Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 55 (2000)

Artikel: Über das 3n + 1 Problem

Autor: Wirsching, Günther J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5637

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über das 3n+1 Problem

Günther J. Wirsching

Günther Wirsching wurde 1960 in Würzburg geboren. Er studierte 1979 bis 1985 in München und Bonn Mathematik, Physik und Philosophie. Seine Forschungen in der Mathematik begann er mit einer Diplomarbeit zur homologischen Algebra und Kategorientheorie. Im Frühjahr 1990 wurde er in Eichstätt mit einer Dissertation zur Differentialgeometrie promoviert. Danach wandte er sich verstärkt der diskreten Mathematik und insbesondere den diskreten dynamischen Systemen zu. Seit 1996 arbeitet er an der Universität Eichstätt als Dozent für Mathematik. In seiner Freizeit spielt er oft klassische Musik auf seiner Gitarre.

Zu den interessantesten mathematischen Problemen gehören zweifellos diejenigen, die einfach zu formulieren sind, aber dennoch für lange Zeit allen Anstrengungen zu ihrer Lösung widerstehen. Von dieser Art ist das folgende 3n+1 Problem: Sei

$$(1) \hspace{1cm} f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,, \qquad f(n) := \left\{ \begin{array}{ll} n/2 & \text{ für gerade } n \;, \\ 3n+1 & \text{ für ungerade } n \;. \end{array} \right.$$

Wählt man eine Startzahl $s \in \mathbb{N}$, so erhält man durch Iteration von f die sogenannte f-Trajektorie der gewählten Startzahl s:

$$\mathcal{T}_f(s) := (s, f(s), f(f(s)), \dots, f^k(s), \dots).$$

Beispielsweise ergibt s = 13 die f-Trajektorie

$$\mathcal{T}_f(13) = (13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots),$$

die sich offensichtlich periodisch fortsetzt, mit der Periode (4,2,1). Verblüffenderweise haben alle Startzahlen, die bis jetzt getestet wurden, diese Eigenschaft, daß ihre

Wie der Autor des nachfolgenden Beitrags einleitend bemerkt, gehört das 3n+1 Problem zu denjenigen interessanten mathematischen Fragestellungen, welche sich einfach formulieren lassen, aber dennoch für lange Zeit allen Anstrengungen zu ihrer Lösung widerstehen. In seinem Beitrag gibt G.J. Wirsching eine leicht verständliche Einführung in das 3n+1 Problem, er stellt weiter eine sehr schöne Übersicht über zum Teil unerwartete Zusammenhänge der 3n+1 Vermutung mit anderen Vermutungen zusammen und führt schliesslich den Leser an die aktuelle Forschung zu diesem Problem heran.

f-Trajektorie mit der Periode (4,2,1) endet. Diese Beobachtung führt fast unweigerlich zu der bis heute noch nicht bewiesenen

3n+1 **Vermutung** Zu jeder Startzahl $s \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(s)=1$.

Interessant ist in diesem Zusammenhang die Startzahl s=27: ihre f-Trajektorie steigt nach 70 Schritten auf das Maximum $f^{70}(27)=9232$, erst nach 111 Schritten erreicht sie die Zahl 1. Die Trajektorie der Startzahl 27 hat ein extremes Verhalten; es wäre interessant zu wissen, für welche Startzahlen die f-Trajektorie sich sonst noch irgendwie extrem verhält. G.T. Leavens und M. Vermeulen sind vor ein paar Jahren einigen dieser Fragen mit sorgfältiger Begriffsbildung und Computerhilfe ein Stück weit nachgegangen [11]. Sie nennen eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Spitze (peak) einer Funktion $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, wenn $\varphi(n) > \varphi(k)$ für k < n gilt. Uns interessieren hier etwa die Funktionen

$$max_value(n) := \sup\{f^k(n) : k \in \mathbb{N}_0\},$$

 $steps(n) := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : f^k(n) = 1\}.$

(Läßt man $+\infty$ als Funktionswert zu, und vereinbart man inf $\emptyset = +\infty$, so sind steps(n) und $max_value(n)$ auch dann wohldefiniert, wenn die 3n+1 Vermutung falsch sein sollte.) Leavens und Vermeulen haben nun insgesamt etwa 10 CPU-Jahre Rechenzeit – parallel auf verschiedenen Maschinen – dafür aufgewendet, Spitzen verschiedener Funktionen φ zu bestimmen, darunter max_value und steps. Beispielsweise sind folgende alle Zahlen < 5 Millionen, die sowohl bez. max_value als auch bez. steps Spitzen sind [11]:

Insgesamt fanden sie im Bereich $n < 5\,000\,000$ genau 34 Spitzen von max_value und 51 Spitzen von steps.

1 Collatz-Graphen und der Ursprung der 3n+1 Vermutung

Der Ursprung der 3n+1 Vermutung ist nicht präzise datierbar, da uns keine schriftlichen Quellen aus der mutmaßlichen Entstehungszeit – etwa Anfang der 30er Jahre unseres Jahrhunderts – vorliegen. Andererseits ist es ziemlich plausibel, daß dieses Problem auf Lothar Collatz zurückgeht: von ihm stammt nämlich eine 1986 in China (und auf chinesisch) publizierte Arbeit [4] (Prof. Meinardus aus Mannheim hat mir freundlicherweise eine Kopie dieser chinesischen Arbeit sowie eine posthum angefertigte deutsche Rückübersetzung zur Verfügung gestellt), in der er seinen heuristischen Weg zur 3n+1 Vermutung beschreibt. Danach begann er damit, Funktionen $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch Graphen zu repräsentieren. Dabei stellte er sich den Definitionsbereich $D:=\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$ als Eckenmenge vor und dachte sich für jedes $n\in D$ einen Pfeil von n nach g(n) gezeichnet. Dieser (gerichtete) Graph, bezeichnen wir ihn mit Γ_g , wurde später von J.C. Lagarias Collatz-Graph von g genannt [10]. Die g-Trajektorien, d.h. die Folgen natürlicher Zahlen, die aus einer Startzahl durch wiederholtes Ausführen von g entstehen, sind dann gerade die (einseitig nach rechts) unendlich langen Wege im Collatz-Graphen Γ_g .

Collatz experimentierte nun ein bißchen mit seiner Graph-Darstellung ganzzahliger Funktionen. Insbesondere versuchte er, Graphen mit gewissen vorgegebenen Eigenschaften

zu konstruieren. Z.B. ist der Graph Γ_{φ} , wobei $\varphi(n) := n+1$ die Nachfolgerfunktion ist, eher langweilig; er besteht nämlich nur aus einem einzigen, unendlich langen Weg

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow \dots$$

Auf der Suche nach einer Funktion $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, deren Graph einen Kreis enthält, benutzte er die (einfache) Erkenntnis, daß diese Funktion f auf einer gewissen Teilmenge $D_+\subset\mathbb{N}$ die Relation f(n)>n und auf einer anderen Teilmenge $D_-\subset\mathbb{N}$ die entgegengesetzte Relation f(n)< n erfüllen muß. Was liegt näher, als für D_+ die ungeraden und für D_- die geraden Zahlen zu wählen? (Man beachte, daß $1\in D_-$ nicht möglich ist.) Probieren wir mal:

$$\widehat{f}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\,,\qquad \widehat{f}(n):=\left\{ \begin{matrix} n/2 & \text{ für gerade } n\;,\\ n+1 & \text{ für ungerade } n\;. \end{matrix} \right.$$

Ein Teil des Collatz-Graphen $\Gamma_{\widehat{f}}$ sieht etwa so aus:

$$1 \leftrightarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 8 \leftarrow 16 \leftarrow \dots$$

$$3 \leftarrow 6 \leftarrow \dots \qquad 7 \leftarrow 14 \leftarrow \dots$$

$$5 \leftarrow 10 \leftarrow 20 \leftarrow 40 \leftarrow \dots$$

$$9 \leftarrow 18 \leftarrow 36 \leftarrow \dots$$

Man verifiziert leicht:

$$\widehat{f}(\widehat{f}(n)) = \left\{ \begin{matrix} n/4 & \text{ für } n \equiv 0 \bmod 4 \\ (n+1)/2 & \text{ für } n \equiv 1 \bmod 2 \\ n/2+1 & \text{ für } n \equiv 2 \bmod 4 \end{matrix} \right\} \quad < n \qquad \text{ für } \quad n > 2 \, .$$

Daher besitzt $\Gamma_{\widehat{f}}$ nur den Zykel (oder Kreis) (1,2), und $jede\ \widehat{f}$ -Trajektorie endet mit diesem Zykel. Das ist noch ziemlich einfach.

Der nächste Versuch, $\widetilde{f}(n):=n/2$ für gerade n und $\widetilde{f}(n):=2n+1$ für ungerade n, ergibt den Collatz-Graphen $\Gamma_{\widetilde{f}}$, von dem ein Teil etwa folgendermaßen aussieht:

$$2 \leftarrow 4 \leftarrow 8 \leftarrow \dots \qquad 10 \leftarrow 20 \leftarrow 40 \leftarrow \dots$$

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 15 \rightarrow \dots \qquad 5 \rightarrow 11 \rightarrow 23 \rightarrow 47 \rightarrow \dots$$

$$6 \leftarrow 12 \leftarrow \dots \qquad 22 \leftarrow 44 \leftarrow \dots$$

In diesem Fall ist klar, daß \widetilde{f} jede ungerade Zahl auf eine größere ungerade Zahl abbildet, weswegen sich kein Zykel ausbilden kann. Der Graph $\Gamma_{\widetilde{f}}$ besteht aus unendlich vielen baumartigen Zusammenhangskomponenten. Jeder Weg in $\Gamma_{\widetilde{f}}$ läßt sich in beide Richtungen unendlich weit fortsetzen.

Der dritte Versuch ist die in (1) definierte Funktion f. Hier könnte der Collatz-Graph durchaus zusammenhängend sein:

$$21 \leftarrow 42 \leftarrow \dots \qquad 85 \leftarrow 170 \leftarrow \dots$$

$$2 \leftarrow 4 \leftarrow 8 \leftarrow 16 \leftarrow 32 \leftarrow 64 \leftarrow 128 \leftarrow 256 \leftarrow 512 \leftarrow \dots$$

$$\downarrow \nearrow \qquad \qquad \uparrow$$

$$1 \qquad 5 \leftarrow 10 \leftarrow 20 \leftarrow 40 \leftarrow 80 \leftarrow 160 \leftarrow 320 \leftarrow \dots$$

$$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$$

$$12 \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow$$

$$13 \leftarrow 34 \leftarrow \dots \qquad 35 \leftarrow 70$$

$$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$$

$$24 \qquad \qquad \downarrow \uparrow$$

$$11 \leftarrow 22 \leftarrow \qquad 23 \leftarrow \qquad 23 \leftarrow \qquad 11 \leftarrow 22 \leftarrow \qquad 11 \leftarrow \qquad 11$$

Collatz fand nur den "trivialen Kreis" (4,2,1), war jedoch nicht in der Lage zu zeigen, daß jede f-Trajektorie in diesen trivialen Kreis hineinmündet. Er schreibt, er habe seine Ideen deshalb nicht veröffentlicht, weil er nicht beweisen konnte, daß der "triviale Kreis" der einzige sei.

Unabhängig davon entdeckte der englische Mathematiklehrer Bryan Thwaites am Montag, dem 21. Juli 1952 um 4 Uhr nachmittags das 3n + 1 Problem [17]; er nennt die 3n + 1 Vermutung seitdem *Thwaites' conjecture*, abgekürzt TC, und er bot 1000 £ für einen Beweis (siehe [10]).

Collatz erzählte, als er 1952 nach Hamburg kam, seinem Kollegen Helmut Hasse von diesem 3n+1 Problem. Dieser verbreitete es wenig später während eines Gastaufenthalts an der Syracuse University, wo die Iteration der Collatzschen Funktion den Namen Syracuse-Algorithmus bekam. Nach besonders aktiven Multiplikatoren wurde das 3n+1 Problem auch noch als Kakutani's Problem oder Ulam's Problem bezeichnet.

Seit Mitte der 70er Jahre wird das 3n+1 Problem zunächst vereinzelt in der mathematischen Fachliteratur behandelt, etwa bei Nievergelt et al. (1974) [12], Terras (1976) [15] oder Crandall (1978) [5]. Ab 1985 setzte, initiiert durch einen Überblicksartikel von J.C. Lagarias in der Zeitschrift *American Mathematical Monthly* [10], eine enorme Steigerung des mathematischen Interesses ein. Bis heute sind mehr als 70 Forschungsaufsätze und eine Forschungsmonographie [19] zum 3n+1 Problem erschienen, sowie viele weitere eher populäre Darstellungen des Problems. Darüber hinaus gibt es Ansätze, das 3n+1 Problem zu didaktischen Zwecken in den Mathematik- oder Informatikunterricht einzubeziehen [7].

2 Einführung in die mathematische Behandlung des 3n+1 Problems

Viele Autoren betrachten das 3n+1 Problem als "intractable", und diese Einschätzung könnte durchaus richtig sein. Andererseits ist kein mathematisches Problem so unbehandelbar, daß sich nichts Interessantes dazu sagen ließe. Gerade um das 3n+1 Problem herum gibt es eine Menge interessanter Mathematik, von deren schönsten Ergebnissen ich Ihnen hier etwas präsentieren möchte.

Wie findet man nun etwas Interessantes über ein "nicht behandelbares" Problem heraus? Es empfiehlt sich eine dreifache Strategie:

- 1. Man übersetze die Vermutung in eine andere mathematische Sprache.
- 2. Man versuche, eine interessante schwächere Vermutung zu beweisen.
- 3. Man warte auf geniale Ideen.

Ein einfaches Beispiel für die erste Strategie ist Ihnen sicher schon bei der Definition des Collatz-Graphen aufgefallen. Es gilt nämlich ganz offensichtlich die Äquivalenz:

Die 3n+1 Vermutung ist richtig \iff der Collatz-Graph Γ_f ist zusammenhängend.

Weniger trivial ist folgendes Resultat:

Satz 2.1 (Berg und Meinardus 1994 [2]). Die 3n+1 Vermutung ist zu folgender Aussage äquivalent: Alle in der komplexen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ holomorphen Lösungen h der Funktionalgleichung

$$(*) h(z^3) = h(z^6) + \frac{1}{3z} (h(z^2) + \lambda h(\lambda z^2) + \lambda^2 h(\lambda^2 z^2)),$$

wobei $\lambda := e^{2\pi i/3}$ eine (primitive) dritte Einheitswurzel bezeichnet, haben die Gestalt

$$h(z) = h_0 + \frac{h_1 z}{1 - z}$$
, mit Konstanten $h_0, h_1 \in \mathbb{C}$.

Beweis. Sei $h: \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, also in Potenzreihe entwickelbar:

(P)
$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$$
 mit Taylor-Koeffizienten $h_n \in \mathbb{C}$.

Wir zeigen, daß h genau dann eine Lösung von (*) ist, wenn die Taylor-Koeffizienten h_n ein "erstes Integral" des durch f erzeugten dynamischen Systems auf $\mathbb N$ bilden; d.h., wenn die Funktion

$$\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
, $n \mapsto h_n$

auf jeder f-Trajektorie konstant ist. Das bedeutet, wir müssen zeigen, daß die Aussage

$$(**)$$
 $h_n = h_{f(n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

äquivalent zur Funktionalgleichung (*) ist. Daraus folgt dann sofort die Behauptung: Der Collatz-Graph Γ_f ist genau dann zusammenhängend, wenn jede f-Trajektorie die Eins enthält. In diesem Fall ist obige Funktion τ genau dann auf den f-Trajektorien konstant, wenn $h_n = h_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Das konstante Glied h_0 der Taylor-Reihe kann unabhängig davon beliebig gewählt werden.

Die Funktionalgleichung (*) ist äquivalent zum System der beiden Gleichungen

(i)
$$h(z) + h(-z) = 2h(z^2)$$
,

(ii)
$$h(z^3) - h(-z^3) = \frac{2}{3z} (h(z^2) + \lambda h(\lambda z^2) + \lambda^2 h(\lambda^2 z^2)).$$

Man erhält (i) aus (*), indem man in (*) für z einmal z und einmal -z einsetzt, die beiden Gleichungen addiert und schließlich z^3 durch z ersetzt. (*) führt zu (ii), wenn man wiederum einmal z und einmal -z einsetzt und anschließend die beiden Gleichungen subtrahiert. Umgekehrt erhält man (*) aus (i) und (ii), indem man zunächst in (i) z^3 für z einsetzt, sodann die beiden Gleichungen addiert und schließlich noch durch 2 dividiert.

Setzt man in (i) die Potenzreihe (P) ein, so erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 h_{2n} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2 h_n z^{2n} ,$$

also durch Koeffizientenvergleich die Äquivalenz

(i)
$$\iff$$
 $h_{2n} = h_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Einsetzen der Potenzreihenentwicklung in (ii) ergibt für die linke Seite

(iii)
$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(z^{3n} - (-z^3)^n) = \sum_{k=0}^{\infty} 2 h_{2k+1} z^{6k+3} ,$$

und für die rechte Seite

(iv)
$$\frac{2}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} h_n (1 + \lambda^{n+1} + \lambda^{2n+2}) z^{2n} = \frac{2}{3z} \sum_{k=0}^{\infty} 3 h_{3k+2} z^{6k+4} = \sum_{k=0}^{\infty} 2 h_{3k+2} z^{6k+3} ;$$

hierbei wurde folgender Sachverhalt ausgenutzt:

$$1 + \lambda^{n+1} + \lambda^{2n+2} = \begin{cases} 3 & \text{falls } n \equiv 2 \mod 3, \\ 0 & \text{falls } n \not\equiv 2 \mod 3, \end{cases}$$

welcher sofort aus den bekannten Relationen $\lambda^3=1$ und $1+\lambda+\lambda^2=0$ folgt.

Durch Koeffizientenvergleich in (iii) und (iv) erhält man die Äquivalenz

(ii)
$$\iff$$
 $h_{2k+1} = h_{3k+2}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Beachtet man noch f(2k+1)=3(2k+1)+1=6k+4=2(3k+2), so folgt $(*)\Leftrightarrow (**)$, und der Beweis des Satzes ist erbracht.

Bei diesem Satz ist es weniger interessant, daß die Funktionen der Gestalt

$$h(z) = h_0 + h_1 \frac{z}{1-z}$$

Lösungen von (*) sind; das läßt sich leicht nachrechnen. Viel interessanter ist die Frage, ob das *alle* Lösungen sind. Ein Resultat in diese Richtung, das Berg und Meinardus mit funktionentheoretischen Methoden beweisen, besagt: Jede *ganze* Funktion h, die eine Lösung von (*) ist, ist konstant. Der Beweis, daß *alle* Lösungen besagte Gestalt haben, scheint jedoch so schwierig zu sein wie die 3n+1 Vermutung selbst.

Bezüglich der zweiten der oben genannten Strategien könnte man sich etwa folgende "intermediäre" Vermutung denken:

Nur-endlich-viele-Zykel-Vermutung Es gibt nur endlich viele f-Zykel.

Da jeder Zykel nur aus endlich vielen verschiedenen Zahlen bestehen kann, läßt sich die Nur-endlich-viele-Zykel-Vermutung auch so ausdrücken:

Nur-endlich-viele-zyklische-Zahlen-Vermutung Die Anzahl der zyklischen Zahlen $z \in \mathbb{N}$ (das sind solche, für die es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f^n(z) = z$ gibt) ist endlich.

Diese "Zwischenvermutung" ist bislang ebenfalls unbewiesen. Dennoch gibt es Teilresultate. Im Jahre 1978 konnte R.P. Steiner zeigen, daß es nur einen einzigen Zykel gibt, der gleichzeitig ein *Kreislauf* ist.

Um zu verstehen, was mit einem Kreislauf gemeint ist, müssen wir uns die f-Trajektorien zunächst etwas genauer anschauen, etwa

$$\mathcal{T}_f(27) = (27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, \ldots).$$

Jedesmal, wenn wir bei einer ungeraden Zahl angelangt sind, ist der Nachfolger gerade. Das muß so sein: 3n+1 ist stets gerade, wenn n ungerade ist. Daher liegt es nahe, die Trajektorien zu "verkürzen", ohne etwas Wesentliches zu verlieren, indem man die Collatz-Funktion f durch folgende Funktion ersetzt:

(2)
$$T: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad T(n) := \begin{cases} T_0(n) := \frac{n}{2} & \text{für gerade } n, \\ T_1(n) := \frac{3n+1}{2} & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

Es hat sich in der Forschungsliteratur mittlerweile eingebürgert, diese Funktion die 3n+1 Funktion zu nennen und sie mit T zu bezeichnen. Eine T-Trajektorie

$$\mathcal{T}_T(s) = (s, T(s), T^2(s), \dots, T^k(s), \dots)$$

entsteht aus der entsprechenden f-Trajektorie $\mathcal{T}_f(s)$ mit der gleichen Startzahl $s \in \mathbb{N}$ dadurch, daß man jeweils die einer ungeraden Zahl nachfolgende Zahl wegläßt.

Ein Kreislauf ist nun ein endliches Stück einer T-Trajektorie der Gestalt

$$x \xrightarrow{T_1} \dots \xrightarrow{T_1} y \xrightarrow{T_0} \dots \xrightarrow{T_0} z$$
,

d.h. wir haben einen Anstieg von x nach y, etwa in k Schritten des Typs T_1 , und danach einen Abstieg von y nach z, etwa in ℓ Schritten des Typs T_0 . Anders ausgedrückt: die Zahlen $x, T(x), \ldots, T^{k-1}(x)$ sind ungerade, die Zahlen $y, T(y), \ldots, T^{\ell-1}(y)$ sind gerade, und es gelten die Relationen

$$y = T^k(x) = T_1^k(x)$$
 und $z = T^{\ell}(y) = T_0^{\ell}(y)$.

Die erste dieser Relationen ist gleichbedeutend mit

(3)
$$2^{k}(y+1) = 3^{k}(x+1),$$

wie man leicht per Induktion nach k zeigen kann, und die zweite Relation bedeutet einfach $2^{\ell}z=y$. Offensichtlich ist der bekannte T-Zykel (1,2) ein Kreislauf, mit den Schrittzahlen $k=\ell=1$.

Da 2^k und 3^k klarerweise teilerfremd sind, folgt aus der Beziehung $2^k(y+1) = 3^k(x+1)$, daß die Zahl

$$h := \frac{x+1}{2^k} = \frac{y+1}{3^k}$$

jedenfalls eine ganze Zahl sein muß. Zudem läßt sich x durch h ausdrücken: $x=2^kh-1$. Beachtet man noch $y=2^\ell z$, so folgt aus der Zykel-Bedingung z=x sofort $y=2^\ell x$, und man erhält für h die Beziehung

$$h = \frac{y+1}{3^k} = \frac{2^\ell x + 1}{3^k} = \frac{2^\ell (2^k h - 1) + 1}{3^k}$$
.

Das ergibt eine exponentiell Diophantische Gleichung für die Zahlen k, ℓ und h:

(4)
$$(2^{k+\ell} - 3^k) h = 2^{\ell} - 1.$$

Umgekehrt ergibt jede Lösung (k, ℓ, h) dieser Gleichung mit *natürlichen Zahlen* $k, \ell, h \in \mathbb{N}$ einen T-Zykel, der zudem ein Kreislauf ist: man setze einfach $x := 2^k h - 1$ und $y := 2^\ell x$. Dies ergibt dann zusammen mit Gleichung (4):

$$3^{k}(x+1) = 3^{k}(2^{k}h) = 2^{k}(3^{k}h) = 2^{k}(2^{k+\ell}h - 2^{\ell} + 1) = 2^{k}(2^{\ell}x + 1) = 2^{k}(y+1),$$

und das ist gerade Gleichung (3), welche den Anstieg in k Schritten $y = T^k(x) = T_1^k(x)$ bedeutet.

Diese Beobachtung stammt von J.L. Davison (1976) [6]. Ein Jahr später präsentierte dann Steiner auf einer Tagung einen Beweis, daß die Gleichung (4) in den natürlichen Zahlen nur die Lösung $k=\ell=h=1$ zuläßt [14]. Steiners Beweis beruht einerseits auf der Kettenbruchentwicklung der reellen Zahl $\log_2 3$ und andererseits auf tiefliegenden Methoden der analytischen Zahlentheorie, nämlich Alan Bakers Abschätzungen von "Linearformen in Logarithmen".

3 Ist eine 3n+1 Trajektorie eine Irrfahrt?

Beginnt man damit, ein dynamisches System zu studieren – und die 3n+1 Funktion definiert ein dynamisches System auf den natürlichen Zahlen –, so empfiehlt es sich, zunächst einige Beispiele zu rechnen. Allerdings muß man die empirischen Daten dann sorgfältig interpretieren, denn Beispiele können auch in die Irre führen. In Abbildung 1 sind einige Anfangsstücke von T-Trajektorien mit zufällig gewählten Startzahlen aufgezeichnet. Betrachtet man diese Graphiken, so könnte man den Eindruck gewinnen, es handele sich um eine Irrfahrt mit einer leichten Drift nach unten (siehe Fig. 1). In der Tat kann man folgendes beweisen:

Satz 3.1 (Terras 1976 [15]). Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest gewählt. Durchläuft dann die Startzahl s genau einmal alle 2^n Restklassen modulo 2^n , so kommt jede mögliche n-stellige T_0 - T_1 -Folge genau einmal als n-schrittiges Anfangsstück einer der T-Trajektorien $\mathcal{T}_T(s)$ vor.

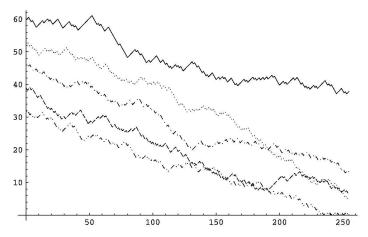


Fig. 1 Die ersten 255 Schritte einiger 3n + 1 Trajektorien. Hierbei ist nach rechts die Schrittnummer n in linearer Skalierung abgetragen, und nach oben die Iterierte $T^n(s)$ in logarithmischer Skalierung.

Damit lassen sich die ersten n Schritte von T-Trajektorien tatsächlich als Irrfahrt auf den natürlichen Zahlen deuten, wobei die Schritte T_0 und T_1 mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen – für eine *feste* Schrittzahl $n \in \mathbb{N}$ wohlgemerkt. Die Drift nach unten läßt sich auch leicht deuten: für große Zahlen n ist $T_1(n) \approx \frac{3}{2}n$, bei gleicher Wahrscheinlichkeit von T_1 und $T_0(n) = \frac{1}{2}n$ ist also im Durchschnitt pro Schritt mit einem Faktor

$$\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \quad \approx \quad 0,866$$

zu rechnen – jedenfalls bei den ersten n Schritten.

Diese stochastischen Überlegungen sind allerdings nicht für einen Beweis der 3n+1 Vermutung tauglich. Man muß sich nämlich folgendes vor Augen halten: die Stochastik erstreckt sich nur auf die ersten n Schritte. In diesem Anfangsstück – und nur dort – kommt jede denkbare T_0 - T_1 -Kombination mit gleicher Wahrscheinlichkeit vor, wenn man zunächst zufällig (d.h. mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit) eine Restklasse modulo 2^n bestimmt und dann aus dieser Restklasse irgendeine Zahl als Startzahl nimmt. Wie man an den Graphiken sieht, ist bei Zahlen der Größenordnung e^{30} bis e^{60} nach 200 Schritten jedoch in der Regel noch nicht die Zahl 1 erreicht. Daher bringt die Stochastik hier wenig; die 3n+1 Vermutung bezieht sich eher auf das asymptotische Verhalten der T-Trajektorien als auf die ersten n Schritte.

Andererseits konnte Terras, aufbauend auf vorigem Satz, noch eine weitere interessante mathematische Aussage beweisen. Sie bezieht sich auf die Menge der Startzahlen $s \in \mathbb{N}$, deren T-Trajektorie einmal unter den Startwert fällt,

$$F := \{ s \in \mathbb{N} : \text{ es gibt ein } k \in \mathbb{N}, \text{ so daß} \quad T^k(s) < s \}.$$

Die kleinste Schrittnummer k mit $T^k(s) < s$ nennt man gelegentlich die *Stoppzeit* (stopping time) von s und bezeichnet sie mit $\sigma(s)$. Die Menge F ist also die Menge der Startzahlen mit endlicher Stoppzeit; F steht für finite stopping time. Es gilt nun der bemerkenswerte

Satz 3.2 (Terras 1976, 1979 [15, 16]). Die Menge F hat asymptotische Dichte 1, d.h.

$$\lim_{x\to\infty} \quad \frac{1}{x} \left| \{s\in F : s\le x\} \right| \ = \ 1 \ .$$

Dieser Satz ist später von anderen Autoren noch mit anderen Methoden bewiesen und verschärft worden. Das bislang stärkste Resultat stammt von I. Korec (1994) [8], der wie Terras mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden arbeitete. Er ersetzte Terras' Menge F durch

$$M_c := \{ s \in \mathbb{N} : \text{ es gibt ein } k \in \mathbb{N}, \text{ so daß} \quad T^k(s) < s^c \},$$

wobei c eine reelle Zahl ist, und bewies

Satz 3.3 (Korec 1994 [8]). Für jede reelle Zahl $c > \log_4 3$ hat die Menge M_c asymptotische Dichte 1, d.h.

$$\lim_{x\to\infty} \quad \frac{1}{x} \left| \{ s \in M_c : s \le x \} \right| = 1.$$

4 Der Rückwärtsprozeß: Chaos und harte Analysis

Die mathematischen Schwierigkeiten bei der Untersuchung der Dynamik von 3n+1 Iterationen scheinen damit zusammenzuhängen, daß wir es mit einem deterministischen Prozeß zu tun haben, der stochastisches Verhalten simuliert (vgl. [10]). Das verbindet die Sache mit der mathematischen Behandlung des "Chaos". Analysiert man den Rückwärtsprozeß zur Iteration der 3n+1 Funktion – die Frage: wo können 3n+1 Trajektorien herkommen? –, so findet man in der Tat so etwas wie chaotisches Verhalten. Die hierzu nötigen mathematischen Methoden sind jedoch recht kompliziert (siehe [19]), so daß hier nur einige grundsätzliche Ideen dargestellt werden können.

Wir interessieren uns jetzt für die Abbildung T^{-1} , die jeder natürlichen Zahl $a \in \mathbb{N}$ die Menge ihrer unmittelbaren 3n+1 Vorgänger zuordnet. Aus der Definition der 3n+1 Funktion in (2) folgt sofort:

$$T^{-1}(a) = \begin{cases} \left\{ 2a, \frac{1}{3}(2a - 1) \right\} & \text{falls } a \equiv 2 \mod 3, \\ \\ \left\{ 2a \right\} & \text{falls } a \not\equiv 2 \mod 3. \end{cases}$$

Durch Iteration dieser Abbildung entstehen die T-Vorgängermengen:

$$\begin{split} \mathscr{P}_T(a) &:= \bigcup_{n=0}^\infty T^{-n}(a) = \{a\} \cup T^{-1}(a) \cup \ldots \cup T^{-n}(a) \cup \ldots \\ &= \left\{ b \in \mathbb{N} : \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } T^n(b) = a \right\} = \left\{ b \in \mathbb{N} : a \in \mathscr{T}_T(b) \right\}, \end{split}$$

sowie deren Zählfunktionen:

$$Z_a(x) := |\{n \in \mathcal{P}_T(a) : n \leq x\}|.$$

Im Fall $a \in \mathbb{N}$, $a \equiv 0 \mod 3$ kann man diese Mengen und deren Zählfunktion leicht explizit hinschreiben:

$$\mathscr{P}_T(a) = \{2^n \, a : n \in \mathbb{N}_0\}\,, \qquad ext{also} \qquad Z_a(x) = \left\lfloor \log_2 \frac{x}{a} \right\rfloor \quad ext{ für } x \in \mathbb{N}.$$

Die 3n+1 Vermutung selbst ist äquivalent zur Aussage $Z_1(x)=x$ für alle $x\in\mathbb{N}$. Da die 3n+1 Vermutung jedoch möglicherweise unbehandelbar ist, sollten wir uns mit schwächeren Resultaten über die Zählfunktionen zufriedengeben.

Interessant erscheint dabei das asymptotische Verhalten einer solchen Zählfunktion, etwa für den Parameter a=1, da diese Asymptotik etwas über die "Größe" der Vorgängermenge $\mathcal{P}_T(a)$ aussagt. Man könnte z.B. versuchen, "positive asymptotische Vorgängerdichte" für gewisse $a \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Damit ist folgendes gemeint:

PAD(a) Es gibt eine Konstante c > 0, so da $\beta Z_a(x) \ge c x$ für hinreichend große $x \in \mathbb{N}$.

(Hierbei steht **PAD** für "positive asymptotische Dichte".) Bislang ist **PAD**(a) noch für kein einziges $a \in \mathbb{N}$ gezeigt. Bewiesen ist jedoch, für gewisse Exponenten c < 1 und $a \in \mathbb{N}$ mit $a \not\equiv 0 \mod 3$, die schwächere Aussage:

 $\mathbf{Exp}_c(a)$ Für hinreichend große $x \in \mathbb{N}$ gilt $Z_a(x) \geq x^c$.

Im Jahre 1978 zeigte R.E. Crandall [5]: "Es gibt ein c > 0, so daß $\mathbf{Exp}_c(1)$ richtig ist". Dann wurde dieser Exponent schrittweise verbessert: über $c = \frac{1}{4}$ (Sander 1987 [13]), $c = \frac{3}{7}$ (Krasikov 1989 [9]) und c = 0.48 (Wirsching 1993 [18]), bis zu einem Computer-gestützten Beweis der Aussage:

Satz 4.1 (Applegate, Lagarias 1995 [1]). Für c = 0.81 ist $\mathbf{Exp}_c(a)$ für alle $a \not\equiv 0 \mod 3$ richtig.

Ein Ziel für weitere Forschungen in dieser Richtung könnte ein Beweis folgender Vermutung sein:

SPAD(a) Für jede reelle Konstante c mit 0 < c < 1 gilt $\mathbf{Exp}_c(a)$.

(SPAD steht für "sub-positive asymptotische Dichte".)

Mit Methoden der asymptotischen Analysis lassen sich mittlerweile Verbindungen zwischen subtilen Mischungseigenschaften der 3n+1 Funktion T auf der einen Seite und der Asymptotik von Zählfunktionen von 3n+1 Vorgängermengen auf der anderen Seite beweisen. Um dies genauer auszudrücken, suchen wir zunächst eine Formel, die in folgender Situation die Zahl $b \in \mathbb{N}$ ausrechnet:

(W)
$$b \longrightarrow T(b) \longrightarrow T^2(b) \longrightarrow \ldots \longrightarrow a = T^{k+\ell}(b)$$
,

hierbei seien $a \in \mathbb{N}$ und der Weg von b nach a im Collatz-Graphen Γ_T , der genau k Schritte des Typs T_0 und ℓ Schritte des Typs T_1 enthält, gegeben. Wir erhalten eine Vorgängerformel

$$b = rac{2^{k+\ell}}{3^\ell} a - \mathbf{Rest} \left(\mathrm{Weg \ von} \ b \ \mathrm{nach} \ a
ight),$$

wobei der **Rest** von der Struktur der T_0 - T_1 -Folge des Weges von b nach a abhängt.

Um eine Formel für $\mathbf{Rest}(\cdot)$ zu erhalten, numerieren wir zunächst die Kanten im Weg (W) von 0 bis $k+\ell-1$ durch. Genauer: für jedes $j\in\{0,\ldots,k+\ell-1\}$ erhält die Kante

$$T^{j}(b) \longrightarrow T^{j+1}(b)$$

die Nummer j. Wir bezeichnen jetzt mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_{\ell-1}$ die Nummern derjenigen Kanten, die vom Zweig T_1 der 3n+1 Funktion stammen, und zwar in umgekehrter Reihenfolge, d.h.

$$k+\ell > \alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_{\ell-1} \geq 0$$
.

Durch Induktion nach ℓ erhalten wir dann die *Restformel*:

$$\mathbf{Rest} \left(\text{Weg von } b \text{ nach } a \right) = \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{2^{\alpha_i}}{3^{\ell-j}} = \frac{1}{3^{\ell}} \left(2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_1} \, 3^1 + 2^{\alpha_2} \, 3^2 + \ldots + 2^{\alpha_{\ell-1}} \, 3^{\ell-1} \right).$$

Zusammgesetzt ergibt sich die Vorgängerformel:

(V)
$$b = \frac{1}{3^{\ell}} \left(2^{k+\ell} a - 2^{\alpha_0} - 2^{\alpha_1} 3^1 - 2^{\alpha_2} 3^2 - \ldots - 2^{\alpha_{\ell-1}} 3^{\ell-1} \right).$$

Um den Restterm intuitiv besser zu verstehen, betrachten wir noch einmal unsere 3n+1 Funktion T etwas genauer:

$$T:\mathbb{N} \to \mathbb{N}\,, \qquad T(n) = egin{cases} T_0(n) = rac{n}{2} & ext{ für gerade } n\;, \ T_1(n) = rac{3n+1}{2} & ext{ für ungerade } n\;. \end{cases}$$

Der "gerade Zweig" T_0 ist eine *lineare* Funktion von n, während der "ungerade Zweig" T_1 in Gestalt des "+1" eine gewisse *Nichtlinearität* aufweist. Die obige Restformel berechnet nun gerade die *akkumulierten Nichtlinearitäten* auf dem Weg von a zurück nach b.

Diese akkumulierten Nichtlinearitäten verhalten sich ziemlich chaotisch. Folgendes Resultat erinnert ein wenig an Satz 3.1:

Satz 4.2 (Wirsching 1998 [19]). Sei $\ell \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest gewählt. Durchläuft dann die Zahl $a \in \mathbb{N}$ genau einmal alle $2 \cdot 3^{\ell-1}$ primen Restklassen (d.h. $\not\equiv 0 \mod 3$) modulo 3^{ℓ} , so kommt jedes ℓ -Tupel $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{\ell-1}) \in \mathbb{N}_0^{\ell}$ mit $\alpha_0 > \ldots > \alpha_{\ell-1} \geq 0$ genau einmal in einer Vorgängerformel (V) vor.

Wir bezeichnen als nächstes für ganze Zahlen k,ℓ mit $k\geq 0$ und $\ell\geq 1$ folgende Menge von Summen gemischter Potenzen:

$${\mathscr G}_{k,\ell} := \left\{ \sum_{
u=0}^{\ell-1} 2^{lpha_
u} 3^
u \,\middle|\,\quad k+\ell > lpha_0 > lpha_1 > \ldots > lpha_{\ell-1} \geq 0
ight\}\,.$$

Die Elemente von $\mathcal{G}_{k,\ell}$ sind gerade alle möglichen, mit 3^{ℓ} multiplizierten, Restterme für fixierte k,ℓ . Man kann beweisen (vgl. [19], p. 126), daß verschiedene ℓ -Tupel $(\alpha_0,\ldots,\alpha_{\ell-1})$ zu verschiedenen Summen führen. Damit läßt sich die Kardinalität einer solchen Menge $\mathcal{G}_{k,\ell}$ leicht berechnen:

$$|{\mathscr G}_{k,\ell}| = {k+\ell \choose \ell}$$
 .

Beweis. Ein ℓ -Tupel $(\alpha_0,\ldots,\alpha_{\ell-1})$ mit $k+\ell>\alpha_0>\ldots>\alpha_{\ell-1}\geq 0$ ist gerade eine Auswahl von ℓ Zahlen aus der Menge $\{0,1,\ldots,k+\ell-1\}$.

Nun gibt es tiefliegende Zusammenhänge zwischen dem Konvergenzverhalten bestimmter inhomogener Markov-Ketten, dem Verhalten der Summen gemischter Potenzen, und Dichteabschätzungen für 3n+1 Vorgängermengen. Eine Konsequenz dieser Zusammenhänge ist der Reduktionssatz, der die oben beschriebene Vermutung $\mathbf{SPAD}(a)$ auf Verteilungseigenschaften der Mengen $\mathcal{G}_{k,\ell}$ zurückführt.

Ersetzen wir zunächst in $\mathcal{G}_{k,\ell}$ den Index ℓ durch ein j, da wir ℓ noch für andere Zwecke brauchen. Ein Element von $\mathcal{G}_{k,j}$ sieht dann so aus:

(S)
$$2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_1} 3 + 2^{\alpha_2} 3^2 + \ldots + 2^{\alpha_{j-1}} 3^{j-1}$$

mit $k+j>\alpha_0>\ldots>\alpha_{j-1}\geq 0$. Wir sind an der Verteilung dieser Summen, wenn alle zugelassenen j-Tupel $(\alpha_0,\ldots,\alpha_{j-1})$ durchlaufen werden, unter den Restklassen modulo 3^ℓ interessiert. Die erste Beobachtung ist, daß keines der Elemente von $\mathcal{G}_{k,j}$ durch 3 teilbar ist. Das bedeutet, jede Summe aus $\mathcal{G}_{k,j}$ ist in einer primen Restklasse modulo 3^ℓ enthalten. Die entscheidende – noch ungelöste – Frage lautet: Wie sind die Summen gemischter Potenzen aus $\mathcal{G}_{k,j}$ unter den $2\cdot 3^{\ell-1}$ primen Restklassen modulo 3^ℓ verteilt? Die natürliche Vermutung wäre, daß sich die Summen (S) ziemlich chaotisch verhalten, und daß sie irgendeine vorgegebene prime Restklasse weder bevorzugen noch vermeiden. Dies ist gerade die Essenz der folgenden Vermutung:

Vermutung über das Verhalten gemischter Potenzsummen Es gibt eine (große) Konstante K > 0 derart, daß für alle $j, \ell \in \mathbb{N}$ die folgende Implikation richtig ist:

$$|\mathcal{G}_{i,j}| \geq K \cdot 2 \cdot 3^{\ell-1} \implies \mathcal{G}_{i,j}$$
 trifft alle primen Restklassen modulo 3^{ℓ} .

Diese Vermutung erscheint ziemlich vernünftig: Angenommen, die Anzahl der Elemente von $\mathcal{G}_{j,j}$ ist so groß, daß man in jede einzelne prime Restklasse modulo 3^ℓ mindestens $K=10^{99}$ davon hineinstecken könnte, dann ist es doch ziemlich plausibel, daß in jeder dieser primen Restklassen wenigstens *eine* der Summen gemischter Potenzen liegt. Andernfalls wäre die Verteilung der Summen nicht so richtig chaotisch, denn sie würden die eine oder andere prime Restklasse sorgfältig vermeiden.

Nun gilt folgender:

Satz 4.3 (Reduktionssatz [19]). *Ist die Vermutung über das Verhalten von Summen gemischter Potenzen richtig, so gilt* **SPAD**(a) *für jedes* $a \in \mathbb{N}$ *mit* $a \not\equiv 0 \mod 3$.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf "harter Analysis", d.h. auf möglichst genauen asymptotischen Abschätzungen, in diesem Fall insbesondere von Binomialkoeffizienten. Daneben wird noch Integrationstheorie auf der kompakten topologischen Gruppe \mathbb{Z}_3^* der invertierbaren 3-adischen ganzen Zahlen benutzt.

Literatur

- [1] Applegate, D., Lagarias, J.C., Density Bounds for the 3x + 1 Problem II. Krasikov Inequalities, Math. Comp. 65 (1995), 427–438.
- [2] Berg, L., and Meinardus, G., Functional equations connected with the Collatz problem, Results in Math. 25 (1994), 1–12.
- [3] Berg, L., and Meinardus, G., The 3n+1 Collatz Problem and Functional Equations, Rostock Math. Kolloq. 48 (1995), 11-18.
- [4] Collatz, L., Über die Motivation des (3n+1)-Problems, J. Qufu Norm. Univ., Nat. Sci. 3 (1986), 9–11. (chinesisch)
- [5] Crandall, R.E., On the "3x+1" Problem, Math. Comp. 32 (1978), 1281-1292.
- [6] Davison, J.L., Some Comments on an Iteration Problem, Proc. 6th Manitoba Conf. Numerical Mathematics (1976), 155–159.
- [7] Glaser, H. und Weigand, H.-G., Das ULAM-Problem Computergestützte Entdeckungen, DdM 2 (1989), 114–134.
- [8] Korec, I., A density estimate for the 3x + 1 problem, Math. Slovaca 42 (1994), 85–89.
- [9] Krasikov, I., How many numbers satisfy the 3x + 1 conjecture?, Int. J. Math. Math. Sci. 12 (1989), 791–796.
- [10] Lagarias, J.C., The 3x + 1 Problem and its Generalizations, Amer. Math. Mon. 92 (1985), 1–23.
- [11] Leavens, G.T., and Vermeulen, M., 3x + 1 Search Programs, Comput. Math. Appl. 24 (1992), 79–99.
- [12] Nievergelt, J., Farrar, J.C., and Reingold, E.M., Computer approaches to mathematical problems, Prentice Hall, Inc., Englewood cliffs, N. J., 1974.
- [13] Sander, J.W., On the (3N+1)-Conjecture, Acta Arith. LV (1990), 241–248. (Das Resultat wurde bereits 1987 auf einer Konferenz in Ulm präsentiert.)
- [14] Steiner, R.P., A Theorem on the Syracuse Problem, Proc. 7th Manitoba Conf. Numerical Mathematics and Computing 1977 Winnipeg (1978), 155–159.
- [15] Terras, R., A stopping time problem on the positive integers, Acta Arith. XXX (1976), 241–252.
- [16] Terras, R., On the existence of a density, Acta Arith. XXXV (1979), 101-102.
- [17] Thwaites, B., My Conjecture, Bull., Inst. Math. Appl. 21 (1985), 35-41.
- [18] Wirsching, G.J., An improved estimate concerning 3n + 1 predecessor sets, Acta Arith. LXIII (1993), 205–210.
- [19] Wirsching, G.J., The Dynamical System Generated by the 3n + 1 Function, Springer Lecture Notes in Mathematics 1681, Berlin 1998.

Günther J. Wirsching

Katholische Universität Eichstätt

D-85071 Eichstätt

e-mail: guenther.wirsching@ku-eichstaett.de