Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 52 (1997)

Artikel: Möglichst dichte Packungen aus kongruenten Drehzylindern mit paarweise windschiefen Achsen

Autor: Graf, Claudia / Paukowitsch, Peter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-2662

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 52 (1997) 71 – 83
0013-6018/97/020071-13 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 1997

Elemente der Mathematik

Möglichst dichte Packungen aus kongruenten Drehzylindern mit paarweise windschiefen Achsen

Claudia Graf und Peter Paukowitsch

Claudia Graf wurde 1965 in Oberösterreich geboren. Sie absolvierte ein Lehramtsstudium an der Technischen Universität in Wien. Nach einigen Jahren Lehrtätigkeit an Gymnasien doktorierte sie im Jahr 1994 mit einer Arbeit (siehe [2]) über das hier dargestellte Thema. Frau Graf, geb. Grasser, ist verheiratet und Mutter einer zweijährigen Tochter.

Peter Paukowitsch wude 1945 in Niederösterreich geboren. Nach einem Lehramtsstudium doktorierte er 1975 an der Technischen Universität Wien über ein differentialgeometrisches Thema. Nach der Habilitation wurde er 1988 Assistenzprofessor am Geometrieinstitut dieser Universität. Seine wissenschaftlichen Interessen gehören der Geometrie, insbesondere ist er in der Ausbildung der Lehrer in den geometrischen Disziplinen sowohl in fachlicher wie auch fachdidaktischer Hinsicht tätig.

1 Ergebnis

Es existiert eine Packung des 3-Raumes, bestehend aus kongruenten unbeschränkten Drehzylindern mit paarweise windschiefen Drehachsen, deren Dichte $5/12 = 0.41\dot{6}$ beträgt.

2 Einleitung

Unter einer Zylinderpackung im dreidimensionalen euklidischen Raum versteht man eine Menge Z von kongruenten Drehzylindern mit unendlicher Achsenlänge, welche

Man weiss es: Gilt es, (gleichartige) Röhren (Drehzylinder) zu lagern, so stapelt man diese am besten so, dass alle Achsen parallel liegen und jede Röhre sechs andere berührt. Diese Lagerungsart braucht offensichtlich am wenigsten Platz. (Sie weist daneben auch andere Vorteile auf.) Ungeordnet, im Extremfall mit paarweise windschiefen Achsen, lassen sich die Drehzylinder längst nicht so dicht lagern; ein Paket Nägel illustriert diesen Punkt höchst anschaulich. Für die Mathematik liegt die Frage auf der Hand: Wie dicht kann denn die ungeordnete Packung von Drehzylindern überhaupt sein? – Claudia Graf und Peter Paukowitsch geben hier eine Packung von kongruenten Drehzylindern an, bei welcher die Zylinderachsen paarweise windschief sind und die fast die Hälfte des Raumes ausfüllt. *ust*

höchstens Oberflächenpunkte gemeinsam haben. Die Dichte d $(0 \leq d \leq 1)$ der Packung gibt an, wieviel des Gesamtraumes durch die Drehzylinder ausgefüllt wird. Liegen die Achsen aller Drehzylinder zueinander parallel und wird jeder Drehzylinder von sechs anderen berührt, so erhält man eine Zylinderpackung von der größtmöglichen Dichte $\pi/\sqrt{12} \approx 0.907$ [1].

Die Menge $Z = \{Z_i | i \in \mathbb{N}\}$ bezeichne die abzählbar unendlich vielen Drehzylinder einer Zylinderpackung und $\varkappa(R)$ eine Kugel vom Radius R und beliebig gewähltem Mittelpunkt. Existiert der folgende Grenzwert, so bestimmt dieser die Dichte der Zylinderpackung [4]:

$$\lim_{R \to \infty} \frac{\sum_{i \in \mathbb{N}} V(Z_i \cap \varkappa(R))}{4R^3\pi/3}$$

Dabei ist mit $V(Z_i \cap \varkappa(R))$ das Volumen der Durchschnittsmenge des Zylinders Z_i und der Kugel $\varkappa(R)$ gemeint.

In [3] wurde gezeigt, daß eine Zylinderpackung mit der positiven Dichte $\pi^2/576 \approx 0.017$ existiert, bei welcher die Drehzylinderachsen paarweise windschief liegen. Wir geben im folgenden ein Beispiel für eine derartige Drehzylinderpackung an, welche beinahe die Hälfte des Gesamtraumes ausfüllt, und diskutieren Verbesserungsmöglichkeiten.

3 Konstruktion der Zylinderpackung

Wir benutzen im folgenden ein kartesisches Rechtskoordinatensystem $[0; x, y, z]$. Der Durchmesser der kongruenten Drehzylinder der Zylinderpackung Z wird mit 1 festgelegt, da die Dichte von Z von der Wahl der Einheitsstrecke unabhängig ist. Die Achsen der Drehzylinder werden in die Erzeugenden von Drehhyperboloiden mit der z-Achse als gemeinsamer Drehachse und konzentrischen Kehlkreisen in der xy-Ebene gelegt. Die Radien dieser Kehlkreise sollen ein ganzzahliges Vielfaches der Drehzylinderdurchmesser betragen (also $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$). Wir sprechen dann von Zylindern der n-ten Schar, falls die betreffenden Zylinderachsen dem Drehhyperboloid Φ_n mit dem Kehlkreisradius n angehören.

Der Neigungswinkel φ_n der Erzeugenden des Drehhyperboloids Φ_n (mit $n \geq 1$) gegenüber der xy-Ebene wird festgelegt durch

$$\tan \varphi_n := \frac{1}{a_n} \quad \text{mit} \quad a_n = c \cdot \arctan n$$

Dabei bedeutet c zunächst eine positive Konstante, welche noch näher zu bestimmen sein wird. Die spezielle Wahl der Arcustangensfunktion beruht auf rechentechnischen Gründen und kann unter bestimmten Voraussetzungen durch eine andere streng monoton wachsende Funktion ersetzt werden [2]. Zu beachten ist, daß die Erzeugenden mit wachsendem Abstand zur z-Achse flacher werden und die Drehzylinderachsen der Zylinderpackung paarweise windschief sind. Im Sonderfall $n = 0$ existiert ein Drehzylinder mit der z-Achse als Drehachse.

Zur Vereinfachung der folgenden Rechenschritte sollen die Drehzylinder jeder Schar regelmäßig um die z-Achse angeordnet werden. Dazu wird der (kleinere) Winkel α_n einer

Drehung um die z-Achse, welche die Achsen von zwei aufeinanderfolgenden Drehzylindern der n-ten Schar ineinander überführt, folgendermaßen definiert:

$$\alpha_n := 72^\circ/2^k \quad \text{für} \quad 2^k \leq n < 2^{k+1} \quad (n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0).$$

Die Anzahl der Drehzylinder der n-ten Schar beträgt demnach $5 \cdot 2^k$. Zudem legen wir fest, daß die Achse von jeweils einem Drehzylinder einer jeden Schar die positive y-Achse schneidet.

In den Sätzen 1 und 2 werden kennzeichnende Bedingungen dafür formuliert, daß der Normalabstand von Erzeugenden der genannten koaxialen Drehhyperboloide mindestens 1 ist. Die Sätze 3 bis 6 bestätigen schrittweise den Hauptsatz 1, daß nämlich die Achsen der oberhalb beschriebenen Drehzylinderkonfiguration tatsächlich den geforderten Mindestabstand 1 aufweisen, also eine Zylinderpackung abgeben. Anschließend wird die Dichte der Packung berechnet (Hauptsatz 2).

4 Rechenschritte

Satz 1 *Der Normalabstand von zwei Erzeugenden p und q des Drehhyperboloids Φ_n ($n \in \mathbb{N}$) ist genau dann ≤ 1, falls für den Winkel $\bar{\alpha}_n$ der (mathematisch negativen) Drehung um die z-Achse, welche p in q überführt, die folgende Ungleichung gilt (siehe Abbildung 1)*

$$\cos \bar{\alpha}_n \leq \frac{4n^2 - 2 - a_n^2}{4n^2 + a_n^2} \tag{1}$$

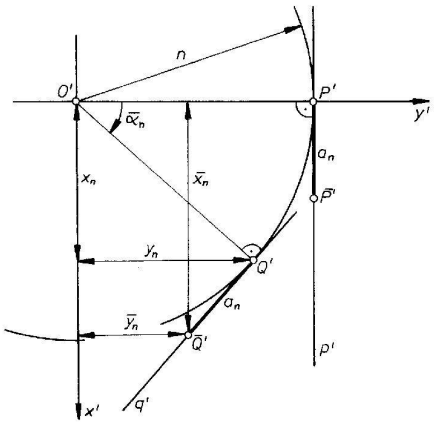

Abb. 1

Beweis: Wir legen die Geraden p und q durch die Punkte $P, \bar{P}$ bzw. $Q, \bar{Q}$ wie folgt fest:

$$P(0,n,0),\ \bar{P}(a_n,n,1),\ Q(x_n,y_n,0),\ \bar{Q}(\bar{x}_n,\bar{y}_n,1) \quad \text{mit}$$
$$x_n = n \cdot \sin \bar{\alpha}_n,\ y_n = n \cdot \cos \bar{\alpha}_n,$$
$$\bar{x}_n = n \cdot \sin \bar{\alpha}_n + a_n \cdot \cos \bar{\alpha}_n,\ \bar{y}_n = n \cdot \cos \bar{\alpha}_n - a_n \cdot \sin \bar{\alpha}_n$$

Bekanntlich berechnet sich der Abstand d zweier Geraden

$$g : s \mapsto \mathbf{a} + s\,\mathbf{g} \text{ und } h : t \mapsto \mathbf{b} + t\,\mathbf{h}$$

unter Verwendung des Spat- sowie des Vektorproduktes zu

$$d = \frac{|[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{g}, \mathbf{h}]|}{|\mathbf{g} \times \mathbf{h}|}$$

Damit erhalten wir für den Abstand d_n zwischen den Geraden p und q:

$$d_n = \frac{\left| \begin{pmatrix} y_n - \bar{y}_n \\ \bar{x}_n - x_n - a_n \\ a_n(\bar{y}_n - y_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n - n \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} y_n - \bar{y}_n \\ \bar{x}_n - x_n - a_n \\ a_n(\bar{y}_n - y_n) \end{pmatrix} \right|}$$

Elementare Äquivalenzumformungen der Ungleichung $d_n \geq 1$ führen schließlich zur Ungleichung (1). Die explizite Durchführung dieser sowie der auch im folgenden nötigen relativ umfangreichen Rechenschritte findet sich in [2]. □

Bemerkung 1

1. Für a_n^2 folgt aus (1) die Abschätzung

$$a_n^2 \leq \frac{4n^2(1 - \cos\bar{\alpha}_n) - 2}{1 + \cos\bar{\alpha}_n} \tag{2}$$

2. Wegen $a_n^2 > 0$ folgt aus (2) für den Winkel $\bar{\alpha}_n$ dann

$$\cos\bar{\alpha}_n < \frac{2n^2 - 1}{2n^2} \tag{3}$$

Satz 2 *Sind p bzw. q Erzeugenden des Drehhyperboloids Φ_k bzw. Φ_l ($k, l \in \mathbb{N}$ und $l \geq k + 1$), welche jeweils die positive y-Achse schneiden, und bezeichnet $\beta_{k|l}$ den Drehwinkel einer im mathematisch negativen Sinn gemessenen Drehung um die z-Achse, welche die Erzeugende q in eine Erzeugende r des Drehhyperboloids Φ_l überführt, so ist der Normalabstand zwischen den Geraden p und r genau dann mindestens 1, falls gilt (siehe Abbildung 2)*

$$\begin{aligned} &\cos\beta_{k|l} \leq \frac{D - \sqrt{D^2 - CE}}{C} \\ &\textit{mit } C = (la_k + ka_l)^2 + a_k^2 a_l^2,\ D = (ka_k + la_l)(la_k + ka_l) - a_k a_l \\ &\textit{und } E = (ka_k + la_l)^2 - (a_k^2 + a_l^2 + a_k^2 a_l^2) \end{aligned} \tag{4}$$

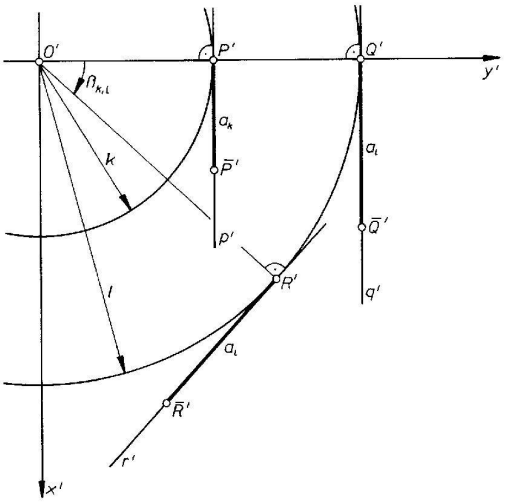

Abb. 2

Der Beweis erfolgt analog zum Nachweis von Satz 1. □

Bemerkung 2

1. Bezeichnet $\beta_{l|k}$ den Drehwinkel einer im mathematische positiven Sinn gemessenen Drehung um die z-Achse, welche die Erzeugende p des Drehhyperboloids Φ_k in die Erzeugende r des Drehhyperboloids Φ_k überführt derart, daß der Normalabstand zwischen den Geraden r und q mindestens 1 beträgt, so gilt $\cos\beta_{k|l} = \cos\beta_{l|k}$, da die Cosinusfunktion gerade ist.
2. Im Spezialfall $k = l - 1$ benachbarter Drehhyperboloide erhalten wir aus (4) die folgende Ungleichung:

$$\cos\beta_{l-1|l} \leq \frac{l^2(a_{l-1}+a_l)^2 - 2la_{l-1}(a_{l-1}+a_l) - a_l^2(l+a_{l-1}^2)}{(l(a_{l-1}+a_l)-a_l)^2 + a_{l-1}^2 a_l^2} \tag{5}$$

3. Für $k = l$ ergibt (4) die Ungleichung (1).

Satz 3 *Der in 3 für die spezielle Drehzylinderkonfiguration gewählte Drehwinkel* $\alpha_n = 72°/2^k$, $2^k \leq n < 2^{k+1}$ $(n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}_0)$ *ist nicht kleiner als der Drehwinkel* $\bar{\alpha}_n$ *aus Satz 1, es gilt daher*

$$\cos\alpha_n \leq \frac{4n^2 - 2 - a_n^2}{4n^2 + a_n^2}$$

Die Konstante c *erfüllt die Abschätzung* $c \leq \sqrt{0.229005051}$.

Beweis: Wir führen folgende Fallunterscheidungen durch:

1.Fall: Wir diskutieren $n = 2^k$ $(n = 1, 2, 4, 8, \ldots)$. Für den Beweis der Ungleichung

$$\cos(72^\circ/n) \leq \frac{4n^2 - 2 - a_n^2}{4n^2 + a_n^2} \quad \text{bzw.} \quad a_n^2 \leq \frac{4n^2(1 - \cos(72^\circ/n)) - 2}{1 + \cos(72^\circ/n)}$$

ersetzen wir $\cos(72^\circ/n)$ durch die zugehörige Reihenentwicklung

$$\cos(72^\circ/n) = 1 - \frac{(0.4\pi)^2}{2!n^2} + \frac{(0.4\pi)^4}{4!n^4} - \ldots + \frac{(-1)^m(0.4\pi)^{2m}}{(2m)!n^{2m}} + \ldots,$$

wobei der rechte Term in der Ungleichung genau dann minimal ist, wenn für $\cos(72^\circ/n)$ die Reihenentwicklung nach dem 3. Glied abgebrochen wird [2]. Wir erhalten somit die Ungleichung

$$c^2(\arctan n)^2 \leq \frac{48n^4((0.4\pi)^2 - 1) - 4n^2(0.4\pi)^4}{48n^4 - 12n^2(0.4\pi)^2 + (0.4\pi)^4},$$

in welcher der rechte Term genau bei $n = 1$ sein Minimum (≈ 0.565047317) besitzt [2]. Ersetzen wir $(\arctan n)^2$ durch den Grenzwert $\pi^2/4$, so ergibt sich für c^2 eine obere Schranke von ≈ 0.229005051.

2.Fall: Es sei nun $2^k < n < 2^{k+1}$. Läuft n im offenen Intervall $(2^k, 2^{k+1})$, so lautet der zugehörige Winkel α_n stets $72^\circ/2^k$. Da jedoch $\langle(4n^2 - 2 - a_n^2)/(4n^2 + a_n^2)\rangle$ eine monoton wachsende Folge darstellt, wächst der rechte Term der Ungleichung $\cos\alpha_n \leq (4n^2 - 2 - a_n^2)/(4n^2 + a_n^2)$, während der linke Term konstant bleibt. Somit folgt – unter Einhaltung der im 1. Fall für die Konstante c angegebenen Bedingung – die Richtigkeit von Satz 3. □

Bemerkung 3

1. Aus Satz 1 und 3 folgt, daß der Normalabstand von je zwei Drehzylinderachsen derselben Schar der in 3 beschriebenen Zylinderkonfiguration mindestens 1 ist.
2. Es ist möglich, die Konstante c größer als angegeben zu wählen, womit sich der Neigungswinkel der Drehzylinderachsen gegenüber π_1 verringert. Da jedoch die Anzahl der Achsen pro Schar festgelegt ist, hat diese Änderung von c keine Auswirkung auf die Dichte der Zylinderpackung.

Satz 4 *Der für die spezielle Drehzylinderkonfiguration in 3 gewählte Drehwinkel* $\alpha_n = 72^\circ/2^k$, $2^k \leq n < 2^{k+1}$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\},\ k \in \mathbb{N}_0)$ *ist nicht kleiner als der Drehwinkel* $\beta_{1|n}$ *aus Satz 2, es gilt daher*

$$\cos\alpha_n \leq \frac{D - \sqrt{D^2 - CE}}{C}$$

$$\textit{mit } C = (a_n + na_1)^2 + a_1^2a_n^2,\ D = (na_n + a_1)(a_n + a_1) - a_1a_n$$

$$\textit{und } E = (na_n + a_1)^2 - (a_1^2 + a_n^2 + a_1^2a_n^2).$$

Beweis: Wegen $\alpha_n \geq 72^\circ/n$ und $\cos(0.4\pi/n) \leq (4n^4 - 2n^2(0.4\pi)^2 + (0.4\pi)^4)/4n^4$ genügt es, für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$ die folgende Ungleichung zu beweisen:

$$1 - \frac{(0.4\pi)^2}{2n^2} + \frac{(0.4\pi)^4}{4n^4} \leq \frac{D - \sqrt{D^2 - CE}}{C}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
&n^{10} \cdot 576(a_n - a_1)^2 - n^9 \cdot 1152(a_n - a_1)^2 \\
&+n^8 \cdot 576(0.4\pi)^2 a_1(a_n - a_1) + n^7 \cdot 576(0.4\pi)^2(a_n - a_1)^2 \\
&+n^6 \cdot (48(0.4\pi)^4 a_1(4a_1 - a_n) - 576(0.4\pi)^2(1 + a_1^2)a_n^2) \\
&+n^5 \cdot 48(0.4\pi)^4(8a_1a_n - a_1^2 - a_n^2) \\
&+n^4 \cdot (192(0.4\pi)^4(1 + a_1^2)a_n^2 - 24(0.4\pi)^6 a_1^2) \\
&-n^3 \cdot 48(0.4\pi)^6 a_1 a_n \\
&+n^2 \cdot ((0.4\pi)^8 a_1^2 - 24(0.4\pi)^6(1 + a_1^2)a_n^2) \\
&+n \cdot 2(0.4\pi)^8 a_1 a_n + (0.4\pi)^8(1 + a_1^2)a_n^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Die Richtigkeit dieser Ungleichung ergibt sich durch Koeffizientenvergleich, die explizite Durchführung findet sich in [2]. □

Bemerkung 4 Aus Satz 2 und 4 folgt, daß für die in 3 beschriebene Zylinderkonfiguration der Normalabstand von je einer Drehzylinderachse der ersten sowie der n-ten Schar $(n \geq 2)$ mindestens 1 ist.

Satz 5 *Der für die spezielle Drehzylinderkonfiguration in 3 gewählte Drehwinkel* $\alpha_n = 72^\circ/2^k$, $2^k \leq n < 2^{k+1}$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\},\ k \in \mathbb{N}_0)$ *ist nicht kleiner als der Drehwinkel* $\beta_{n-1|n}$ *aus Satz 2, es gilt also die Ungleichung*

$$\cos\alpha_n \leq \frac{n^2(a_{n-1} + a_n)^2 - 2na_{n-1}(a_{n-1} + a_n) - a_n^2(1 + a_{n-1}^2)}{(n(a_{n-1} + a_n) - a_n)^2 + a_{n-1}^2 a_n^2}$$

Beweis: Wegen $72^\circ/2^k \geq 72^\circ/n$ ersetzen wir in der zu beweisenden Ungleichung den Term α_n durch $72^\circ/n$, und erhalten nach Äquivalenzumformungen die folgende Abschätzung:

$$1 - (\sin(36^\circ/n))^2 \leq \frac{n(n-1)(1+\varepsilon)^2}{c^2 f^2 + (n + \varepsilon(n-1))^2}$$

$$\text{mit } \varepsilon = \varepsilon(n) := f(n)/f(n-1),\ \varepsilon(n) > 1 \text{ und } f = f(n) := \arctan n$$

Anstelle von $\sin(36^\circ/n)$ kann die zugehörige Reihenentwicklung bis zum zweiten Glied eingesetzt werden [2]:

$$1 - \left(\frac{0.2\pi}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{0.2\pi}{n}\right)^4 - \frac{1}{36}\left(\frac{0.2\pi}{n}\right)^6 \leq \frac{n(n-1)(1+\varepsilon)^2}{c^2 f^2 + (n + \varepsilon(n-1))^2}$$

Durch Äquivalenzumformungen und Vernachlässigung des Terms $-(0.2\pi/n)^6/36$ gelangt man zu

$$\begin{aligned} n^5 \cdot 3(1-\varepsilon^2) + n^4 \cdot (3(c^2f^2+\varepsilon^2) - 3(0.2\pi)^2(1+\varepsilon)^2) \\ +n^3 \cdot (6\varepsilon(0.2\pi)^2(1+\varepsilon)) + n^2 \cdot (-3(0.2\pi)^2(c^2f^2+\varepsilon^2) + (0.2\pi)^4(1+\varepsilon)^2) \\ +n \cdot (-2\varepsilon(1+\varepsilon)(0.2\pi)^4) + (0.2\pi)^4(c^2f^2+\varepsilon^2) \leq 0 \end{aligned}$$

Die Richtigkeit dieser Ungleichung ergibt sich durch Koeffizientenvergleich [2]. □

Bemerkung 5 Aus Satz 2 und 5 folgt, daß für die in 3 beschriebene Zylinderkonfiguration der Normalabstand von je zwei Drehzylinderachsen aus benachbarten Scharen mindestens 1 ist.

Satz 6 *Der für die spezielle Drehzylinderkonfiguration in 3 gewählte Drehwinkel* $\alpha_n = 72^\circ/2^k$, $2^k \leq n < 2^{k+1}$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\},\ k \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$ *ist nicht kleiner als der Drehwinkel* $\beta_{m|n}$ $(m,n \in \mathbb{N},\ 1 < m < n-1)$ *aus Satz 2, es gilt daher die Ungleichung*

$$\cos\alpha_n \leq \frac{D - \sqrt{D^2 - CE}}{C}$$

$$\textit{mit } C = (ma_n + na_m)^2 + a_m^2 a_n^2,\ D = (na_n + ma_m)(ma_n + na_m) - a_m a_n$$

$$\textit{und } E = (na_n + ma_m)^2 - (a_m^2 + a_n^2 + a_m^2 a_n^2)$$

Beweis: Der Nachweis gliedert sich in Fallunterscheidungen, die Argumentation wird durch die Abbildung 3 unterstützt.

1. Wir führen für spezielle Geraden aus verschiedenen Scharen folgende Bezeichnungen ein $(n > 2)$: a bzw. $\bar{a}$ bezeichnet eine Gerade der ersten Schar bzw. der $(n-1)$-ten Schar mit der Steigung $1/a_1$ bzw. $1/a_{n-1}$; e bzw. $\bar{e}$ bezeichnet eine Gerade der $(n-1)$-ten Schar bzw. der ersten Schar mit der Steigung $1/a_{n-1}$ bzw. $1/a_1$; und schließlich gibt $\bar{f}$ eine Gerade der n-ten Schar mit der Steigung $1/a_n$ ab. Diese Geraden sollen jeweils die positive y-Achse schneiden, woraus die Parallelität von a zu $\bar{e}$ sowie von $\bar{a}$ zu e folgt. Mit f bezeichnen wir jene Gerade, die aus $\bar{f}$ bei Drehung um die z-Achse um den Winkel $-2\alpha_n$ hervorgeht.
2. Wir zeigen, daß der Normalabstand zwischen den Geraden $\bar{e}$ und f mindestens 1 ist: Die Ungleichung

$$\overline{\bar{e}f} = \frac{|n(a_n + a_1)(1-\cos\alpha_n) + (a_n\cos\alpha_n - a_1)|}{\sqrt{a_n^2 - 2a_1a_n\cos\alpha_n + a_1^2 + a_1^2a_n^2(1-(\cos\alpha_n)^2)}} \geq 1$$

ist nach Ersetzen von $\cos\alpha_n$ durch

$$1 - \frac{(0.4\pi)^2}{2n^2} + \frac{(0.4\pi)^4}{24n^4}$$

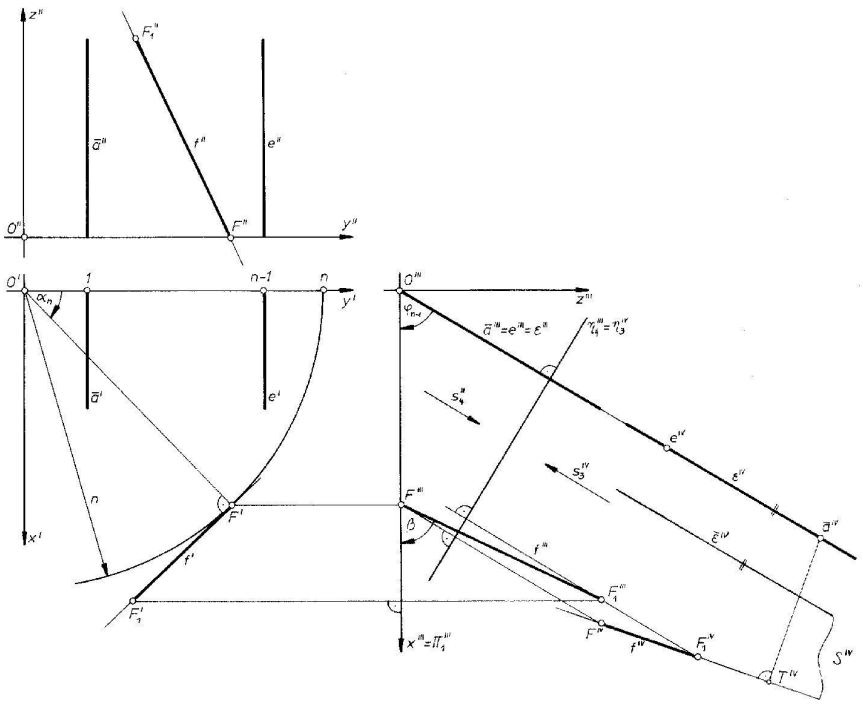

Abb. 3

äquivalent zu

$$\begin{aligned} n^5 \cdot 48(a_n^2 - a_1^2) + n^4 \cdot (-48a_n^2(1+a_1^2) + 12(0.4\pi)^2(a_n+a_1)^2) \\ +n^3 \cdot (-24(0.4\pi)^2 a_n(a_n+a_1)) \\ +n^2 \cdot (12(0.4\pi)^2 a_n^2(1+a_1^2) - (0.4\pi)^4(a_n+a_1)^2) \\ +n \cdot 2(0.4\pi)^4 a_n(a_n+a_1) - (0.4\pi)^4 a_n^2(1+a_1^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Die Richtigkeit dieser Ungleichung ergibt sich durch Koeffizientenvergleich.

3. Wir zeigen, daß der Normalabstand zwischen den Geraden $\bar{a}$ und f mindestens 1 beträgt: Dazu betrachten wir in Abbildung 3 die Geraden $\bar{a}$, e und f in Grund-, Auf- und Kreuzriß. Den Winkel zwischen dem Kreuzriß der Geraden f und der xy-Ebene π_1 bezeichnen wir mit β. Man erkennt folgende Äquivalenzen:

(a)

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1} \geq \beta \Leftrightarrow \tan\varphi_{n-1} \geq \tan\beta \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n-1}} \geq \frac{1}{a_n \cos\alpha_n} \\ \Leftrightarrow a_n \cos\alpha_n - a_{n-1} \geq 0. \end{aligned}$$

Der Normalabstand von e zu f ist kleiner als jener von $\bar{a}$ zu f. Wegen $\overline{ef} \geq 1$ (siehe Satz 5) folgt damit $\overline{af} \geq 1$, wobei diese Ungleichung für alle natürlichen Zahlen n mit $a_n \cos\alpha_{n-1} \geq 1$ gilt.

(b)

$$\varphi_{n-1} \leq \beta \Leftrightarrow a_n \cos\alpha_n - a_{n-1} \leq 0.$$

Der Normalabstand von e zu f ist größer als jener von $\bar{a}$ zu f. Wir bezeichnen mit ε die Verbindungsebene der parallelen Geraden $\bar{a}$ und e sowie mit $\bar{\varepsilon}$ eine der beiden im Abstand 1 parallel zu ε verlaufenden Ebenen. Für die y-Koordinate y_s des Schnittpunktes S von $\bar{\varepsilon}$ und f gilt

$$y_s = n\cos\alpha_n - \frac{a_n(1 - n\,\sin\alpha_n\,\sin\varphi_{n-1})\,\sin\alpha_n}{(a_n\cos\alpha_n - a_{n-1})\,\sin\varphi_{n-1}} \leq 1$$

Deuten wir S als Schnittpunkt der Gemeinnormalen von k und f, wobei k eine zu $\bar{a}$ und e parallele Gerade in der Ebene ε bezeichnet, so ist der Normalabstand zwischen k und f größer als 1. Bezeichnen wir mit T den Schnittpunkt der Gemeinnormalen von $\bar{a}$ und f mit der Geraden f, so folgt unsere Behauptung, falls die y-Koordinate y_t von T größer ist als jene von S. Für y_t erhalten wir

$$y_t = n\cos\alpha_n - \\ a_n(\sin\alpha_n)^2 \frac{a_n(1 + a_{n-1}^2)(1 - n\cos\alpha_n) - n(a_{n-1} - a_n\cos\alpha_n)}{(a_n\cos\alpha_n - a_{n-1})^2 + a_n^2(1 + a_{n-1}^2)(\sin\alpha_n)^2}$$

Die Ungleichung $y_t > y_s$ ist daher äquivalent zu

$$\sqrt{1 + a_{n-1}^2}\,a_n \sin\alpha_n((a_{n-1} - a_n\cos\alpha_n) + n\,(a_n - a_{n-1}\cos\alpha_n)) \\ > (a_n\cos\alpha_n - a_{n-1})^2 + (1 + a_{n-1}^2)a_n^2(\sin\alpha_n)^2$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichung ergibt sich aber aus den beiden folgenden Ungleichungen [2]:

$$\sqrt{1 + a_{n-1}^2}\,a_n \sin\alpha_n(a_{n-1} - a_n\cos\alpha_n) > (a_n\cos\alpha_n - a_{n-1})^2 \text{ und}$$

$$\sqrt{1 + a_{n-1}^2}\,a_n \sin\alpha_n(a_n - a_{n-1}\cos\alpha_n) > (1 + a_{n-1}^2)a_n^2(\sin\alpha_n)^2$$

4. Der Normalabstand zwischen den Geraden $\bar{e}$ und f ist nicht größer als jener von a und f.
5. Bezeichnet b eine Gerade der m-ten Schar $(1 < m < n - 1)$, welche die positive y-Achse schneidet, so liegt b zwischen den Geraden a und e.
   (a) Dreht man die Gerade b in der xz-parallelen Ebene durch b solange um ihren Schnittpunkt mit der y-Achse, bis sie in eine Lage $\bar{b}$ mit der Steigung $1/a_1$ gelangt, so verläuft $\bar{b}$ parallel zu a und $\bar{e}$, wobei aus 2 sowie Satz 4 folgt, daß der Normalabstand zwischen den Geraden $\bar{b}$ und f mindestens 1 ist. Dies gilt, da die Gerade f die Ebene ε *rechts* von e schneidet, also die y-Koordinate des Schnittpunktes von f und ε größer als $n - 1$ ist.

(b) Dreht man in gleicher Weise die Gerade b in die Lage $\tilde{b}$ mit der Steigung $1/a_{n-1}$, so verläuft diese gedrehte Gerade $\tilde{b}$ parallel zu $\bar{a}$ und e. Weiter schneidet die Gerade f die Ebene ε im Falle $a_n \cos \alpha_n - a_{n-1} > 0$ *rechts* von e bzw. im Falle $a_n \cos \alpha_n - a_{n-1} < 0$ *links* von $\bar{a}$, sodaß also die y-Koordinate des Schnittpunktes von f und ε größer als $n-1$ bzw. kleiner als 1 ist. Zusammen mit 3 und Satz 5 folgt daher insgesamt, daß der Normalabstand zwischen den Geraden $\tilde{b}$ und f mindestens 1 beträgt.

(c) Da die Gerade b zwischen den beiden beschriebenen Extremlagen $\bar{b}$ und $\tilde{b}$ liegt und diese beiden Geraden jeweils den Mindestabstand 1 zur Geraden f aufweisen, folgt damit schließlich, daß der Normalabstand der Geraden b der m-ten Schar zur Geraden f der n-ten Schar mindestens 1 ist.

Damit ist der Beweis von Satz 6 abgeschlossen. □

Aus den Sätzen 1 bis 6 folgt nun unmittelbar der in 3 angekündigte

Hauptsatz 1 *Der Normalabstand von je zwei Drehzylinderachsen der in 3 beschriebenen Zylinderkonfiguration ist mindestens* 1. *Diese Drehzylinder haben daher höchstens Oberflächenpunkte gemeinsam, bestimmen also tatsächlich eine Zylinderpackung mit paarweise windschiefen Achsen.*

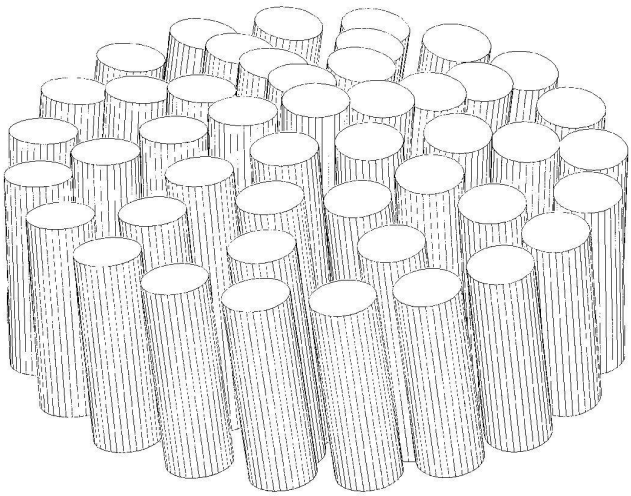

Abb. 4

5 Resultat

Wir berechnen nun die Dichte der Zylinderpackung aus 3 und bestätigen damit das in 1 formulierte Ergebnis dieser Publikation:

Hauptsatz 2 *Die Dichte der im Abschnitt 3 beschriebenen Zylinderpackung beträgt* $5/12$.

Beweis:

1. Wir ändern zur Berechnung der Dichte der Zylinderpackung die Lage der einzelnen Drehzylinder wie folgt ab:

   Jede Zylinderachse schneidet die xy-Ebene π_1 und schließt mit π_1 einen Winkel $\varphi_i < 90°$ ein. Dreht man jeden Drehzylinder um die Gemeinnormale einerseits seiner Drehachse und andererseits der z-Achse um den Winkel $90° - \varphi_i$ derart, daß die Drehzylinderachse dann parallel zur z-Achse verläuft, dann bleiben die Schnittpunkte der Zylinderachsen mit π_1 fest. Weiters gilt, daß alle Drehzylinder nach dem Drehvorgang zueinander parallel liegen und höchstens Oberflächenpunkte gemeinsam haben, also wieder eine Packung bestimmen.

   Durch dieses *Geradestellen* ändert sich am Volumen der Durchschnittsmenge zwischen jedem Drehzylinder der Packung sowie der in Kapitel 2 angeführten Kugel $\varkappa(R)$ nichts, sodaß auch die zu berechnende Dichte der Zylinderpackung ungeändert bleibt. Weiter ist der Durchschnitt einer jeden zu π_1 parallelen Ebene mit der gedrehten Zylinderpackung kongruent, womit sich das Problem der Dichteberechnung der Zylinderpackung aus 3 darauf reduziert, die Dichte einer Kreispackung in π_1 zu bestimmen.

2. Die Dichte d der Kreispackung ist das Produkt des Kreisinhaltes $(= \pi/4)$ und der Anzahldichte A der Packung [4]. Die Anzahl $A(n)$ der Drehzylinderachsen bis zum Zählindex $n = 2^{k+1} - 1$ berechnet sich aufgrund der Anzahl $5 \cdot 2^k$ der Zylinderachsen der m-ten Schar $(2^k \leq m < 2^{k+1})$ gemäß

$$A(n) = 1 + \sum_{j=0}^{k} 5 \cdot 2^j \cdot 2^j = 1 + 5\,\frac{4^{k+1} - 1}{3}$$

   Damit folgt für die Anzahldichte

$$A = \lim_{R \to \infty} \frac{A(n)}{R^2 \pi}$$

   der Wert

$$A = \lim_{k \to \infty} \frac{1 + 5(4^{k+1} - 1)/3}{(2^{k+1} - 1/2)^2 \pi} = \frac{5}{3\pi}$$

Wir erhalten somit $d = 5/12 = 0.41\dot{6}$ als Dichte der in 3 angeführten Zylinderpackung mit paarweise windschiefen Achsen. □

6 Diskussion

1. Vergleicht man nun die Dichte $d = 5/12$ dieser Zylinderpackung mit paarweise windschiefen Achsen aus 3 mit der maximal möglichen Dichte einer Zylinderpackung – bei allerdings dann parallelen Achsen – von $\pi/\sqrt{12} \approx 0.907$, so erkennt man, daß unsere Packung noch große Freiräume aufweisen muß. Die Dichte $d = 5/12$ liegt jedoch weit über dem von K. Kuperberg [3] berechneten Wert von $\pi^2/576 \approx 0.017$ bei einer speziellen Zylinderpackung mit paarweise windschiefen Achsen.

2. Wählt man anstelle des Winkels $\alpha_n = 72^\circ/2^k$ $(2^k \leq n < 2^{k+1})$ den Winkel $72^\circ/n$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist damit die windschiefe Lage von je zwei Zylinderachsen sowie der Mindestnormalabstand 1 zwischen je zwei Achsen *derselben* Schar gewährleistet. Diese Zylinderkonfiguration erfüllt demnach schon einige wesentliche der in 2 und 3 formulierten Forderungen. Unter der Annahme, daß tatsächlich eine Zylinderpackung mit paarweise windschiefen Achsen vorliegt, weist sie dann eine Packungsdichte von $5/8 = 0.625$ auf. Dieser um $5/24 = 0.208\dot{3}$ größere Wert gegenüber $d = 5/12$ kann daher als obere Schranke für Zylinderpackungen der in 3 beschriebenen Art angesehen werden.

Literatur

[1] A. Bezdek und W. Kuperberg. Maximum density space packing with congruent circular cylinders of infinite length, *Mathematika* 37 (1990), 74–80

[2] C. Graf. Über möglichst dichte Packungen im 3-Raum, bestehend aus unbegrenzten kongruenten Drehzylindern mit paarweise windschiefen Achsen. Dissertation, Technische Universität Wien, 1994

[3] K. Kuperberg. A nonparallel cylinder packing with positive density, *Mathematika* 37 (1990), 324–331

[4] L. F. Toth. *Reguläre Figuren.* Verlag der ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest 1965, 153–155

Claudia Graf und Peter Paukowitsch
Technische Universität Wien
Institut für Geometrie
Wiedner Hauptstr. 8–10/113
A-1040 Wien