

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 56 (2001)  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Februar 2002 an:

Hansruedi Widmer, Boldstrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

**Aufgabe 1171:** Es sei  $A = (a_{ij})$  eine normale nichtsymmetrische reelle  $3 \times 3$ -Matrix. Beweise, dass

$$\begin{pmatrix} a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} \\ a_{12} - a_{21} \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von  $A$  ist.

Lajos László, Budapest, H

**Aufgabe 1172:** Beweise: Das Inkreiszentrum eines Dreiecks liegt genau dann auf der Eulerschen Geraden, wenn das Dreieck gleichschenkelig ist.

Johannes M. Ebersold, St. Gallen, CH

**Aufgabe 1173 (Die einfache dritte Aufgabe):** Es sei  $A$  eine quadratische (reelle oder komplexe) Matrix, die die Gleichung  $A^2 = -A$  erfüllt. Zeige, dass zwischen dem Rang und der Spur der Matrix  $A$  die Beziehung  $\text{rk}(A) = -\text{tr}(A)$  besteht.

Götz Trenkler, Dortmund, D

### Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2000

**Aufgabe 1159.** Eine Folge  $(a_\ell)$  reeller Zahlen heisse quotientenkonstant, wenn für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}$$

gilt. Man zeige: Zu jeder natürlichen Zahl  $n$  gibt es ein Polynom  $f_n$  vom Grad  $n$  mit ganzzahligen Koeffizienten, so dass die Folge  $(a_\ell) := (f_n(\ell))$  quotientenkonstant ist. Bestimme für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein solches Polynom  $f_n$ .

Ernst Herrmann, Siegburg, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 18 Zuschriften eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Patrik Hubschmid (Spiegel, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Neuss, D), Joachim Klose (Bonn, D), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Beat Schwein-gruber (Zürich, CH), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), 2 Lösungen waren nicht gezeichnet.

Die folgenden Überlegungen ergeben sich durch Kombination der Lösungen von *O.P. Lossers* und *Walter Burgherr*: Weil  $a_1/a_2 = -1$  unmöglich ist, lässt sich die Bedingung der Quotientenkonstanz auch als

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{a_1 + \dots + a_k}{a_1 + \dots + a_{2k}} \quad (1)$$

schreiben. Gibt es nun ein Polynom  $f_n$ , so dass die Glieder der Ausgangsfolge durch  $(a_\ell) = (f_n(\ell))$  gegeben sind, lassen sich auch die Summen  $a_1 + a_2 + \dots + a_k$  durch ein Polynom  $F_{n+1}$  (vom Grad  $n+1$ ) erzeugen:

$$F_{n+1}(k) = a_1 + a_2 + \dots + a_k, \quad (2)$$

wobei zwischen  $f_n$  und  $F_{n+1}$  der Zusammenhang

$$f_n(k) = F_{n+1}(k) - F_{n+1}(k-1) \quad (3)$$

besteht. Weil für dieses Polynom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}(2x)}{F_{n+1}(x)} = 2^{n+1}$$

gilt, folgt zusammen mit (1), dass für  $x = 1, 2, \dots$  die Beziehung

$$F_{n+1}(2x) - 2^{n+1}F_{n+1}(x) = 0$$

gelten muss, und durch einen einfachen Koeffizientenvergleich ergibt sich  $F_{n+1} = \alpha \cdot x^{n+1}$ . Zusammen mit (3) erhält man

$$f_n(x) = \alpha \cdot (x^{n+1} - (x-1)^{n+1}) = \alpha \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} x^k.$$

Es bereitet keine Mühe nachzuweisen, dass diese Polynome tatsächlich quotientenkonstante Folgen erzeugen.

**Aufgabe 1160.**  $S_n = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  sei ein  $n$ -Tupel natürlicher Zahlen, welche der Bedingung

$$\sum_{j=1}^{\ell} s_j \leq k \cdot \ell + r, \quad (k \geq 2, r \geq 0; \ell = 1, 2, \dots, n)$$

genügen. Bestimme die Anzahl  $a(n, k, r)$  solcher  $n$ -Tupel.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 10 Zuschriften eingetroffen, 2 davon waren nicht gezeichnet: Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Patrik Hubschmid (Spiegel, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D).

Mehrere Lösungen enthielten Fehler. Der am häufigsten beschrittene Weg hatte als Ausgangspunkt eine Rekursionsformel, welche anschliessend in einen Induktionsbeweis eingebaut wurde. Eine der ungezeichneten Lösungen enthielt eine rein kombinatorische Überlegung:

Vorerst lassen wir  $s_j = 0$  zu. Die Menge der zulässigen  $n$ -Tupel  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  entspricht bijektiv der Menge der  $(n+1)$ -Tupel

$$(\underbrace{s_1, s_2, \dots, s_n}_{\text{zulässig}}, k(n+1) + r + 1 - \sum_{j=1}^n s_j).$$

Mit der Deutung „ $s_1$  nach rechts, 1 nach oben,  $s_2$  nach rechts, 1 nach oben, usw.“ können wir die Menge dieser  $(n+1)$ -Tupel auffassen als Menge der minimalen Gitterpunktwege von  $(0, 0)$  nach  $(k(n+1) + r + 1, n)$ , welche – ausser im Endpunkt – die Gerade  $x = ky + k + r + 1$  meiden. Die Aufgabe, solche Wege zu zählen, ist ein wohlbekanntes Problem, das sich rein kombinatorisch lösen lässt. Man findet

$$\tilde{a}(n, k, r) = \frac{k+r+1}{n} \binom{(k+1)(n+1) + r - 1}{n-1}.$$

Ist der Begriff „natürliche Zahl“ so zu verstehen, dass 0 nicht erlaubt ist, ist  $k$  durch  $k-1$  zu ersetzen, und es ergibt sich

$$a(n, k, r) = \frac{k+r}{n} \binom{k(n+1) + r - 1}{n-1}.$$

**Aufgabe 1161 (Die einfache dritte Aufgabe).** Die Elemente von

$$\mathbb{P}_n = \{x \mid x \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\} \text{ mit } \text{ggT}(x, n) = 1\}$$

bilden bekanntlich bezüglich der Multiplikation modulo  $n$  eine kommutative Gruppe, die sogenannte prime Restklassengruppe modulo  $n$ . Sind  $\mathbb{P}_{15}$  und  $\mathbb{P}_{16}$  isomorph? Wie steht es mit  $\mathbb{P}_{20}$  und  $\mathbb{P}_{24}$ ?

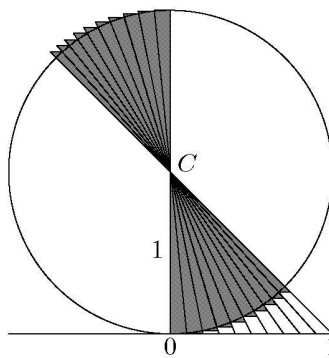
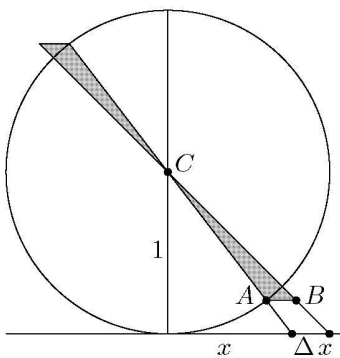
Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 18 Zuschriften eingetroffen, zwei davon waren nicht gezeichnet: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Patrik Hubschmid (Spiegel, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Neuss, D), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Karl Stoop (Stettlen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D).

Die meisten Einsender studieren die Ordnung der Elemente der einzelnen Gruppen. *Karl Stoop* argumentiert wie folgt: Alle Elemente von  $\mathbb{P}_{24}$  haben die Ordnung 2, in den anderen drei Gruppen hat es auch Elemente höherer Ordnung; also ist  $\mathbb{P}_{24}$  zu keiner der anderen Gruppen isomorph. Hingegen gilt  $\mathbb{P}_{15} \cong \mathbb{P}_{16}$ ,  $\mathbb{P}_{16} \cong \mathbb{P}_{20}$  und  $\mathbb{P}_{15} \cong \mathbb{P}_{20}$ . Mögliche Isomorphismen bestehen gemäss der Tabelle

|                   |   |   |    |    |   |    |    |    |
|-------------------|---|---|----|----|---|----|----|----|
| $\mathbb{P}_{15}$ | 1 | 2 | 7  | 11 | 4 | 8  | 13 | 14 |
| $\mathbb{P}_{16}$ | 1 | 3 | 5  | 7  | 9 | 11 | 13 | 15 |
| $\mathbb{P}_{20}$ | 1 | 3 | 13 | 11 | 9 | 7  | 17 | 19 |

**Nachtrag zu Aufgabe 1155.** Nachträglich ist von Gerhard Wanner (Genf, CH) eine Lösung eingetroffen, die wir unseren Leserinnen und Lesern nicht vorenthalten möchten. Es geht darum, mit elementaren Mitteln den Wert des Integrals  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  zu bestimmen.



Nach Pythagoras ist das Dreieck  $ABC$  in der Figur links um den Faktor  $1/\sqrt{1+x^2}$  kleiner als das ähnliche Dreieck mit Grundlinie  $\Delta x$  und Höhe 1. Somit haben die beiden grauen Dreiecke zusammen die Fläche

$$F = \frac{\Delta x}{1+x^2}.$$

Wenn man nun das Intervall  $[0, 1]$ , wie in der Integralrechnung üblich, in kleine Stücke zerteilt, dann füllen die entsprechenden Dreiecke gerade zwei Achtel des Kreises (siehe rechtes Bild), und somit ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi/4.$$

Wer keine Angst vor dem Unendlichen hat, der sieht auch, dass wir mit  $x$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  gerade den *ganzen* Kreis ausfüllen; also gilt auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$