerischen Werdegang zu erläutern. Der Hauptteil enthält die Schwerpunkte: Parkette in der euklidischen und der hyperbolischen Ebene, regelmässige und halbregelmässige Körper sowie unmögliche Objekte. Das mathematische Umfeld wird durch ausführliche Interviews mit H.S.M. Coxeter und Roger Penrose vorgestellt.

Einige klassische Bilder in Eschers Werk werden durch Computeranimation aufgepeppt: Im „Traum“ beginnt das Ungeziefer zu krabbeln, im „Wasserfall“ fliesst das Wasser und in „Treppauf, Treppab“ hüpfte eine virtuelle Figur endlos aufwärts. Dem Betrachter der Bilder wird dadurch die eigene Imagination abgenommen – ich meine, dass dadurch ein wesentlicher Reiz in Eschers Werk verlorengelht. Sein Werk läuft ja ohnehin Gefahr, durch die „Escher-Industry“ vereinnahmt zu werden. Den ganzheitlichen Blick auf ein Bild kann das Video schlecht vermitteln, andererseits führt es durch Zoom-Effekte zu einer vertieften Sicht auf Einzelheiten hin.

Im Rahmen eines Unterrichtsprojektes über Escher, in welchem primär seine Bilder vorliegen, wird der ausschnittsweise Einsatz des Videos sicher gute Dienste leisten. Das Video ist in englischer Sprache kommentiert, auch die holländischen Interviews mit Bruno Ernst sind englisch übersprochen.

H. Walser, Frauenfeld