

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 51 (1996)

**Artikel:** Pflasterungen von Rechtecken mit Steinen vom Typ  $1 \times j$   
**Autor:** Hiemer, Eva / Korn, Christian  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46968>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Pflasterungen von Rechtecken mit Steinen vom Typ $1 \times j$

Eva Hiemer und Christian Korn

Eva Hiemer wurde 1977 in Erlangen geboren. Zur Zeit der Abfassung dieses Beitrages war sie Schülerin des Gymnasiums Herzogenaurach.

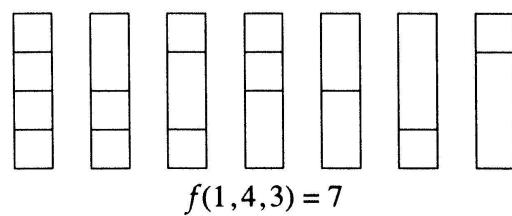
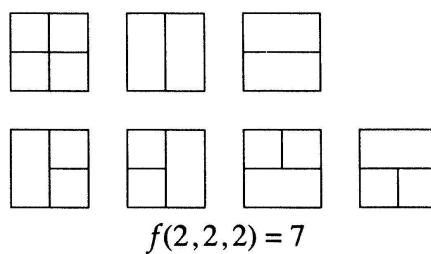
Christian Korn wurde 1974 in Fürth/Bayern geboren. Während seiner Gymnasialzeit nahm er erfolgreich am Bundeswettbewerb Mathematik teil, beim Wettbewerb "Jugend forscht" gewann er auf Landesebene einen Preis. Seit 1994 studiert er Mathematik, zuerst in Erlangen und dann in Kaiserslautern.

## 1 Problemstellung

Betrachtet wird die folgende Fragestellung:

Gegeben sei ein  $n \times m$ -Rechteck ( $n, m \in \mathbb{N}$ ) und  $1 \times 1, 1 \times 2, \dots, 1 \times k$ -Steine (beliebig viele von jeder Sorte,  $k \in \mathbb{N}$ ).

Gesucht ist die Anzahl der Möglichkeiten  $f(n, m, k)$ , das  $n \times m$ -Rechteck mit den Steinen zu pflastern, d.h. so zu überdecken, daß es völlig bedeckt ist und nirgends zwei Steine übereinander liegen. Dabei dürfen die Steine sowohl "vertikal", also als  $1 \times j$ -Steine ( $1 \leq j \leq k$ ), als auch "horizontal", also als  $j \times 1$ -Steine verwendet werden. Dabei gelten zwei Pflasterungen auch dann als verschieden, wenn sie sich durch Spiegelung oder Drehung ineinander überführen lassen. So ist beispielsweise



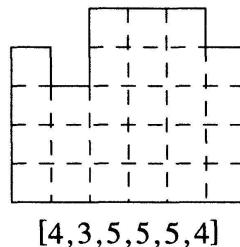
Das mathematische Institut der Universität Erlangen-Nürnberg veranstaltete während des Wintersemesters 1995/96 eine Arbeitsgemeinschaft für dreizehn- bis neunzehnjährige Schüler. Es sollten dabei "merkwürdige Zahlenfolgen" untersucht werden. Christian Korn, damals Student des zweiten Semesters, nahm an den Veranstaltungen als Betreuer teil. Zusammen mit der Gymnasialschülerin Eva Hiemer bearbeitete er die im Titel angegebene Fragestellung. Der vorliegende, von beiden gemeinsam verfasste Bericht enthält die gewonnenen Resultate. jc, ust

## 2 Allgemeiner Ansatz

Es wird sich zeigen, daß es notwendig ist, außer Rechtecken der Breite  $n$  und der Höhe  $m$  auch allgemeinere Formen zu betrachten. Ziel ist es zunächst, eine Rekursionsformel zur Berechnung der Anzahlen der entsprechenden Pflasterungen zu erhalten.

### 2.1 Notationen

Dazu sei  $[x_1, \dots, x_r]$  für  $r \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{N}_0$  die Form, die durch horizontales Aneinanderfügen von  $1 \times x_1, \dots, 1 \times x_r$ -Rechtecken entsteht<sup>1)</sup>.



Dabei werden die in  $[x_1, \dots, x_r]$  enthaltenen  $1 \times x_j$ -Rechtecke ( $1 \leq j \leq r$ ) im folgenden als Teilrechtecke bezeichnet. Schließlich sei  $g(k, [x_1, \dots, x_r])$  die Anzahl der möglichen Pflasterungen von  $[x_1, \dots, x_r]$ , wenn  $1 \times 1, 1 \times 2, \dots, 1 \times k$ -Steine zur Verfügung stehen.

### 2.2 Herleitung einer Rekursionsformel für $g(k, [x_1, \dots, x_r])$

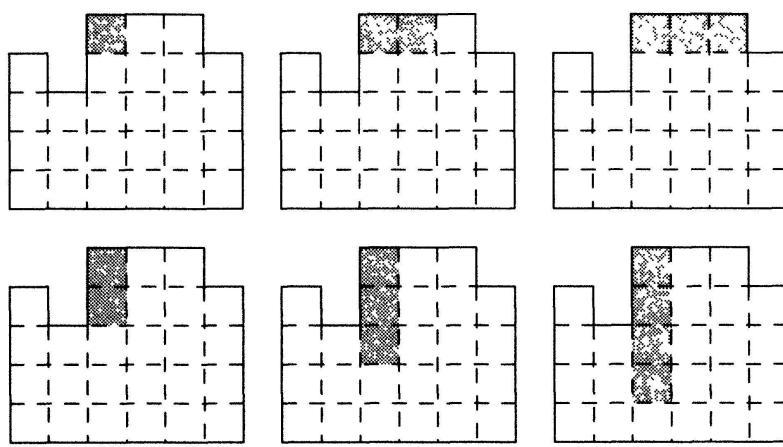
Sei nun  $[x_1, \dots, x_r]$  vorgegeben und

$$m := \min \{i \in \{1, \dots, r\} : x_i = \max \{x_1, \dots, x_r\}\},$$

d.h.  $m$  gibt die Nummer des Teilrechtecks von  $[x_1, \dots, x_r]$  an, das maximale Höhe hat und unter den Teilrechtecken maximaler Höhe das am weitesten links angeordnete ist. Im obigen Beispiel mit  $[x_1, \dots, x_r] = [4, 3, 5, 5, 5, 4]$  wäre also etwa  $m = 3$  und  $x_m = 5$ .

Falls  $[x_1, \dots, x_r]$  nicht ein "Nullrechteck"  $\underbrace{[0, \dots, 0]}_r$  ist, so folgt  $x_m \geq 1$ .

Bei einer möglichen Pflasterung von  $[x_1, \dots, x_r]$  ist das oberste Kästchen des  $1 \times x_m$ -Teilrechtecks entweder durch einen  $1 \times 1$ -Stein bedeckt oder durch einen  $1 \times j$ -Stein oder aber durch einen  $j \times 1$ -Stein ( $2 \leq j \leq k$ ) – vgl. Beispiel:



Beispiel mit  $k = 4$

1) Sofern nicht anders angegeben, sind alle Variablen aus dem Wertebereich  $\mathbb{N}_0$ .

Offenbar gibt es gerade

$$g(k, [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m - 1, x_{m+1}, \dots, x_r])$$

Pflasterungen von  $[x_1, \dots, x_r]$ , bei denen die Spitze des  $1 \times x_m$ -Teilrechtecks durch einen  $1 \times 1$ -Stein bedeckt wird. Teil eines vertikalen  $1 \times j$ -Steines ( $2 \leq j \leq k$ ) kann diese Spitze nur dann sein, wenn  $x_m \geq j$  erfüllt ist; hierfür gibt es dann

$$g(k, [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m - j, x_{m+1}, \dots, x_r])$$

Möglichkeiten. Auch Teil eines horizontalen  $j \times 1$ -Steines ( $2 \leq j \leq k$ ) kann die Spitze des  $1 \times x_m$ -Teilrechtecks nur dann sein, wenn eine Nebenbedingung erfüllt ist; diese lautet nun

$$x_{m+1} = \dots = x_{m+j-1} = x_m.$$

Hierfür gibt es dann

$$g(k, [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m - 1, x_{m+1} - 1, \dots, x_{m+j-1} - 1, x_{m+j}, \dots, x_r])$$

Möglichkeiten.

Damit ergibt sich die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} g(k, [x_1, \dots, x_r]) &= g(k, [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m - 1, x_{m+1}, \dots, x_r]) \\ &+ \sum_{j=2}^{\min\{k, x_m\}} g(k, [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m - j, x_{m+1}, \dots, x_r]) \\ &+ \sum_{j=2}^{\min\{k, \max\{i \mid i+m-1 \leq r\}\}} g(k, [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m - 1, \dots, x_{m+j-1} - 1, x_{m+j}, \dots, x_r]) \\ &= \sum_{j=1}^{\min\{k, x_m\}} g(k, [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m - j, x_{m+1}, \dots, x_r]) \\ &+ \sum_{j=2}^{\min\{k, \max\{i \mid i+m-1 \leq r\}\}} g(k, [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m - 1, \dots, x_{m+j-1} - 1, x_{m+j}, \dots, x_r]). \quad (1) \end{aligned}$$

Da durch diesen Zusammenhang  $g(k, [x_1, \dots, x_r])$  zurückgeführt wird auf die Berechnung von Werten  $g(k, [y_1, \dots, y_r])$  mit  $0 \leq \sum_{j=1}^r y_j < \sum_{j=1}^r x_j$  und offensichtlich  $g(k, [\underbrace{0, \dots, 0}_r \text{ Stück}]) = 1$  für alle  $k, r \in \mathbb{N}$  gilt, ist  $g(k, [x_1, \dots, x_r])$  damit für alle

$k, r \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_r \in \mathbb{N}_0$  eindeutig berechenbar.

Dieser Algorithmus ist auch ohne Probleme in ein Computerprogramm umsetzbar – hierfür empfiehlt sich MAPLE mit Verwendung der “OPTION REMEMBER”, da dann schon berechnete Zwischenergebnisse nicht noch einmal berechnet werden müssen, was gerade hier sehr effizient ist. So benötigt auf einem 80486er die Berechnung des Wertes

$$g(5, [15, 15, 15, 15, 15]) = 1438987500321267955360615$$

nur etwa 3 Minuten.

Die Berechnung kann noch verkürzt werden, wenn man die (offensichtlichen) Zusammensetzungen

$$g(k, [x_1, \dots, x_r]) = g(k, [x_r, \dots, x_1])$$

bzw.

$$g(k, [x_1, \dots, x_r]) = g(k, [x_1, \dots, x_{j-1}]) \cdot g(k, [x_{j+1}, \dots, x_r])$$

im Falle  $x_j = 0$  ausnutzt.

Die Abbildung

$$f : (n, m, k) \mapsto g(k, \underbrace{[m, \dots, m]}_{n \text{ Stück}})$$

liefert somit die Antwort auf das eingangs gestellte Problem.

Insbesondere gilt  $f(n, m, k) = f(m, n, k)$ .

### 3 Spezialfälle

#### 3.1 Pflasterung mit $1 \times 1$ -Steinen

Stehen nur  $1 \times 1$ -Steine zur Pflasterung zur Verfügung, so liegt ein trivialer Sonderfall vor: Offensichtlich ist  $f(n, m, 1) = 1$  für alle  $n, m \in \mathbb{N}_0$ .

#### 3.2 Pflasterungen eines $1 \times n$ -Rechtecks

Im Falle eines nur eine Einheit breiten Rechtecks kann die zweite Summe in Formel (1) weggelassen werden, da liegende Steine, die nicht die Größe  $1 \times 1$  haben, nicht auftreten können (die zweite Summe in (1) wird dann Null, da die Obergrenze immer höchstens gleich  $r = 1$  ist).

Ferner gilt  $m = 1$ , es ergibt sich also

$$g(k, [x]) = \sum_{j=1}^{\min\{k, x\}} g(k, [x-j]) = \begin{cases} \sum_{j=1}^k g(k, [x-j]) & k \leq x \\ \sum_{j=0}^{x-1} g(k, [j]) & k > x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

3.2.1 Pflasterungen eines  $1 \times n$ -Rechtecks mit  $1 \times 1$ -und  $1 \times 2$ -Steinen. Setzt man in (2)  $k = 2$ , so erhält man

$$g(2, [x]) = \begin{cases} g(2, [x-1]) + g(2, [x-2]) & x \geq 2 \\ g(2, [0]) & x = 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Somit gilt  $g(2, [0]) = g(2, [1]) = 1$  und

$$g(2, [x]) = g(2, [x-1]) + g(2, [x-2])$$

für  $x \geq 2$ . Dieselbe Rekursionsformel mit den gleichen Anfangswerten erfüllen die Fibonaccizahlen  $f_n$  für  $n \in \mathbb{N}_0$ . Somit folgt

$$g(2, [x]) = f_x$$

für alle  $x \in \mathbb{N}_0$ .

3.2.2 Pflasterungen eines  $1 \times n$ -Rechtecks mit  $1 \times 1, \dots, 1 \times k$ -Steinen ( $k > 2$ ). Ähnlich wie in 3.2.1 erfüllen hier die Werte  $g(k, [x])$  die Beziehung

$$g(k, [x]) = \sum_{j=1}^k g(k, [x-j]) \quad (3)$$

im Falle  $x \geq j$ . Für  $x < k$  gilt

$$g(k, [x]) = g(k-1, [x]), \quad (4)$$

da dann keine  $1 \times k$ -Steine auftreten können.

Tabelle 1 zeigt einige Werte, die mit den bislang gefundenen Formeln berechnet wurden.

		x					
		1	2	3	4	5	6
k	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	3	5	8	13
	3	1	2	4	7	13	24
	4	1	2	4	8	15	29
	5	1	2	4	8	16	31
	6	1	2	4	8	16	32

Tabelle 1 Werte  $g(k, [x])$

Es fällt auf, daß

$$g(k, [x]) = 2^{x-1} \quad (5)$$

für  $1 \leq x \leq k$  gilt. Dies kann leicht durch vollständige Induktion bewiesen werden:

Induktionsanfang: Für  $k = 1$  ist  $g(1, [1]) = 1 = 2^0$ , also ist die Behauptung in diesem Falle richtig.

Induktionsannahme: Die Behauptung sei nun richtig für ein  $k \in \mathbb{N}$ .

Induktionsschritt: Falls  $1 \leq x < k$ , so ist nach (4) und der Induktionsannahme

$$g(k, [x]) = g(k - 1, [x]) = 2^{x-1},$$

also ist dann die behauptete Formel richtig.

Für  $x = k$  gilt

$$\begin{aligned} g(k, [k]) &\stackrel{(3)}{=} \sum_{j=1}^k g(k, [k-j]) \\ &\stackrel{\text{Ind. Ann.}}{=} \sum_{j=1}^{k-1} 2^{k-j-1} + g(k, [0]) \\ &= 2^{k-1} - 2^0 + 1 = 2^{k-1}, \end{aligned}$$

also ist die Formel auch in diesem Falle richtig.

Ebenfalls durch vollständige Induktion nach  $k$  kann man zeigen, daß

$$g(k, [k+1]) = 2^k - 1$$

und

$$g(k, [k+2]) = 2^{k+1} - 3$$

gilt.

Im Induktionsschritt des Beweises zu (5) wurde

$$g(k, [k]) = 2^{k-1}$$

gezeigt. Dies kann auch direkt abgeleitet werden:

Zu pflastern ist ein  $1 \times k$ -Rechteck, wobei alle Steine, die darin Platz finden, zulässig sind. Nun gibt es gerade  $k - 1$  Stellen, an denen zwei Steine aneinandergrenzen können. Notiert man für jeden dieser  $k - 1$  Übergänge eine 0, falls kein Stein dort endet, und eine 1, falls ein Übergang zu einem anderen Stein stattfindet, so erhält man eine  $(k - 1)$ -stellige Binärzahl.

Umgekehrt kann aus jeder  $(k - 1)$ -stelligen Binärzahl eine zulässige Pflasterung gewonnen werden, indem an jeder Stelle, an der eine 1 steht, ein neuer Stein begonnen wird. Offensichtlich erhält man so eine eindeutige Beziehung zwischen den Pflasterungen des  $1 \times k$ -Rechtecks mit  $1 \times 1, \dots, 1 \times k$ -Steinen und allen  $(k - 1)$ -stelligen Binärzahlen. Da es genau  $2^{k-1}$  solche Binärzahlen gibt, folgt die Behauptung.

### 3.3 Pflasterungen eines $2 \times n$ -Rechtecks mit $1 \times 1$ - und $1 \times 2$ -Steinen

Im folgenden sei stets  $n \geq 4$ . Für  $k = 2$  liefert (1) dann

$$\begin{aligned} g(2, [n, n]) &= g(2, [n-1, n]) + g(2, [n-2, n]) + g(2, [n-1, n-1]); \\ g(2, [n-1, n]) &= g(2, [n-1, n-1]) + g(2, [n-1, n-2]); \\ g(2, [n-2, n]) &= g(2, [n-2, n-1]) + g(2, [n-2, n-2]). \end{aligned}$$

Setzt man zur Vereinfachung  $a_n := g(2, [n, n])$ ,  $b_n := g(2, [n-1, n])$  und  $c_n := g(2, [n-2, n])$ , so erhält man

$$a_n = b_n + c_n + a_{n-1}, \quad (6)$$

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \quad (7)$$

$$c_n = b_{n-1} + a_{n-2}. \quad (8)$$

Einsetzen von (8) in (6) liefert

$$a_n = b_{n-1} + b_n + a_{n-1} + a_{n-2}, \quad (9)$$

und Subtraktion von (7) und (9) führt zu

$$a_n = 2b_n + a_{n-2}$$

oder

$$b_n = \frac{a_n - a_{n-2}}{2}, \quad (10)$$

womit durch zweimaliges Einsetzen von (10) in (7) (wobei  $b_n$  und  $b_{n-1}$  ersetzt werden) die Rekursionsformel

$$a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$$

folgt.

Die Anfangswerte dieser Rekursion sind  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 7$  und  $a_3 = 22$ .

Auf ähnliche Weise erhält man für  $y_n := g(2, [n, n, n])$ , also für Türme der Breite 3 und  $1 \times 1$ - sowie  $1 \times 2$ -Steine die Rekursionsformel

$$y_n = 4y_{n-1} + 14y_{n-2} - 10y_{n-4} + y_{n-6},$$

mit  $z_n := g(2, [n, n, n, n])$  erhält man für Türme der Breite 4 die Gleichung

$$\begin{aligned} z_n = & 9z_{n-1} + 41z_{n-2} - 41z_{n-3} - 111z_{n-4} + 91z_{n-5} \\ & + 29z_{n-6} - 23z_{n-7} - z_{n-8} + z_{n-9}. \end{aligned}$$

Die Anfangswerte können Tabelle 2 entnommen werden.

Höhe $n$	$g(2, [n, n])$	$g(2, [n, n, n])$	$g(2, [n, n, n, n])$	$g(2, [n, n, n, n, n])$
1	2	3	5	8
2	7	22	71	228
3	22	131	823	5096
4	71	823	10012	120465
5	228	5096	120465	2810694
6	733	31687	1453535	65805403
7	2356	196785	17525619	1539222016
8	7573	1222550	211351945	36012826776
9	24342	7594361	2548684656	842518533590
10	78243	47177097	30734932553	19711134149599

Tabelle 2 Einige Werte für Pflasterungen mit  $1 \times 1$ - und  $1 \times 2$ -Steinen

Nach dieser Methode können natürlich auch für  $g(k, [n, \dots, n])$  mit  $m \geq 3$  Rekursionsformeln gefunden werden – der dazu nötige Aufwand steigt allerdings schnell an.

## 4 Abschätzungen

Ziel dieses Abschnitts ist es, Konstanten  $a_1, a_2, \dots$  zu finden, die eine Abschätzung von  $f(n, m, k)$  der Form

$$f(n, m, k) \leq a_k^{n \cdot m} \quad (11)$$

zulassen.

Dies soll für alle  $n, m \in \mathbb{N}_0$ , also insbesondere für  $n = m = 1$  gelten, womit

$$1 = f(1, 1, k) \leq a_k^{1 \cdot 1} = a_k \quad (12)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  gelten muß.

Um nun eine Bedingung zu erhalten, die es ermöglicht, eine einfache Forderung an  $a_k$  stellen zu können, fordern wir

$$g(k, [x_1, \dots, x_r]) \leq a_k^{\sum_{i=1}^r x_i} \quad (13)$$

für alle  $r \in \mathbb{N}$  und  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{N}_0$ . Wegen

$$f(n, m, k) = g(k, \underbrace{[m, \dots, m]}_{n \text{ Stück}})$$

ist dies hinreichend für die Gültigkeit von (11).

Die Richtigkeit von (13) bei geeignetem  $a_k$  soll durch Induktion nach der Höhe  $x_m$  der "Spitze" – vgl. 2.2 – gezeigt werden.

Der Induktionsanfang ist wegen

$$1 = g(k, [0, \dots, 0]) \leq a_k^0 = 1$$

immer erfüllt.

Für die Induktionsannahme gelte nun

$$g(k, [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \dots, x_r]) \leq a_k^{\sum_{i=1}^r x_i}$$

für ein  $x_m \in \mathbb{N}$  und  $x_j \leq x_m$  für alle  $j \in \{1, \dots, r\}$ .

Im Induktionsschritt ist nun

$$g(k, [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m + 1, x_{m+1}, \dots, x_r]) \leq a_k^{\left(\sum_{i=1}^r x_i\right) + 1}$$

zu zeigen.

Wegen (1) folgt unter Verwendung der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
 g(k, [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m + 1, x_{m+1}, \dots, x_r]) &\leq \sum_{j=1}^{\min\{k, x_m + 1\}} a_k^{\left(\sum_{i=1}^r x_i\right) - j + 1} \\
 &+ \sum_{j=2}^{\min\{k, \max\{i: i+m-1 \leq r \wedge x_m = \dots = x_{m+i-1}\}\}} a_k^{\left(\sum_{i=1}^r x_i\right) - j + 1} \\
 &\leq \sum_{j=1}^k a_k^{\left(\sum_{i=1}^r x_i\right) - j + 1} + \sum_{j=2}^k a_k^{\left(\sum_{i=1}^r x_i\right) - j + 1} \\
 &= a_k^{\sum_{i=1}^r x_i} + 2 \sum_{j=1}^{k-1} a_k^{\left(\sum_{i=1}^r x_i\right) - j}.
 \end{aligned}$$

Hinreichend dafür, daß  $a_k$  die Ungleichung (13) erfüllt, ist also

$$a_k^{\sum_{i=1}^r x_i} + 2 \sum_{j=1}^{k-1} a_k^{\left(\sum_{i=1}^r x_i\right) - j} \leq a_k^{\left(\sum_{i=1}^r x_i\right) + 1}.$$

Division durch  $a_k^{\left(\sum_{i=1}^r x_i\right) - k + 1}$  (wegen  $a_k \geq 1$  nach (12) ist dies immer ohne Vorzeichenbeachtung zulässig) liefert

$$a_k^{k-1} + 2 \sum_{j=1}^{k-1} a_k^{k-j-1} \leq a_k^k.$$

Somit erfüllt die kleinste Nullstelle des Polynoms

$$a_k^k - a_k^{k-1} - 2 \sum_{j=1}^{k-1} a_k^{k-j-1},$$

die größer oder gleich 1 ist, die Ungleichung (13).

Im Falle  $k = 2$  etwa ist also das Polynom

$$a_2^2 - a_2 - 2$$

zu betrachten, dessen kleinste Wurzel, die im Bereich  $[1, \infty[$  liegt, gleich 2 ist. Es folgt also

$$f(n, m, 2) \leq 2^{n \cdot m}.$$

Für  $k = 3$  erhält man das Polynom

$$a_3^3 - a_3^2 - 2a_3 - 2$$

mit einer Nullstelle bei

$$a_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(37 + 3\sqrt{114}\right)^{2/3} + 7 + \left(37 + 3\sqrt{114}\right)^{1/3}}{\left(37 + 3\sqrt{114}\right)^{1/3}}.$$

Im Falle  $k = 4$  betrachtet man

$$a_4^4 - a_4^3 - 2a_4^2 - 2a_4 - 2$$

mit Nullstelle

$$a_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(35 + 3\sqrt{129}\right)^{2/3} + 4 + 2\left(35 + 3\sqrt{129}\right)^{1/3}}{\left(35 + 3\sqrt{129}\right)^{1/3}}.$$

In Tabelle 3 sind einige Näherungswerte für  $k$  zwischen 2 und 6 aufgelistet.

$k$	2	3	4	5	6
$a_k$	2	2,2695	2,3593	2,3925	2,4054

Tabelle 3 Näherungswerte für  $a_k$

Damit sind insgesamt einige Fragen beantwortet – allerdings erschließt sich natürlich sofort ein weites Feld weiterer Verallgemeinerungsmöglichkeiten. Insbesondere der Beschränkung auf Steine der Form  $1 \times j$  ist die noch überschaubare Form der Rekursionsformeln zu verdanken; allgemeinere Steine erfordern wesentlich mehr Überlegung, insbesondere dann, wenn man auch Formen oder gar Steine mit “Löchern” zuläßt.

## 4 Danksagung

Unser Dank gilt Frau Prof. Dr. Judita Cofman vom Mathematischen Institut der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. Sie lieferte uns im Rahmen einer Arbeitsgruppe mit Schülern die Idee zu dieser Arbeit und betreute auch die Ausarbeitung.

Eva Hiemer, Christian Korn  
 Mathematisches Institut  
 Universität Erlangen-Nürnberg  
 D-91054 Erlangen