Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 52 (1997)

Artikel: Fonctions extrémales et gain financier
Autor: Hürlimann, Werner
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-2669

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 52 (1997) 152 – 168
0013-6018/97/040152-17 $1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 1997

Elemente der Mathematik

Fonctions extrémales et gain financier

Werner Hürlimann

Werner Hürlimann, né en 1953, a étudié les mathématiques et la physique à l'Ecole Fédérale de Zürich, où il a obtenu son doctorat en 1980. Après des séjours à l'Université de Yale et Bonn, il est devenu collaborateur scientifique à la Winterthour-Vie en 1984. Il a été professeur visiteur associé en science actuarielle à l'Université de Toronto durant l'année 1988–89. Il a écrit de nombreux travaux de mathématiques pures et appliquées, notamment en algèbre et théorie des nombres, calcul des probabilités et statistiques, et science actuarielle et financière. Ses passe-temps incluent le jeu du tennis, la musique, la numérologie et la philatélie.

Introduction

Un bon nombre de facteurs, qui jouent un rôle important dans le domaine des assurances et de la finance, sont de nature stochastique, par exemple la durée de vie d'un individu ou le cours d'une action à la bourse. Il en résulte que le gain financier produit par les institutions financières est a priori une grandeur aléatoire. Souvent la forme exacte du processus, qui engendre le gain financier, mathématiquement sa fonction de répartition, n'est connu que de façon incomplète. Cela signifie que seul un nombre restreint de caractéristiques de sa fonction de répartition peuvent être estimées comme par exemple sa moyenne, son écart-type et son domaine de variation. Sous ces conditions, de quelle manière le gain financier peut-il varier, et comment les agents du marché financier peuvent-ils optimer leurs propres gains financiers? Cette simple question pose un problème scientifique fondamental, dont dépend en partie le bon fonctionnement de

Die mathematische Ökonomie und die Finanzmathematik haben im Laufe der letzten zwanzig Jahren stark an Bedeutung gewonnen. Neue theoretische Ansätze wurden entwickelt und haben zu praktischen Erkenntnissen geführt, die von Banken und Versicherungen in ihrem täglichen Geschäftsverhalten berücksichtigt werden. Nicht zuletzt wegen dieser Entwicklung sind die Banken heute zu einem wichtigen Arbeitgeber von Mathematikerinnen und Mathematikern geworden. — Werner Hürlimann gibt im vorliegenden Beitrag eine Einführung in das Gebiet der Finanzmathematik. Er konzentriert sich dabei vor allem auf Aussagen über den Erwartungswert und die Varianz der Gewinne und Verluste von Finanzinstrumenten, wenn gewisse unvollständige Informationen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Gewinne vorliegen. *ust*

l'économie. La branche qui s'occupe de tels problèmes est l'économie financière, une discipline bien établie dont l'origine principale remonte à Markowitz (1952/59/87), fondateur de la théorie moderne des portefeuilles et l'un des trois lauréats du prix Nobel 1990 en économie (les deux autres étant Miller et Sharpe).

Depuis le début des années 1970, les marchés financiers ont introduits peu à peu de nouveaux instruments financiers comme les options, contrats futurs, etc., connus sous le nom de "produits dérivés". L'existence de ces instruments financiers pose le problème crucial de l'évaluation et l'optimisation des gains financiers en leur présence. Du à une contribution séminale par Black et Scholes (1973) (le décès en août 1995 du premier auteur est profondémment ressenti par les adeptes mêmes des mathématiques pures comme le suggère l'article de Chichilnisky (1996)), l'économie financière a connu un essor formidable durant les vingt dernières années. Cependant il ne semble pas qu'à l'heure actuelle une méthodologie générale ait été développée et unanimement acceptée pour résoudre les problèmes mentionnés.

Cet article a pour objet d'introduire le mathématicien à quelques aspects élémentaires du problème ci-dessus, qui ont attirés l'attention de l'auteur ces dernières années. Etant donné le bagage traditionnel d'un mathématicien typique, la tâche posée par un tel projet demande des efforts assez divers. Il s'agit de décrire les termes financiers courants, d'expliquer et d'introduire leur modélisation par les mathématiques, et de présenter des résultats non triviaux, dont leurs dérivations restent accessibles pour un cercle de lecteurs aussi large que possible. Pour un livre de langue française, qui décrit les principaux outils mathématiques appliqués dans la théorie financière moderne, on peut consulter Roger (1991). En particulier nous renvoyons un lecteur non familier avec les notions mathématiques de cet article au chapitre 2 de cet ouvrage.

En ce qui concerne les termes financiers, nous utilisons la notion de *gain financier*, respectivement *perte financière*, dans son sens intuitif commun comme différence entre recettes (ou actifs) et dépenses (ou passifs), resp. différence entre dépenses et recettes. Le *gain absolu*, resp. la *perte absolue*, représente le gain financier, resp. la perte financière, lorsque celui-ci est non-négatif, resp. celle-ci strictement positive. Des situations particulières importantes, qui résultent de ces concepts incluent les notions de *contrat forward* et *contrat futur*, d'*option (financière)*, et de (réassurance) *stop-loss*. Un *contrat forward* est un arrangement entre deux partenaires à une date initiale pour la livraison d'un actif (p. ex. une action) à une date ultérieure T contre paiement du *prix du contrat* spécifié à la date initiale. La livraison de l'actif se fait contre paiement au temps T et, contrairement au *contrat futur*, aucun paiement intermédiaire n'a lieu. Le partenaire, qui a l'obligation d'acheter l'actif au temps T contre paiement du prix du contrat, occupe une *position longue*. Alors l'autre partenaire occupe une *position courte* et il a l'obligation de livrer l'actif au prix de livraison égal au prix du contrat. La valeur à la date initiale d'un *contrat forward normé*, qui ne prévoit aucun paiement initial, est nulle. Le prix du contrat correspondant est appelé *prix forward*. Pour une étude détaillée et des références à ce sujet, le lecteur intéressé peut consulter Merton (1990), p. 347–349, ainsi que Elton et Gruber (1991), chapitre 21. Une *option* est un contrat qui donne le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre, durant ou à la fin d'une période déterminée, un certain bien spécifié par le contrat, d'habitude un actif financier. La date spécifiant

la limite de validité de l'option est appelée *date d'expiration*. Une option est du *type européen* si elle ne peut être exercée qu'à la date d'expiration tandis qu'elle est du *type américain* si elle peut être exercée à n'importe quelle date de la durée du contrat. Une *call-option* donne le droit à l'acheteur d'acquérir l'actif à un prix spécifié par le contrat, appelé *prix d'exercice*. Une *put-option* donne le droit à l'acheteur de l'option de vendre l'actif sous-jacent au prix d'exercice. L'acheteur d'une option occupe la position longue du contrat et le vendeur, aussi appelé souscripteur ("writer" pour la littérature anglaise), occupe la position courte. Un *contrat* (de réassurance) *stop-loss* est l'analogue actuariel d'une call-option. Son prix d'exercice est appelé *déductible* sur les marchés de la (ré)assurance. Il existe déjà quelques ouvrages entièrement dédiés à l'étude des options et instruments dérivés, entre autres MacMillan (1980), Jarrow et Rudd (1983), Cox et Rubinstein (1985), Hull (1989), Gemmill (1992), Wilmott et al. (1993/95). Une illustration concrète de ces notions est présentée dans nos exemples 1.1.

Une modélisation mathématique (minimale) du gain financier, qui n'utilise que les notions de base de la théorie des probabilités, est présentée en tant que préliminaire dans la section 1. Il est important de remarquer que nous nous occupons pour ainsi dire pas du prix des instruments financiers, qui est un sujet déjà suffisamment établi et développé dans la litérature. Notre intérêt se concentre sur les variations extrémales possibles de l'espérance mathématique et de la variance des gains et pertes absolues de ces instruments, étant donné une information incomplète de la fonction de répartition des gains financiers. A notre avis la connaissance de bonnes bornes (meilleures bornes si possible) est primordial à l'étude du problème général d'évaluation et d'optimisation des gains financiers en présence des instruments financiers dérivés.

Donnons encore un résumé des résultats obtenus. A la section 2 nous déterminons le maximum de la perte financière absolue moyenne lorsque l'espérance mathématique et la variance sont connues. Il s'avère que celui-ci est atteint par une perte financière diatomique. Il s'agit en fait d'une version plus moderne d'une inégalité originalement proposée par Bowers (1969) dans le cadre de la réassurance stop-loss. Nous mentionnons également la généralisation de ce résultat au cas où la perte financière ne varie que dans un intervalle fermé, et expliquons pourquoi ce dernier résultat est plus significatif dans les applications. A la section 3 nous montrons que le maximum ci-dessus est également atteint par une variable aléatoire de fonction de répartition continue (en général de type mixte discret et continu). Ce résultat est utile pour la modélisation de la solvabilité des compagnies d'assurance (voir l'auteur (1993b)), et sa généralisation permet en particulier d'obtenir de "bonnes" bornes analytiques pour les primes nettes d'une réassurance stop-loss d'un portefeuille d'assurances (voir l'auteur (1995b)). Ainsi le contenu des sections 2 et 3 constitue en quelque sorte une introduction d'un niveau élémentaire aux travaux plus avancés dans ce domaine. Dans le même esprit, nous présentons à la section 4 quelques inégalités sur la variance du gain et de la perte financière absolue, et obtenons à la section 5 des situations simples pour lesquelles ces inégalités sont atteintes. Certains de ces derniers résultats ont été utilisés dans divers travaux, dont les plus accessibles sont Hürlimann (1994/95c).

Finalement le lecteur appréciera peut-être qu'il existe aussi une certaine esthétique mathématique dans les applications. Ainsi toutes les inégalités par Bowers (1969), Kremer

(1990), Hürlimann (1993a/94) et Birkel (1994) découlent d'un même principe, à savoir la propriété de non-négativité de certaines fonctions variance. De plus les inégalités sur la variance satisfont à une propriété de dualité obtenue par une opération de conjugaison, analogue de la conjugaison en théorie des nombres complexes (voir les remarques 4.1), ce qui simplifie considérablement la compréhension et la mémorisation des formules.

1 Modélisation probabiliste du gain financier

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé, où Ω est l'ensemble des états de la nature ou univers, A est la σ-algèbre des événements de Ω, et P la mesure de probabilité. Considérons $X : \Omega \to R$ une variable aléatoire réelle définie sur cet espace. On fait l'hypothèse suivante:

$$0 < P(X > 0), P(X \leq 0) < 1, \tag{H}$$

c'est-à-dire X prend à la fois des valeurs positives et non-positives. Par interprétation nous appelons X une *perte financière*. Le négatif de la perte financière, appelé *gain financier*, est noté $G = -X$. Pour un événement E de A notons $I : E \to \{0, 1\}$ la fonction indicatrice définie comme suit. Si $\omega \in \Omega$ est un événement élémentaire, alors $I(\omega) = 1$ lorsque $\omega \in E$ et $I(\omega) = 0$ sinon. Associées aux variables aléatoires X et G, nous aurons besoin des valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} X_+ &= X \cdot I(X > 0) && : \text{ la perte absolue,} \\ G_+ &= X_- = (-X) \cdot I(X \leq 0) && : \text{ le gain absolu.} \end{aligned}$$

Bien sûr on a $X = X_+ - X_-$, ou encore l'identité du gain financier

$$G + X_+ = G_+, \tag{1.1}$$

qui nous dit que le gain absolu est la somme du gain financier et de la perte absolue. De façon plus générale on a pour $n = 1, 2, \ldots$:

$$G^n + (-1)^{n-1} X_+^n = G_+^n. \tag{1.2}$$

La *valeur absolue* de la perte et du gain financier est définie par

$$|X| = |G| = X_+ + G_+. \tag{1.3}$$

Puisque $\{X > 0\}$ et $\{X \leq 0\}$ sont des événements complémentaires, le produit de variables aléatoires $X_+ \cdot G_+ = 0$. Il suit que $|X|^2 = |G|^2 = X^2 = G^2$, ce qui justifie l'interprétation de (1.3) comme valeur absolue. Les identités (1.2) impliquent des relations semblables sur les moments des quantités aléatoires, pour autant que ceux-ci existent. En pratique on n'utilise souvent que les moments d'ordre un et deux, et parfois ceux d'ordre trois et quatre. Considérons les moments d'ordre un et deux de la perte et du gain absolus, qui sont des moments partiels de la perte et du gain financiers, soient $M^+ = E[X_+]$, $M^- = E[X_-]$, $M_2^+ = E[X_+^2]$, $M_2^- = E[X_-^2] = E[G_+^2]$, ainsi que les variances partielles $V^+ = \mathrm{Var}[X_+] = M_2^+ - (M^+)^2$ et $V^- = \mathrm{Var}[X_-] = M_2^- - (M^-)^2$. Soit encore $\mu = E[X]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X]$ la moyenne et la variance de la perte financière.

En appliquant l'opération d'espérance mathématique aux relations (1.2) pour $n = 1, 2$, on obtient les identités:

$$\begin{aligned} M^+ - M^- &= \mu \\ M_2^+ + M_2^- &= \mu^2 + \sigma^2 \\ V^+ + V^- &= \sigma^2 - 2M^+M^- \end{aligned} \tag{1.4}$$

Remarque 1.1. Il est possible de généraliser les notions ci-dessus (ainsi que les résultats qui suivent) à une paire d'événements complémentaires E, $\bar{E}$ quelconques, et à des partitions $\{E_i\}$, $i \in N$, de A telles que $\bigcup_{i \in N} E_i = \Omega$, $E_i \bigcap E_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Pour des raisons de simplicité et une meilleure compréhension, cet article ne considère que la situation la plus intuitive, qui donne lieu à la perte absolue et au gain absolu.

Exemples 1.1.

(i) Si P est la valeur des primes d'assurance à un instant futur donné, et si S est le montant aléatoire des prestations d'assurance à cet instant, alors le gain financier $G = P - S$ représente le résultat technique d'une compagnie d'assurance. Un réarrangement de l'identité (1.1), à savoir

$$P + (S - P)_+ = S + (P - S)_+, \tag{1.5}$$

montre que la somme des primes et des prestations d'une réassurance stop-loss de déductible P suffit à financer avec certitude (c'est-à-dire avec probabilité un) le montant des prestations d'assurance et une participation aux bénéfices de montant $P - S$ lorsque les sinistres n'excèdent pas les primes.

(ii) De façon semblable soit S la valeur aléatoire d'un titre financier (p.ex. action) à un instant futur donné. Notons F le prix forward de ce titre au même instant, qui est connu sur le marché financier lors d'un investissement dans ce titre. Alors le gain financier $G = S - F$ d'une position longue dans un contrat forward satisfait l'identité

$$S + (F - S)_+ = F + (S - F)_+. \tag{1.6}$$

La somme d'une position longue dans un titre et d'une put-option de prix d'exercice F suffit à financer le prix forward et le paiement qui résulte d'une call-option de prix d'exercice F.

(iii) De façon plus générale, soient A et L des actifs et passifs financiers aléatoires quelconques à un instant futur donné. Alors le gain financier $G = A - L$ satisfait à la relation

$$A + (L - A)_+ = L + (A - L)_+, \tag{1.7}$$

qui montre que la somme des actifs A et d'une option d'échange A contre L suffit à financer les passifs L et le paiement qui résulte d'une option d'échange L contre A. Bien entendu (i) et (ii) sont des cas particuliers. Mentionnons encore deux autres situations importantes. Si $A = d > 0$ est la rétention d'un assureur et $L = S$ sont les prestations aléatoires d'assurance, alors l'identité $d + (S - d)_+ = S + (d - S)_+$

généralise (1.5) à une réassurance stop-loss de déductible d quelconque. De même si $A = S$, $L = E > 0$, on généralise (1.6) au cas des options financières de prix d'exercice E quelconque. L'identité (1.7) est fondamentale à l'Assurance des Portefeuilles, qui a été créée par Leland durant la nuit du 11 septembre 1976 (voir Luskin (1988)). Dans un environnement économique incertain, pour lequel on suppose que seul la moyenne et la variance jouent un rôle, les risques financiers extrêmes de la relation d'équilibre (1.7) dépendent des bornes inférieures et supérieures des variances partielles V^+, V^-, pour autant que les prix futurs des instruments dérivés $M^+ = E[(L-A)_+]$, $M^- = E[(A-L)_+]$ sont connus. Rappelons que le prix de l'option d'échange a été déterminé d'abord par Margrabe (1978). Lorsque les actifs ou passifs sont des quantités déterministes, on est ramené au cas des call- et put-options, dont les prix ont été déterminés par Black et Scholes (1973).

2 Maximum de la perte financière absolue moyenne

Il est bien connu en théorie des probabilités que les valeurs extrémales d'espérance mathématique du type $E[f(X)]$, $f(x)$ une fonction continue, X une variable aléatoire dont on connaît certaines caractéristiques, comme par exemple la moyenne et la variance, sont sous certaines conditions atteintes par des variables aléatoires discrètes de support fini. Il est moins connu que souvent il existe des variables aléatoires continues (plus généralement de type mixte discret et continu) pour lesquelles ces valeurs extrémales sont également atteintes. A la section 3, nous montrons comment de telles fonctions extrémales peuvent être construites dans le cas particulier $f(x) = (x-d)_+$ représentant le paiement d'une option ou d'un stop-loss. Déterminons d'abord le maximum de la perte financière absolue moyenne.

Rappelons la forme des variables aléatoires diatomiques de support $\{x_1, x_2\}$, $x_1 < x_2$ et de probabilités $\{p_1, p_2\}$ lorsque la moyenne μ et la variance σ^2 sont connues. Il faut satisfaire les équations de la somme des probabilités, de la moyenne et de la variance:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= 1, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &= \mu, \\ p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + p_2 \cdot (x_2 - \mu)^2 &= \sigma^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Il suit des deux premières équations que les probabilités sont déterminées par le support et la moyenne, soit

$$p_1 = \left(\frac{x_2 - \mu}{x_2 - x_1}\right), \quad p_2 = \left(\frac{\mu - x_1}{x_2 - x_1}\right). \tag{2.2}$$

Il reste à satisfaire l'équation de la variance. Tenu compte de (2.2) celle-ci devient $\sigma^2 = (\mu - x_1) \cdot (x_2 - \mu)$. Ainsi il suffit de connaître un atome, par exemple x_1, le second est alors déterminé par

$$x_2 = j(x_1) := \mu + \frac{\sigma^2}{\mu - x_1}. \tag{2.3}$$

On observe que l'application (2.3) est une involution (algébrique) dans le sens que $j^2(x_1) = j(x_2) = x_1$ pour tout x_1, c'est-à-dire j^2 est l'identité. Pour simplifier notons $\overline{x} =$

$j(x)$, qui suggère une opération de conjugaison analogue à l'opération familière de conjugaison en théorie des nombres complexes. Alors l'ensemble $D_2 := D_2(\mu, \sigma; (-\infty, \infty))$ des variables diatomiques de caractéristiques μ, σ, et à valeurs dans les nombres réels, est décrit par une famille à un paramètre de supports $\{x, \bar{x}\}$ et probabilités $\{p, \bar{p}\}$ tels que

$$\bar{x} = j(x) = \mu + \frac{\sigma^2}{\mu - x}, \quad p = \frac{\bar{x} - \mu}{\bar{x} - x}, \quad \bar{p} = \frac{\mu - x}{\bar{x} - x}, \quad x \in R. \tag{2.4}$$

De façon équivalente, exprimons le support comme fonction de la probabilité p, à savoir

$$x = \mu - \sigma\sqrt{\frac{1-p}{p}}, \quad \bar{x} = \mu + \sigma\sqrt{\frac{p}{1-p}}, \quad 0 < p < 1. \tag{2.5}$$

Après ces préliminaires, déterminons le maximum de la perte financière absolue moyenne.

Proposition 2.1. (Inégalité de Bowers(1969)). Soit X une perte financière définie sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$, d'espérance mathématique μ et de variance σ^2. Alors on a

(A) La perte absolue moyenne satisfait l'inégalité

$$M^+ = E[X_+] \leq \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu^2 + \sigma^2} + \mu\right\}. \tag{2.6}$$

(B) L'égalité est atteinte par une perte financière diatomique X^* de support $\{x^*, \bar{x}^*\}$ tel que $x^* = -\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}$, $\bar{x}^* = \sqrt{\mu^2 + \sigma^2}$.

Démonstration.

(A) Montrons d'abord que l'inégalité (2.6) est satisfaite. D'après (1.3) la valeur absolue de la perte financière est égale à $|X| = X_+ + G_+$ et satisfait l'identité $|X|^2 = X^2$. On a

$$\mathrm{Var}[|X|] = E[X^2] - E[|X|]^2 = \mu^2 + \sigma^2 - (M^+ + M^-)^2.$$

Puisqu'une variance est toujours non-négative, on obtient l'inégalité

$$M^+ + M^- \leq \sqrt{\mu^2 + \sigma^2}.$$

L'inégalité (2.6) suit par insertion de la relation $M^- = M^+ - \mu$ (voir (1.4)).

(B) La borne supérieure est atteinte par une perte financière diatomique du type (2.5). Par l'hypothèse (H) du paragraphe 1, on a nécessairement $x \leq 0 < \bar{x}$. Dans ce cas la perte absolue moyenne est la fonction de la probabilité p donnée par (utiliser (2.5)):

$$f(p) = M^+ = (1-p)\bar{x} = \mu(1-p) + \sigma\sqrt{p(1-p)}.$$

Un calcul montre que $f(p)$ est maximale lorsque

$$p = p^* = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}}\right\}, \text{ avec } f(p^*) = \frac{1}{2}\left\{\mu + \sqrt{\mu^2 + \sigma^2}\right\}.$$

Par insertion dans (2.5) on vérifie que $x^* = -\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}$, $\bar{x}^* = \sqrt{\mu^2 + \sigma^2}$, ce qui achève la démonstration. □

Remarques 2.1.

(i) Comme $M^- = M^+ - \mu$ par (1.4), le gain absolu moyen satisfait à l'inégalité

$$M^- = E[X_-] \leq \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu^2+\sigma^2} - \mu\right\}, \tag{2.6'}$$

dont l'égalité est également atteinte par la perte financière diatomique donnée en (B).

(ii) Originalement Bowers (1969) a donné cette inégalité lorsque $X = S - d$, avec S les sinistres d'un portefeuille d'assurances, d un déductible de réassurance. Dans ce cas la perte absolue $X_+ = (S-d)_+$ représente une réassurance stop-loss. Une interprétation semblable peut être donnée pour les options financières.

(iii) La meilleure borne supérieure (2.6) se généralise au cas où la perte financière X est définie sur un intervalle $[a,b]$ quelconque, un résultat plus significatif en pratique. Comme illustration soit i_0 le taux d'intérêt annuel technique d'une assurance vie et I un taux d'intérêt annuel stochastique. Empiriquement et sur de longues périodes, I ne peut devenir négatif et est sujet à une limite supérieure, ainsi $0 \leq I \leq i_{\max}$. Il suit que le gain financier $G = I - i_0$, qui représente l'excédent du taux d'intérêt par rapport au taux technique et sur lequel les compagnies d'assurance basent leurs décisions quant à la participation aux bénéfices, ne peut prendre des valeurs que dans l'intervalle $[a,b] = [-i_0, i_{\max} - i_0]$. De même la perte financière $X = -G$ est définie sur un intervalle $[i_0 - i_{\max}, i_0]$. Donnons sans preuve la meilleure borne supérieure de la perte absolue moyenne lorsque X prend ses valeurs dans l'intervalle $[a,b]$, $a < 0 < b$. Pour cela rappelons que (2.3) définit les valeurs $\bar{a}, \bar{b}$ par les équations de la variance, soient $(\bar{a}-\mu)\cdot(\mu - a) = \sigma^2$, $(b-\mu)\cdot(\mu-\bar{b}) = \sigma^2$. On a l'espérance maximale

$$M^{+*} = E[X_+^*] = \begin{cases} \left(\dfrac{\mu - a}{\bar{a} - a}\right)\cdot(\bar{a}), & \text{lorsque } 0 \in \left[a, \dfrac{1}{2}(a+\bar{a})\right], \\ \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\mu^2+\sigma^2}+\mu\right), & \text{lorsque } 0 \in \left[\dfrac{1}{2}(a+\bar{a}), \dfrac{1}{2}(b+\bar{b})\right], \\ \left(\dfrac{b-\mu}{b-b}\right)\cdot(b), & \text{lorsque } 0 \in \left[\dfrac{1}{2}(b+\bar{b}), b\right] \end{cases} \tag{2.7}$$

et est atteinte par une perte financière diatomique $X^* = \{x^*, \bar{x}^*\}$ telle que

$$x^* = \begin{cases} a, & \text{lorsque } 0 \in \left[a, \dfrac{1}{2}(a+\bar{a})\right], \\ -\sqrt{\mu^2+\sigma^2}, & \text{lorsque } 0 \in \left[\dfrac{1}{2}(a+\bar{a}), \dfrac{1}{2}(b+\bar{b})\right], \\ \bar{b}, & \text{lorsque } 0 \in \left[\dfrac{1}{2}(b+\bar{b}), b\right]. \end{cases} \tag{2.8}$$

Ce résultat important, qui se généralise dans diverses directions, fait l'objet de nombreuses études récentes en science actuarielle. Pour une preuve, qui dépasse le cadre de cet exposé, on peut consulter De Vylder et Goovaerts (1982), Jansen et al. (1986) et Kaas et al. (1994), chap. X. Le cas limite $a \to -\infty$, $b \to \infty$ n'est autre que la Proposition 2.1 obtenue dans le contexte de la réassurance stop-loss par Bowers (1969).

3 Réassurance stop-loss et fonctions extrémales

Considérons de plus près le cas intéressant de la réassurance stop-loss, respectivement options financières. Mathématiquement cette situation est modelée par la suite de variables aléatoires $X(d) = S - d$, $d \in R$, S une variable aléatoire de moyenne μ_S et variance σ_S^2. Par la suite notons $\pi(d) = E[X(d)_+] = E[(S-d)_+]$ l'espérance mathématique d'une réassurance stop-loss, respectivement d'une call-option financière de type européen. Lorsque S prend ses valeurs dans $(-\infty, \infty)$, on a par application de la Proposition 2.1 l'inégalité

$$\pi(d) \leq \pi^*(d) = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{(d-\mu_S)^2 + \sigma_S^2} - (d - \mu_S)\right\}, \tag{3.1}$$

atteinte par la variable $S^*(d) = d + X^*(d)$ diatomique de support $\{s^*(d), \bar{s}^*(d)\}$ tel que

$$s^*(d) = d - \sqrt{(d-\mu_S)^2 + \sigma_S^2}, \quad \bar{s}^*(d) = d + \sqrt{(d-\mu_S)^2 + \sigma_S^2}. \tag{3.2}$$

Malheureusement la borne supérieure est atteinte pour une variable aléatoire qui dépend du paramètre d représentant le déductible, respectivement le prix d'exercice. Dans les applications d'un niveau plus avancé, cela complique les calculs. Une illustration typique est un problème de Schmitter (p.ex. Brockett et al. (1991), Kaas (1991), Kaas et al. (1994), chap. XI).

Au vu de ces difficultés, on peut se demander s'il existe une fonction de répartition pour laquelle l'égalité est atteinte dans (3.1), et qui ne dépend pas du paramètre d.

Proposition 3.1. (Hürlimann (1993b)). Soit $D := D(\mu_S, \sigma_S; (-\infty, \infty))$ l'ensemble des variables aléatoires S définies sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$, d'espérance mathématique μ_S et de variance σ_S^2, et de fonction de répartition absolument continue, c'est-à-dire tel que $F(s) = \int_{-\infty}^{s} f(t)dt$. Alors $\max_{S \in D}\{E[(S-d)_+]\} = \pi^*(d)$ est atteint par la fonction de répartition continue

$$F^*(s) = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{(s-\mu_S)}{\sqrt{(s-\mu_S)^2 + \sigma_S^2}}\right\}, \quad s \in (-\infty, \infty). \tag{3.3}$$

Démonstration. De façon générale, on a par intégration partielle

$$\begin{aligned} \pi(x) = E[(S-x)_+] &= \int_x^\infty (s-x)f(s)ds \\ &= -(1-F(s)) \cdot (s-x)|_x^\infty + \int_x^\infty (1-F(s)ds = \int_x^\infty (1-F(s))ds. \end{aligned} \tag{3.4}$$

La dernière égalité suit puisque $\lim_{s \to \infty} F(s) = 1$. Par différentiation de la relation (3.4) on obtient

$$\pi'(x) = -(1-F(x)), \quad x \in (-\infty, \infty). \tag{3.5}$$

En fait (3.4) et (3.5) montrent que $F(s)$ et sa transformée "stop-loss" $\pi(x)$ sont en correspondance biunivoque. Si $F(s)$ est donné, on obtient $\pi(x)$ par intégration. Réciproquement si $\pi(x)$ est donné, on obtient $F(x)$ par différentiation. Si l'on applique cette correspondance à la transformée extrémale $\pi^*(x) = \frac{1}{2}\{\sqrt{(x-\mu_S)^2+\sigma_S^2}-(x-\mu_S)\}$, donnée ci-dessus en (3.1), on obtient par différentiation $F^*(x)$ comme dans (3.3). On vérifie que la fonction extrémale $F^*(s)$ est une fonction de répartition, c'est-à-dire elle satisfait aux propriétés $\lim_{s\to-\infty} F^*(s) = 0$, $\lim_{s\to\infty} F^*(s) = 1$, et $F^*(s)$ est monotone croissante dans l'intervalle $(-\infty,\infty)$. De plus on a la représentation intégrale $\pi^*(x) = \int_x^\infty (1-F^*(s))ds$ par (3.4), ce qui achève la démonstration. □

Remarques 3.1.

(i) Contrairement aux variables diatomiques de support (3.2), la fonction extrémale (3.3) n'appartient pas à l'ensemble $D(\mu_S,\sigma_S;(-\infty,\infty))$. Son espérance mathématique est bien μ_S, mais sa variance est infinie. En effet, soit S^* une variable aléatoire de fonction de répartition $F^*(x)$, et soit $f^*(x)$ sa densité de probabilité donnée par la formule

$$f^*(x) = F^{*\prime}(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma_S^2}{(\sigma_S^2+(x-\mu_S)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad x\in(-\infty,\infty). \tag{3.6}$$

Avec la transformation standardisée $z = (x-\mu_S)/\sigma_S$, le calcul intégral fournit les caractéristiques désirées comme suit. Pour la moyenne, on a

$$\mu_{S^*} = E[S^*] = \int_{-\infty}^{\infty} xf^*(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mu_S+\sigma_S z)dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^\infty \frac{\mu_S dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \mu_S, \tag{3.7}$$

où la dernière égalité suit par la formule (24) tirée de Rottmann(1960), p. 157. De même le calcul de la variance donne

$$\sigma_{S^*}^2 = E[(S^*-\mu_S)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_S)^2 f^*(x)dx = \int_0^\infty \frac{(\sigma_S z)^2 dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.8}$$

Puisque la dernière intégrale diverge, on obtient que la variance est infinie.

(ii) A nouveau la Proposition 3.1 se généralise au cas des variables aléatoires S définies sur un intervalle $[a,b]$. A partir de (2.7), la généralisation de (3.1) devient, en remplaçant X par la translation $S-x$:

$$\pi^*(x) = \begin{cases} \left\{\dfrac{(\mu_S-a)^2}{(\mu_S-a)^2+\sigma_S^2}\right\}\cdot\left(\mu_S+\dfrac{\sigma_S^2}{\mu_S-a}-x\right), & x\in\left[a,\dfrac{1}{2}(a+\bar{a})\right], \\ \dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{(x-\mu_S)^2+\sigma_S^2}-(x-\mu_S)\right\}, & x\in\left[\dfrac{1}{2}(a+\bar{a}),\dfrac{1}{2}(b+\bar{b})\right], \\ \left\{\dfrac{\sigma_S^2}{(b-\mu_S)^2+\sigma_S^2}\right\}\cdot(b-x), & x\in\left[\dfrac{1}{2}(b+\bar{b}),b\right]. \end{cases} \tag{3.9}$$

Par différentiation (correspondance biunivoque), on obtient la fonction extrémale

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a), \\ \dfrac{\sigma_S^2}{(\mu_S - a)^2 + \sigma_S^2}, & x \in \left[a, \dfrac{1}{2}(a + \bar{a})\right], \\ \dfrac{1}{2}\left\{1 + \dfrac{(x - \mu_S)}{\sqrt{(x - \mu_S)^2 + \sigma_S^2}}\right\}, & x \in \left[\dfrac{1}{2}(a + \bar{a}), \dfrac{1}{2}(b + \bar{b})\right], \\ \dfrac{(b - \mu_S)^2}{(b - \mu_S)^2 + \sigma_S^2}, & x \in \left[\dfrac{1}{2}(b + \bar{b}), b\right), \\ 1, & x \in [b, \infty). \end{cases} \tag{3.10}$$

On vérifie que $F^*(x)$ est une fonction de répartition continue. Cependant une fonction de densité $f^*(x)$, qui correspond à $F^*(x)$, n'est continue qu'au cas limite de la Proposition 3.1. Pour compléter les formules, la fonction de probabilité extrémale

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_S^2}{(\mu_S - a)^2 + \sigma_S^2}, & x = a, \\ \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sigma_S^2}{\{(x - \mu_S)^2 + \sigma_S^2\}^{\frac{3}{2}}}, & x \in \left[\dfrac{1}{2}(a + \bar{a}), \dfrac{1}{2}(b + \bar{b})\right], \\ \dfrac{\sigma_S^2}{(b - \mu_S)^2 + \sigma_S^2}, & x = b, \\ 0, \text{ sinon}, \end{cases} \tag{3.11}$$

possède deux atomes de masses non-nulles, placés sur les bornes de l'intervalle $[a, b]$, est continue sur un sous-intervalle, et nulle sinon. Il semble que la fonction extrémale (3.10) a fait sa première apparition dans un article peu connu de Stoyan (1973). Sa dérivation originale semble moins élémentaire. On peut également montrer que la moyenne d'une variable aléatoire S^* de fonction de probabilité $f^*(x)$ est μ_S et que sa variance satisfait

$$\sigma_{S^*}^2 = E[(S^* - \mu_S)^2] = \sigma_S^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \ln\left\{\frac{(b - \mu_S)(\mu_S - a)}{\sigma_S^2}\right\}\right) \geq \sigma_S^2. \tag{3.12}$$

L'inégalité provient du fait que le maximum de la variance d'une variable aléatoire quelconque à valeurs dans $[a, b]$, lorsque la moyenne est connue, est égal à $(b - \mu_S)(\mu_S - a)$ (voir par exemple Jansen et al. (1986)).

(iii) A part son utilité actuarielle (p.ex. Hürlimann (1993b/95a/95b)), la méthode des fonctions extrémales est également d'un intérêt en finance mathématique. Ainsi, tenant compte des conditions de non-arbitrage, il est possible de déterminer le prix extrémal de certaines options financières.

4 Inégalités sur la variance de la perte financière absolue

Un problème intéressant et utile consiste à généraliser les résultats précédents à des moments partiels d'ordre supérieur. Sans exhauster le sujet, nous présentons de nouvelles preuves plus élémentaires d'inégalités récemment introduites en science actuarielle. On note $F(0) = P(X \leq 0)$ la probabilité d'un gain absolu et $\bar{F}(0) = P(X > 0) = 1 - F(0)$ la probabilité d'une perte absolue. On suppose que X est une variable aléatoire définie sur $(-\infty, \infty)$ de moyenne μ et de variance σ^2.

Proposition 4.1. (Hürlimann (1993a)) Si la probabilité $\bar{F}(0)$ est inconnue, alors on a les bornes supérieures

$$V^+ \leq \sigma^2 - 2M^+M^-, \tag{4.1}$$

$$V^- \leq \sigma^2 - 2M^+M^-. \tag{4.2}$$

Démonstration. Comme la fonction variance est non-négative, cela suit immédiatement de la troisième identité dans (1.4). □

Proposition 4.2. (Kremer (1990), Hürlimann (1994)) Si la probabilité $\bar{F}(0)$ est connue, alors on a les inégalités

$$\frac{F(0)}{F(0)} \cdot (M^+)^2 \leq V^+ \leq \sigma^2 - 2M^+M^- - \frac{\bar{F}(0)}{F(0)} \cdot (M^-)^2 \tag{4.3}$$

$$\frac{\bar{F}(0)}{F(0)} \cdot (M^-)^2 \leq V^- \leq \sigma^2 - 2M^+M^- - \frac{F(0)}{F(0)} \cdot (M^+)^2 \tag{4.4}$$

Démonstration. (Les notions de lois et moments conditionnels sont introduites et expliquées dans Roger (1991), chapitre 2, paragraphe 6.) Considérons les moments partiels conditionnels $m^+ = E[X|X > 0]$, $m_2^+ = E[X^2|X > 0]$, $m^- = E[G|X \leq 0]$, $m_2^- = E[G^2|X \leq 0]$, et les variances partielles conditionnelles $v^+ = \mathrm{Var}[X|X > 0] = m_2^+ - (m^+)^2$, $v^- = \mathrm{Var}[G|X \leq 0] = m_2^- - (m^-)^2$. Ces caractéristiques sont liées aux caractéristiques non conditionnelles par les relations

$$M^+ = \bar{F}(0) \cdot m^+, \quad M_2^+ = \bar{F}(0) \cdot m_2^+, \quad M^- = F(0) \cdot m^-, \quad M_2^- = F(0) \cdot m_2^-. \tag{4.5}$$

On en déduit que

$$v^+ = m_2^+ - (m^+)^2 = \frac{1}{F(0)} \cdot \left(M_2^+ - \frac{(M^+)^2}{F(0)} \right). \tag{4.6}$$

Comme la fonction variance est non-négative, on a $M_2^+ \geq \frac{(M^+)^2}{F(0)}$. Par conséquent on obtient

$$V^+ = M_2^+ - (M^+)^2 \geq \frac{F(0)}{F(0)} \cdot (M^+)^2, \tag{4.7}$$

qui est la borne inférieure dans (4.3). La borne inférieure de (4.4) se montre de façon semblable. Les bornes supérieures sont une conséquence des bornes inférieures et de la troisième identité dans (1.4). □

Remarques 4.1.

(i) Il existe une propriété de dualité qui relie toutes ces inégalités, et qui permet une mémorisation facile de ces formules. Pour passer d'une inégalité à l'autre, il suffit de considérer les pertes absolues (signe positif) comme conjuguées des gains absolus (signe négatif). De plus la barre "algébrique" sur les probabilités reflète le fait que les événements $E = \{X > 0\}$ et $\bar{E} = \{X \leq 0\}$ sont complémentaires. De façon formelle, définissons une opération "barre" de conjugaison telle que $M^- = \bar{M}^+$, $V^- = \bar{V}^+$, $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. Cette opération est également une involution, c'est-à-dire itérée deux fois elle donne l'identité. Si l'on pose par convention $\bar{\bar{M}}^+ = M^+$, $\bar{\bar{V}}^+ = V^+$, $\bar{\bar{F}}^+ = F(x)$, $\bar{\sigma} = \sigma$, $\bar{\mu} = -\mu$, alors les paires (4.3), (4.4) sont conjuguées, alors que les paires (4.1), (4.2) sont auto-conjuguées.

(ii) Lorsque $X = S - d$, $d \in R$, est une translation, l'inégalité (4.1) a été mentionnée également par Birkel (1994), Hesselager (1993), Sundt (1993), Exercice 10.1.

(iii) Birkel (1994) considère une perte financière $X = S - \varphi(S)$, S les prestations d'assurance, φ une fonction non-négative, et interprète la perte absolue X_+ comme paiement d'un contrat de réassurance plus général qu'un stop-loss (cas particulier $\varphi(s) = d$ constant). Lorsque $\varphi(s)$ n'est pas constant, on peut écrire la variance de X de deux manières, soient

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathrm{Var}[S] - 2\,\mathrm{Cov}[S, \varphi(S)] + \mathrm{Var}[\varphi(S)] \\ &= \mathrm{Var}[S] - 2\,\mathrm{Cov}[S - \varphi(S), \varphi(S)] - \mathrm{Var}[\varphi(S)]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Si $\varphi(s)$ et la fonction $f(s) = s - \varphi(s)$ sont non-décroissantes, on a $\mathrm{Cov}[f(S), \varphi(S)] \geq 0$ puisque la paire (S, S) est positive quadrante dépendante. (Pour cette dernière propriété consulter un livre de Statistique Moderne ou "l'Encyclopedia of Statistical Sciences" de Johnson et Kotz (1982/88)). La deuxième égalité dans (4.8) implique $\sigma^2 \leq \mathrm{Var}[S]$. Si seulement $\varphi(s)$ est non-décroissante, on a $\mathrm{Cov}[S, \varphi(S)] \geq 0$ par le même argument, et la première égalité dans (4.8) implique $\sigma^2 \leq \mathrm{Var}[S] + \mathrm{Var}[\varphi(S)]$. Par insertion dans (4.1) et (4.3), on obtient les inégalités de Birkel (1994).

5 Variances extrémales du gain financier absolu

Nous explicitons des variables aléatoires à structure de perte financière pour lesquelles les inégalités sur la variance de la perte et du gain absolus sont atteintes, et déterminons les valeurs extrémales de ces variances lorsque la moyenne μ, la variance σ^2 et la perte absolue M^+ sont connues.

Lemme 5.1. Soit $D_2F := D_2F(\mu, \sigma; (-\infty, \infty)) \subset D_2 = D_2(\mu, \sigma; (-\infty, \infty))$ l'ensemble des variables aléatoires diatomiques de support $\{x, \bar{x}\}$ et probabilités $\{p, \bar{p}\}$ comme dans (2.5), et qui sont munies d'une structure de perte financière telle que l'hypothèse (H) soit satisfaite, c'est-à-dire $x \leq 0 < \bar{x}$. Alors on a les égalités simultanées suivantes:

$$V^+ = \left(\frac{p}{1-p}\right) \cdot (M^+)^2, \quad V^- = \left(\frac{1-p}{p}\right) \cdot (M^-)^2. \tag{5.1}$$

Démonstration. Comme $x \leq 0 < \bar{x}$ on a $M^+ = (1-p)\bar{x}$, $M_2^+ = (1-p)(\bar{x})^2$, $V^+ = p(1-p)(\bar{x})^2$, d'où l'égalité $V^+ = \left(\frac{p}{1-p}\right) \cdot (M^+)^2$. L'autre égalité suit de la même manière. □

Ce résultat montre que les égalités dans (4.3), (4.4) sont atteintes par des variables aléatoires à structure de perte financière. Quelles sont les bornes extrémales? En général elles dépendent des caractéristiques supposées connues.

Proposition 5.1. Soit $DF := DF(\mu, \sigma, M^+; (-\infty, \infty))$ l'ensemble des variables aléatoires à structure de perte financière définies sur $(-\infty, \infty)$ et telles que μ, σ, M^+ sont connus, et D_2F le sous-ensemble correspondant des variables diatomiques. Alors les variances extrémales sont déterminées comme suit:

(A) Lorsque $M^+ > 0$ la variance maximale de la perte absolue et minimale du gain absolu, soient

$$\max_{X \in DF} \{V^+\} = \frac{1}{2}\left\{\sigma^2 - 2M^+M^- + \sigma\sqrt{\sigma^2 - 4M^+M^-}\right\} \tag{5.2}$$

$$\min_{x \in DF} \{V^-\} = \frac{1}{2}\left\{\sigma^2 - 2M^+M^- - \sigma\sqrt{\sigma^2 - 4M^+M^-}\right\} \tag{5.3}$$

sont atteintes par une perte financière $X \in D_2F$ de support $\{x, \bar{x}\}$ et probabilités $\{p, \bar{p}\}$ telle que $x = \mu - \sigma\sqrt{\frac{1-p}{p}}$, où la probabilité $p = F(0)$ est déterminée par

$$\left(\frac{p}{1-p}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2 - 2M^+M^- + \sigma\sqrt{\sigma^2 - 4M^+M^-}}{(M^+)^2}. \tag{5.4}$$

(B) Lorsque $M^- > 0$ la variance maximale du gain absolu et minimale de la perte absolue, soient

$$\max_{X \in DF} \{V^-\} = \frac{1}{2}\left\{\sigma^2 - 2M^+M^- + \sigma\sqrt{\sigma^2 - 4M^+M^-}\right\} \tag{5.5}$$

$$\min_{X \in DF} \{V(E)\} = \frac{1}{2}\left\{\sigma^2 - 2M^+M^- - \sigma\sqrt{\sigma^2 - 4M^+M^-}\right\} \tag{5.6}$$

sont atteintes par une perte financière $X \in D_2F$ de support $\{x, \bar{x}\}$ et probabilités $\{p, \bar{p}\}$ telle que $x = \mu - \sigma\sqrt{\frac{1-p}{p}}$, où la probabilité $p = F(0)$ est déterminée par

$$\left(\frac{1-p}{p}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2 - 2M^+M^- + \sigma\sqrt{\sigma^2 - 4M^+M^-}}{(M^-)^2}. \tag{5.7}$$

Démonstration. Par symmétrie (dualité exprimée aux remarques 4.1), il suffit de montrer l'affirmation (A). La troisième relation dans (1.4) et la Proposition 4.2 montrent que la quantité $V^+ = \sigma^2 - 2M^+M^- - V^-$ est *maximale* sur l'ensemble DF lorsque la condition suivante est satisfaite:

(C) La borne inférieure $V^- \geq \frac{\bar{F}(0)}{F(0)} \cdot (M^-)^2$ est atteinte et cette quantité est *minimale*.

Soit $X \in D_2F$ tel que $p = F(0)$. Par le lemme 5.1, la borne inférieure dans (C) est atteinte. Comme fonction de $\left(\frac{p}{1-p}\right)$, la première quantité dans (5.1) est monotone croissante, et la deuxième monotone décroissante. Par conséquent V^+ est maximale pour la plus grande valeur de $\left(\frac{p}{1-p}\right)$, qui est solution de la troisième relation dans (1.4):

$$\left(\frac{p}{1-p}\right) \cdot (M^+)^2 + \left(\frac{1-p}{p}\right) \cdot (M^-)^2 = \sigma^2 - 2M^+M^-. \tag{5.8}$$

Si $M^+ = 0$ alors la variance $V^- = \sigma^2$ est maximale, ce qui contredit (C). Ainsi l'hypothèse $M^+ > 0$ est nécessaire. En multipliant (5.8) par $\left(\frac{p}{1-p}\right)$, on obtient une équation quadratique, dont la plus grande solution est déterminée par (5.4). Par la Proposition 2.1, on a $M^+ \leq \frac{1}{2}(\sqrt{\mu^2 + \sigma^2} + \mu)$. Utilisant la relation $M^- = M^+ - \mu$ de (1.4), on remarque que $4M^+M^- \leq \sigma^2$, ce qui garantit l'existence d'une solution réelle dans (5.4). Il reste à montrer que $X \in D_2F$, c'est-à-dire qu'on a $E[X_+] = M^+$. Comme $x \leq 0 < \bar{x}$ il faut vérifier que

$$E[X_+] = \mu(1-p) + \sigma\sqrt{p(1-p)} = M^+. \tag{5.9}$$

Or par la première relation de (1.4), ceci est équivalent à

$$pM^+ + (1-p)M^- = \sigma\sqrt{p(1-p)}. \tag{5.10}$$

Elevant au carré p est effectivement solution de l'équation (5.8). □

Un résultat semblable est valable pour les inégalités de la Proposition 4.1.

Proposition 5.2. Soit $DF := DF(\mu, \sigma; (-\infty, \infty))$ l'ensemble des variables aléatoires à structure de perte financière définies sur $(-\infty, \infty)$ et telles que μ, σ sont connus, et D_2F le sous-ensemble correspondant des variables diatomiques. Les égalités dans (4.1), (4.2) sont atteintes comme suit:

(A) La variance maximale de la perte absolue est égale à $V^+ = \sigma^2$ et est atteinte par $X \in D_2F$ de support $\{0, \bar{0}\}$ et probabilité $p = \frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}$. De plus on a nécessairement $M^- = 0$, $M^+ = \mu > 0$ et $V^- = 0$.

(B) La variance maximale du gain absolu est égale à $V^- = \sigma^2$ et est atteinte par $G \in D_2F$ de support $\{0, -\bar{0}\}$ et probabilité $p = \frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}$. De plus on a nécessairement $M^+ = 0$, $M^- = -\mu > 0$ et $V^+ = 0$.

Démonstration. Il suffit de montrer (A). Par l'inégalité (4.3), la borne supérieure de (4.1) est atteinte seulement si $M^- = 0$. La perte financière extrémale $X \in D_2F$ est obtenue de l'affirmation (A) de la Proposition 5.1. □

Remarques 5.1.

(i) Dans le cas limite $M^+ \to 0$, mais M^+ n'atteint pas zéro, l'affirmation (A) de la Proposition 5.1 reste valable. On obtient une perte financière extrémale $X \in D_2F$ de support $\{x, \overline{x}\}$ et probabilités $\{p, \overline{p}\}$ telle que $x \to \mu(\leq 0)$, $\overline{x} \to \infty$, $p \to 1$, $\max\{V^+\} \to \sigma^2$, $\min\{V^-\} \to 0$. D'autre part l'affirmation (A) de la Proposition 5.2 montre que $V^+ = \sigma^2$ est atteint de façon exacte lorsque $\mu > 0$. Dans ce cas $x = 0$, ce qui est un peu pathologique, mais satisfait l'hypothèse (H) de notre modélisation financière. Des remarques semblables sont valables pour les affirmations (B).

(ii) Les résultats de ce paragraphe ont été inspirés par une communication personnelle de Schmitter (1993), qui a obtenu le maximum (5.2) pour les translations $X = S - d$, $d \in R$, mais de manière plus obscure.

Bibliographie

Birkel, T. (1994). Elementary upper bounds for the variance of a general reinsurance treaty. Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, 309–12.

Black, F., Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy 81, 637–659. Reprinted in Luskin(1988).

Bowers, N.L. (1969). An upper bound for the net stop-loss premium. Transactions of the Society of Actuaries XIX, 211–216.

Brockett, P., Goovaerts, M.J., Taylor, G. (1991). The Schmitter problem. ASTIN Bulletin 21, 129–32.

Chichilnisky, G. (1996). Fischer Black: The Mathematics of Uncertainty. Notices of the American Mathematical Society, vol. 43(3), 319–322.

Cox, J., Rubinstein, M. (1985). Options Markets. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall.

De Vylder, F., Goovaerts, M. (1982). Upper and lower bounds on stop-loss premiums in case of known expectation and variance of the risk variable. Bulletin Association suisse des Actuaires, 149–64.

Elton, M.J., Gruber, M.J. (1991). Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. J. Wiley.

Gemmill, G. (1992). Options Pricing. McGraw-Hill.

Hesselager, O. (1993). An improved elementary upper bound for the variance of a stop-loss risk: a comment on the article by W. Hürlimann. Bulletin Association suisse des Actuaires, 277–278.

Hull, J. (1989). Options, Futures, and Other Derivative Securities. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall.

Hürlimann, W. (1993a). An (improved) elementary upper bound for the variance of a stop-loss risk. Bulletin Association suisse des Actuaires, 97–99.

Hürlimann, W. (1993b). Solvabilité et Réassurance. Bulletin Association suisse des Actuaires, 229–49.

Hürlimann, W. (1994). Splitting risk and premium calculation. Bulletin Association suisse des Actuaires, 167–197.

Hürlimann, W. (1995a). A stop-loss ordered extremal distribution and some of its applications. XXVI. Colloque ASTIN, Leuven.

Hürlimann, W. (1995b). Improved analytical bounds for some risk quantities. To appear in ASTIN Bulletin.

Hürlimann, W. (1995c). Transforming, ordering and rating risks. Bulletin Association suisse des Actuaires, 213–236.

Jansen, K., Haezendonck, J., Goovaerts, M.J. (1986). Upper bounds on stop-loss premiums in case of known moments up to the fourth order. Insurance: Mathematics and Economics 5, 315–34.

Jarrow, R.A., Rudd, A. (1983). Option Pricing. The Irwin Series in Finance. R.D. Irwin, Homewood, Illinois.

Kaas, R. (1991). The Schmitter problem and a related problem: a partial solution. ASTIN Bulletin 21, 133–46.

Kaas, R., Heerwaarden, Van A.E., Goovaerts, M.J. (1994). Ordering of Actuarial Risks, CAIRE Education Series 1, Bruxelles.

Kremer, E. (1990). An elementary upper bound for the loading of a stop-loss cover. Scandinavian Actuarial Journal, 105–108.

Luskin, D.L. (1988) (Editor). Portfolio Insurance: a guide to dynamic hedging. J. Wiley.

MacMillan, L.G. (1980). Options as a Strategic Investment. New York Inst. Fin., New York.

Margrabe, W. (1978). The value of an option to exchange one asset for another. Journal of Finance 33, 177–186.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. The Journal of Finance, 77–91.

Markowitz, H. (1959). Portfolio Selection - Efficient Diversification of Investments. John Wiley. Second Edition (1991). Basil Blackwell.

Markowitz, H. (1987). Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets. Basil Blackwell.

Merton, R.C. (1990). Continuous-Time Finance. Basil Blackwell.

Roger, P. (1991). Les outils de la modélisation financière. Presses Universitaires de France, collection "Finance".

Rottmann, K. (1960). Mathematische Formelsammlung. BI-Hochschultaschenbücher, Band 13, 2. Auflage. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich.

Schmitter, H. (1993/95). An upper limit of the stop-loss variance. XXVI. Colloque ASTIN, Leuven, Septembre 1995. (Communication personnelle 15.7.1993).

Stoyan, D. (1973). Bounds for the extrema of the expected value of a convex function of independent random variables. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 8, 153–159.

Sundt, B. (1993). An introduction to non-life insurance mathematics (3rd ed.). Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

Wilmott, P., Dewynne, J.N., Howison, S.D. (1993). Option Pricing: Mathematical Models and Computation. Oxford Financial Press.

Wilmott, P., Howison, S.D., Dewynne, J.N. (1995). The Mathematics of Financial Derivatives, A Student Introduction. Cambridge University Press.

Werner Hürlimann
Allgemeine Mathematik
Winterthur-Leben
Paulstr. 9
CH-8401 Winterthur