

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 57 (2002)

**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

## Aufgaben

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. November 2002 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

**Aufgabe 1181:** Im ebenen Gitter betrachten wir rote und blaue minimale Gitterwege; die roten Wege verbinden den Punkt  $(0, m)$  mit dem Punkt  $(n, 0)$ , die blauen führen von  $(0, 0)$  nach  $(n, m)$ . Unter diesen Wegpaaren gibt es solche, die sich in einem Punkt der Geraden  $y = k$  rechtwinklig kreuzen und bei denen der rote Weg diesen Punkt horizontal passiert. Berechne – in Abhängigkeit von  $n$  und  $m$  – die Anzahl dieser Wege für  $k = 1$  und für  $k = 2$ .

Jany C. Binz, Bolligen, CH

**Aufgabe 1182:** Man finde einen (möglichst einfachen) Algorithmus, welcher entscheidet, ob sich zwei durch die Koordinaten ihrer Endpunkte gegebene Strecken schneiden.

Albert Fässler, Evilard, CH

**1183 (Die einfache dritte Aufgabe):** Wir betrachten  $d$ -stellige Zahlen mit lauter gleichen Ziffern  $\delta \neq 0$ . Beispielsweise hat man für  $\delta = 7$  und  $d = 8$  die Zahl 77777777. Wir teilen die Differenz aus einer solchen Zahl und ihrer Quersumme durch  $9 \cdot \delta$ :

$$\begin{array}{r} 77777777 - 63 \\ 9 \cdot 7 \\ \hline 222 - 6 \\ \hline 9 \cdot 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6666666 - 42 \\ 9 \cdot 6 \\ \hline 55555 - 25 \\ 9 \cdot 5 \end{array}$$

Man drücke das Ergebnis dieser Division durch  $d$  und  $\delta$  aus und betrachte insbesondere den Fall  $d > 10$ .

Uwe Hassler, Berlin, D

## Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2001

**Aufgabe 1168.** Zwei Spieler A und B werfen eine  $(0, 1)$ -Laplace-Münze. Spieler A gewinnt, wenn 000 auftritt, Spieler B gewinnt, wenn 010 auftritt.

- a) Es wird solange gespielt, bis ein Sieger feststeht. Wie verhalten sich die Gewinnwahrscheinlichkeiten von A und B?

Es wird nun zusätzlich vereinbart, dass das Spiel nur gültig ist, wenn es genau beim  $n$ -ten Wurf ( $n \geq 3$ ) zu Ende ist; andernfalls muss es wiederholt werden.

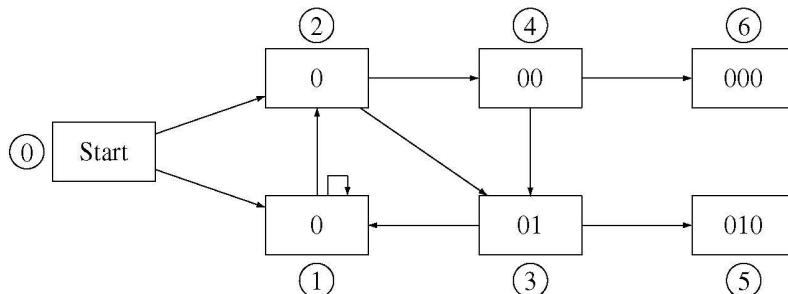
- b) Wohin strebt das Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten von A und B für wachsendes  $n$ ?

Fritz Siegerist, Meilen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 11 Lösungen oder Teillösungen eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Peter Hohler (Aarburg, CH), Patrik Hubschmid (Spiegel, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen bei a) den Überlegungen von *Roland Wyss*; die Lösung von b) wurde aus den Einsendungen von *Hans Egli* und *Joachim Klose* kombiniert.

Das Diagramm zeigt die sieben möglichen (von 0 bis 6 nummerierten) Spielzustände; die Übergangswahrscheinlichkeiten in Pfeilrichtung betragen  $1/2$ .



Bezeichnet  $p_i$  die Wahrscheinlichkeit, dass man vom Zustand  $i$  in einen der absorbierenden Zustände 5 oder 6 gelangt, so folgen aus der Tatsache, dass die zu inneren Zuständen gehörigen Wahrscheinlichkeiten gleich dem gewichteten Mittel der Wahrscheinlichkeiten der Nachbarzustände sind, die Gleichungen

$$\left| \begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{2} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 \\ p_2 = \frac{1}{2} \cdot p_3 + \frac{1}{2} \cdot p_4 \\ p_3 = \frac{1}{2} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_5 \\ p_4 = \frac{1}{2} \cdot p_3 + \frac{1}{2} \cdot p_6 \end{array} \right|.$$

Gewinnt A, so ist der Zustand 6 absorbierend; es gilt  $p_5 = 0$  und  $p_6 = 1$ , und das System hat die Lösung  $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ , und es ist  $p_0 = \frac{1}{2} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 = \frac{2}{5}$ . Gewinnt B, so gilt  $p_5 = 1$  und  $p_6 = 0$ , was zur Lösung  $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5})$  führt, woraus sich  $p_0 = \frac{1}{2} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 = \frac{3}{5}$  ergibt. Die Gewinnwahrscheinlichkeiten von A und B verhalten sich also 2:3.

Es seien  $a_n$  resp.  $b_n$  die Mächtigkeiten der Mengen  $A_n$  und  $B_n$  der Folgen, welche A resp. B nach genau  $n$  Würfen zum Sieg verhelfen. Wir konstruieren zwei Abbildungen  $\varphi : A_n \cup A_{n-1} \rightarrow B_n$  und  $\psi : B_{n-3} \cup A_{n-1} \rightarrow A_n$ :

- Die Abbildung  $\varphi$  ersetzt bei den Folgen aus  $A_n$  den Schluss 00 durch 10, bei den Folgen aus  $A_{n-1}$  wird die hinterste 0 durch 10 ersetzt.
- Die Abbildung  $\psi$  ersetzt bei den Folgen aus  $B_{n-3}$  die hinterste 0 durch 1000, bei den Folgen aus  $A_{n-1}$  wird der Block 000 durch 1000 ersetzt.

Man erkennt, dass es sich bei  $\varphi$  und  $\psi$  um Bijektionen handelt, und dies gibt Anlass zu den Zusammenhängen

$$b_n = a_n + a_{n-1} \quad (n \geq 4), \quad (1)$$

$$a_n = b_{n-3} + a_{n-1} \quad (n \geq 6). \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) ergeben zusammen

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} \quad (n \geq 7). \quad (3)$$

Verwendet man (1) und (3) zusammen mit den Anfangswerten  $a_1 = b_1 = 0$ ,  $a_2 = b_2 = 0$ ,  $a_3 = b_3 = 1$ ,  $a_4 = 1$ ,  $b_4 = 2$  und berücksichtigt man noch, dass die Formeln (2) und (3) schon für  $n \geq 5$  gelten, so sieht man nach kurzer Rechnung in den Daten

$$\begin{aligned} a_4 : b_4 &= 1 : 2 & a_5 : b_5 &= 1 : 2 \\ a_6 : b_6 &= 2 : 3 & a_7 : b_7 &= 4 : 6 = 2 : 3 \\ a_8 : b_8 &= 6 : 10 = 3 : 5 & a_9 : b_9 &= 9 : 15 = 3 : 5 \\ a_{10} : b_{10} &= 15 : 24 = 5 : 8 & a_{11} : b_{11} &= 25 : 40 = 5 : 8 \end{aligned}$$

unverkennbar den Anfang einer „doppelten Fibonaccifolge“. Ist nämlich  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$  und  $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$  für  $n \geq 2$ , so gilt

$$a_n = f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot f_{[\frac{n}{2}]}, \quad b_n = f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot f_{[\frac{n}{2}]+1},$$

was sich für  $n = 1, 2, 3, 4$  unmittelbar überprüfen lässt. Setzen wir nun diese verankerten Werte auf der rechten Seite von (3) ein, so ergibt sich vorerst

$$\begin{aligned} a_n &= f_{[\frac{n-2}{2}]} \cdot f_{[\frac{n-1}{2}]} + f_{[\frac{n-4}{2}]} \cdot f_{[\frac{n-3}{2}]} + f_{[\frac{n-5}{2}]} \cdot f_{[\frac{n-4}{2}]} \\ &= f_{[\frac{n-2}{2}]} \cdot f_{[\frac{n-1}{2}]} + f_{[\frac{n-4}{2}]} \cdot (f_{[\frac{n-3}{2}]} + f_{[\frac{n-5}{2}]}) \\ &= f_{[\frac{n-2}{2}]} \cdot f_{[\frac{n-1}{2}]} + f_{[\frac{n-4}{2}]} \cdot f_{[\frac{n-1}{2}]} \\ &= f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot (f_{[\frac{n-2}{2}]} + f_{[\frac{n-4}{2}]}) \\ &= f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot f_{[\frac{n}{2}]} \end{aligned}$$

und dann mit (1)

$$\begin{aligned} b_n &= f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot f_{[\frac{n}{2}]} + f_{[\frac{n-2}{2}]} \cdot f_{[\frac{n-1}{2}]} \\ &= f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot (f_{[\frac{n}{2}]} + f_{[\frac{n-2}{2}]}) \\ &= f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot f_{[\frac{n+2}{2}]} = f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot f_{[\frac{n}{2}]+1}. \end{aligned}$$

Das Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Spieler A und B beträgt somit

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{f_{[\frac{n}{2}]}}{f_{[\frac{n}{2}]+1}},$$

und dieser Quotient strebt bekanntlich für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

**Aufgabe 1169.** Es sei  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Beweise die Ungleichung

$$\left( \frac{2 + \cos(x)}{3} \right)^3 < \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)^2.$$

Péter Ivády, Budapest, H

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 14 Zuschriften eingetroffen: Erhard Braune (Linz, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Patrik Hubschmid (Spiegel, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Kee-Wai Lau (Hong Kong, China), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Einsender studieren Monotonieeigenschaften der aus der linken und der rechten Seite der Ungleichung gebildeten Differenzfunktion. *Michael Vowe* geht aus von den bekannten Ungleichungen

$$\begin{aligned} \cos(x) &< 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \iff \frac{2 + \cos(x)}{3} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72}, \\ \frac{\sin(x)}{x} &> 1 - \frac{x^2}{6}. \end{aligned}$$

Die vorgelegte Ungleichung ist bewiesen, wenn die Gültigkeit von

$$\left( 1 - \frac{x^2}{6} \right)^2 - \left( 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} \right)^3 > 0$$

nachgewiesen werden kann. Die linke Seite lässt sich umformen in

$$\frac{x^2(12 - x^2)((x^2 - 6)^2 + 72)^2 - 6480}{373248}.$$

Weil die kleinste positive Nullstelle dieses Ausdrückes grösser als  $\pi/2$  ist, liefert der Ausdruck im Intervall  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  nur positive Werte.

**Aufgabe 1170 (Die einfache dritte Aufgabe).** Es sei  $f$  ein kubisches Polynom mit den Nullstellen  $a, b$  und  $c$  ( $a \neq b$ ), und es sei  $m = (a + b)/2$ . Das Newtonverfahren findet mit dem Startwert  $m$  die Lösung  $c$  der Gleichung  $f(x) = 0$  in einem Schritt.

- Man finde eine Verallgemeinerung auf Polynome vierten Grades.
- Es sei  $g$  eine beliebige (genügend oft differenzierbare) Funktion. Welche Bedingung über  $m$  und  $g$  garantiert, dass das Newtonverfahren mit dem Startwert  $m$  in einem Schritt eine Lösung der Gleichung  $g(x) = 0$  findet?

Hans Rudolf Schniebeli, Wettingen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 7 Zuschriften eingegangen: Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

*Frieder Grupp* argumentiert wie folgt: Es sei  $x_1 \in \mathbb{R}$  mit  $g(x_1) = 0$ . Gesucht ist  $m \neq x_1$  mit  $g(m) \neq 0$ , so dass

$$x_1 = m - \frac{g(m)}{g'(m)}, \quad g'(m) \neq 0. \quad (1)$$

Nach Voraussetzung existiert eine genügend oft differenzierbare Funktion  $h$  mit

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - x_1) \cdot h(x), \\ g'(x) &= (x - x_1) \cdot h'(x) + h(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Also ist (1) äquivalent zu

$$x_1 - m = -\frac{(m - x_1) \cdot h(m)}{(m - x_1) \cdot h'(m) + h(m)}, \quad g'(m) \neq 0, \quad (3)$$

was wegen  $x_1 \neq m$  auf

$$h'(m) = 0, \quad h(m) \neq 0 \quad (4)$$

führt. Werte  $m$ , die (4) erfüllen, könnten allerdings bereits mit  $x_1$  übereinstimmen, so dass also 0 Newtonschritte benötigt werden.

In der Aufgabenstellung ist  $h(x) = (x - a)(x - b)$ . Der einzige Wert  $m$  mit  $h'(m) = 0$  ist  $m = (a + b)/2$ , und für ihn ist wegen  $a \neq b$  die Bedingung  $h(m) = -(a - b)^2/4 \neq 0$  erfüllt (aber er könnte bereits mit  $c$  übereinstimmen).

Zur Lösung von Aufgabe a) betrachten wir  $g(x) = A \cdot (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ . Es sei  $h(x) = A(x - a)(x - b)(x - c)$ . Die Bedingung  $h'(m) = 0$  führt auf die Gleichung

$$3m^2 - 2(a + b + c)m + (ab + ac + bc) = 0,$$

welche die beiden Lösungen

$$m_{1,2} = \frac{1}{3} \left( a + b + c \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc} \right)$$

---

besitzt. Es soll jetzt noch  $h(m) \neq 0$  gelten (sonst hat man eine der Nullstellen  $a$ ,  $b$  oder  $c$  erhalten oder man braucht 0 Newtonschritte). Ist  $a = b \neq c$ , so erweist sich  $m_1 = (a+2c)/3$  als einziger möglicher Wert, und im Fall  $a = b = c$  gibt es keine solche Zahl. Sind  $a$ ,  $b$  und  $c$  paarweise verschieden, ist es ebenfalls möglich, dass einer der Werte  $m_1$  oder  $m_2$  bereits mit der vierten Nullstelle von  $g$  übereinstimmt. Die Werte für  $m_{1,2}$  sind ja unabhängig von der vierten Nullstelle des Polynoms, und man kann deshalb bei einmal berechnetem  $m_{1,2}$  das Polynom  $(x-a)(x-b)(x-c)(x-m_1)$  wählen, bei welchem dann nur der Wert  $m_2$  als Startwert in Frage kommt.