

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 51 (1996)  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---



---

## Aufgaben

---



---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Februar 1997 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma  
oder
- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

**Aufgabe 1111:** Es sei  $n$  eine natürliche Zahl und  $[a]$  der ganzzahlige Teil einer reellen Zahl  $a$ . Für die unendliche Reihe

$$s_n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{[k/n]}}{k+1}$$

gilt dann beginnend mit  $n = 1$ :

$$s_1 = \ln 2,$$

$$s_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2,$$

$$s_3 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2,$$

$$s_4 = \frac{\pi}{8}(1 + 2\sqrt{2}) + \frac{1}{4} \ln 2.$$

Wie lautet  $s_n$  allgemein? Man versuche, für  $s_n$  einen geschlossenen Ausdruck anzugeben.

Friedhelm Götze, Jena, D

**Aufgabe 1112:** Man beweise, dass

$$(a) \quad 1^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot n^n \geq e^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

$$(b) \quad 2^2 \cdot 4^4 \cdot \dots \cdot (2n)^{2n} \geq e^{n^2},$$

$$(c) \quad 1^1 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot (2n-1)^{2n-1} \geq e^{n(n-1)}.$$

Zdravko F. Starc, Vršac, YU

**Aufgabe 1113 (Die einfache dritte Aufgabe):**

My pocket calculator says  $\pi^2 = 9.8696044$ . Prove, from first principles, that  $\pi^2 < 10$ .

O.E. Lanford III, Zürich, CH (oral communication)

## Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 1995

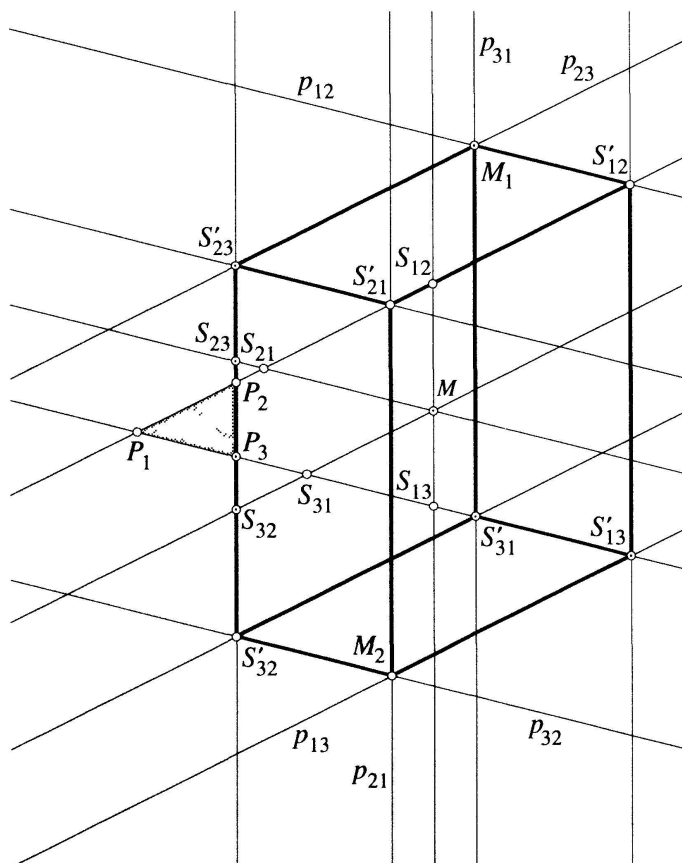
**Aufgabe 1099.** Es seien  $P_1, P_2, P_3$  drei nichtkollineare Punkte und  $M$  ein Punkt in ihrer Ebene. Für  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  seien die sechs Punkte  $S_{ij}$  als Schnittpunkte von  $P_i P_j$  mit der Parallelen zu  $P_j P_k$  durch  $M$  festgelegt. Die sechs Punkte  $S'_{ij}$  sind sodann durch

$$\overrightarrow{P_j S'_{ij}} = 2 \cdot \overrightarrow{P_j S_{ij}}$$

und die sechs Geraden  $p_{ij}$  durch  $S'_{ij} \in p_{ij} \parallel P_i P_k$  bestimmt. Man beweise: Es existieren eindeutig bestimmte Punkte  $M_1, M_2$  mit  $M_1 \in p_{12}, p_{23}, p_{31}$  und  $M_2 \in p_{21}, p_{13}, p_{32}$ . Ausserdem ist  $M$  der Mittelpunkt von  $M_1 M_2$ .

Herbert Gülicher, Münster, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 5 Lösungen eingetroffen, und zwar von G. Bercea (München, D), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D) und Dieter Koller (Zürich, CH). Alle Einsender verwenden Vektoren oder sogar baryzentrische Koordinaten, um die geforderten Eigenschaften rechnerisch nachzuweisen. Bevor wir die kürzeste Lösung vorstellen – sie stammt von *Klaus-Dieter Drews* und deckt sich fast vollständig mit der Lösung von *Walther Janous* –, wollen wir die in der Aufgabenstellung beschriebene Situation mit einer Figur veranschaulichen. Dabei zeigt es sich, dass die Aufgabe dank einer räumlichen Interpretation auch ohne jede Rechnung synthetisch gelöst werden kann.



*Synthetische Lösung.* Sind einmal die Parallelen zu den drei Seiten des Dreiecks  $P_1P_2P_3$  durch  $M$  gezeichnet, so entstehen durch die Verdopplungsbedingung weitere Parallelen  $S'_{ij}S'_{ik}$ , welche punktsymmetrisch zu den Geraden  $P_jP_k$  bezüglich  $M$  liegen. Daher liegen die Punkte  $S'_{ji}$  und  $S'_{ki}$  auch punktsymmetrisch bezüglich  $M$ . Von den sechs Geraden  $p_{ij}$  liegen daher ebenfalls je zwei – nämlich  $p_{ji}$  und  $p_{ki}$  – punktsymmetrisch bezüglich  $M$  und ergänzen die sechs Punkte  $S'_{ij}$  durch die Punkte  $M_1$  und  $M_2$  zu einer Parallelprojektion eines Parallellachs mit Mittelpunkt  $M$ .

*Analytische Lösung.* Mit  $P_1$  als Ursprung ist durch die linear unabhängigen Vektoren  $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$  ein  $(x, y)$ -Parallelkoordinatensystem bestimmt. Für Punkte  $(x, y)$  auf Parallelen zu  $P_1P_2, P_2P_3$  bzw.  $P_3P_1$  gilt  $y = \text{konst.}, x + y = \text{konst.}$  bzw.  $x = \text{konst.}$ , insbesondere  $y = 0, x + y = 1,$  bzw.  $x = 0$  auf den Geraden  $P_1P_2, P_2P_3$  bzw.  $P_3P_1$  selbst. Wir identifizieren Punkte mit ihren Ortsvektoren bezüglich  $P_1$  und erhalten mit dem gegebenen Punkt  $M = (\mu, \nu)$ :

$$\begin{aligned} S_{12} = (\mu + \nu, 0) \quad S'_{12} &= 2[(\mu + \nu, 0) - (1, 0)] + (1, 0) = (2\mu + 2\nu - 1, 0) , \\ p_{12} : x &= 2\mu + 2\nu - 1 ; \\ S_{23} = (\mu, 1 - \mu) \quad S'_{23} &= 2[(\mu, 1 - \mu) - (0, 1)] + (0, 1) = (2\mu, 1 - 2\mu) , \\ p_{23} : y &= 1 - 2\mu ; \\ S_{31} = (0, \nu) \quad S'_{31} &= 2(0, \nu) = (0, 2\nu) , \\ p_{31} : x + y &= 2\nu . \end{aligned}$$

Der eindeutig bestimmte Schnittpunkt von  $p_{12}, p_{23}$  und  $p_{31}$  ist

$$M_1 = (2\mu + 2\nu - 1, 1 - 2\mu) .$$

Zur Bestimmung von  $M_2$  vertauschen  $x$  und  $y$  ihre Rollen, somit im gegebenen Punkt  $M$  auch  $\mu$  und  $\nu$ . Demnach muss bezüglich des ursprünglichen  $(x, y)$ -Systems

$$M_2 = (1 - 2\nu, 2\nu + 2\mu - 1)$$

sein, und es folgt

$$\frac{M_1 + M_2}{2} = M .$$

**Aufgabe 1100.** Inverse von rekursiv aufgebauten Dreiecksmatrizen.

Die beiden Pascalmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +3 & -3 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & -4 & +6 & -4 & +1 \end{pmatrix}$$

sind zueinander invers. Dasselbe gilt auch für die beiden Stirlingmatrizen erster und zweiter Art

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & -3 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & +11 & -6 & +1 & 0 \\ 0 & +24 & -50 & +35 & -10 & +1 \end{pmatrix} .$$

Man beweise die folgende Verallgemeinerung:

Es sei  $n$  eine natürliche Zahl und  $f(j)$  eine reelle Folge mit  $0 \leq j \leq n$ . Ist die untere Dreiecksmatrix  $A$  durch die Rekursion

$$A_{i+1,j} := A_{i,j-1} + f(j) \cdot A_{i,j} \quad \text{für } 1 \leq j \leq i \leq n$$

mit den Randbedingungen  $A_{i,0} := 0$  für  $1 \leq i \leq n$  und  $A_{i,i} := 1$  für  $0 \leq i \leq n$  gegeben, so ist deren Inverse  $U$  durch die Rekursion

$$U_{i+1,j} := U_{i,j-1} - f(i) \cdot U_{i,j} \quad \text{für } 1 \leq j \leq i \leq n$$

mit den Randbedingungen  $U_{i,0} := 0$  für  $1 \leq i \leq n$  und  $U_{i,i} := 1$  für  $0 \leq i \leq n$  bestimmt. Hinweis: Für  $f(j) = 1$  ergeben sich die Pascal- und für  $f(j) = j$  die Stirlingmatrizen.

Robert Brawer, Solothurn, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 10 Lösungen eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Harald Friepfänger (Graz, A), Friedhelm Götze (Jena, D), F. Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), H.-J. Seiffert (Berlin, D), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH). Im folgenden die Lösung nach *Jany C. Binz*:

Da  $U = A^{-1}$  wie  $A$  eine untere Dreiecksmatrix ist, gilt  $U_{i,j} = 0$  für  $i < j$ .  $AU = UA = I$  schreiben wir mit Hilfe des Kroneckersymbols ausführlich als

$$\sum_{k \geq 0} A_{i,k} U_{k,j} = \sum_{k \geq 0} U_{i,k} A_{k,j} = \delta_{i,j} .$$

Für  $i = j$  folgt daraus  $U_{i,i} = 1$  ( $i \geq 0$ ). Für  $i \geq 1$ ,  $j = 0$  wird  $\sum_{k \geq 0} U_{i,k} A_{k,0} = 0$  und daher  $U_{i,0} = 0$  ( $i \geq 1$ ). Damit sind die Randwerte gesichert. Für  $j = i$  wird  $\delta_{i+1,i} = A_{i+1,i} + U_{i+1,i} = 0$ , also  $U_{i+1,i} = -A_{i+1,i}$  für alle  $i$ . Daraus folgt

$$U_{i+1,i} = -[A_{i,i-1} + f(i)A_{i,i}] = U_{i,i-1} - f(i)U_{i,i} ;$$

die behauptete Rekursion gilt somit für  $j = i$ . Für festes  $j$  sei jetzt die Gültigkeit der Rekursion  $U_{i+1,j} := U_{i,j-1} - f(i) \cdot U_{i,j}$  für alle  $i$  mit  $j \leq i \leq r$  induktiv vorausgesetzt.

Aus  $\delta_{r+2,j} = \sum_{k=j}^{r+2} A_{r+2,k} U_{k,j} = 0$  erhält man

$$\begin{aligned} -U_{r+2,j} &= \sum_{k=j}^{r+1} A_{r+2,k} U_{k,j} \\ &= \sum_{k=j}^{r+1} [A_{r+1,k-1} + f(k)A_{r+1,k}] U_{k,j} \\ &= A_{r+1,j-1} + \sum_{k=j}^r A_{r+1,k} [U_{k+1,j} + f(k)U_{k,j}] + f(r+1)U_{r+1,j} . \end{aligned}$$

Unter Verwendung der induktiven Prämisse wird daraus

$$\begin{aligned} -U_{r+2,j} &= A_{r+1,j-1} + \sum_{k=j}^r A_{r+1,k} U_{k,j-1} + f(r+1)U_{r+1,j} \\ &= \sum_{k=j-1}^{r+1} A_{r+1,k} U_{k,j-1} - U_{r+1,j-1} + f(r+1)U_{r+1,j} \\ &= \delta_{r+1,j-1} - U_{r+1,j-1} + f(r+1)U_{r+1,j} \end{aligned}$$

und schliesslich

$$U_{r+2,j} = U_{r+1,j-1} - f(r+1)U_{r+1,j} .$$

Die Rekursion ist also auch für  $i = r+1$  und damit für alle  $i \geq j$  gesichert; weil sie für alle  $j \geq 1$  verankert ist, gilt sie für alle  $i, j$  mit  $1 \leq j \leq i$ . Der hier für unendliche Matrizen  $A$  und  $U$  geführte Beweis zieht automatisch die Gültigkeit für alle natürlichen  $n$  nach sich.

**Aufgabe 1101 (Die einfache dritte Aufgabe).** Ein homogener Quader mit den Kantenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  liegt mit dem Rechteck aus den Seiten  $a$  und  $c$  auf einer horizontalen Ebene. Von der einen aufliegenden Kante  $c$  aus wird ein Quader mit den Kantenlängen  $\lambda a$ ,  $\lambda b$  und  $c$  herausgeschnitten. Wie gross darf  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) höchstens sein, damit der Restkörper nicht umkippt?

Rolf Rose, Magglingen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 13 Zuschriften eingetroffen: G. Bercea (München, D), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Harald Friepfänger (Graz, A), Friedhelm Götze (Jena, D) (2 Lösungen), Bratislav Iričanin (Belgrad, YU), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Wolfgang Moldenhauer (Erfurt, D), Gunther Stein (Darmstadt, D),

Michael Vowe und Ronald Wiedemann (Therwil bzw. Birsfelden, CH), Peter Zimmermann (Glarus, CH). Die Aufgabe ist fast gleichzeitig in der *Praxis der Mathematik* 37, Heft 3/1995 erschienen, da der Autor seine Aufgabe bei beiden Zeitschriften eingereicht hat.

Sämtliche Lösungen untersuchen die Lage des Schwerpunktes; dabei genügt es, das zweidimensionale Problem in der "Deckfläche" zu lösen. Im folgenden die Lösung nach *Klaus-Dieter Drews*: Die vom vorderen unteren Eckpunkt des Quaders ausgehenden Kanten mit den Längen  $a$ ,  $c$  und  $b$  mögen ein kartesisches  $x, y, z$ -Koordinatensystem bestimmen. Im homogenen Restkörper gewinnt man Aussagen über die  $x$ -Koordinaten von Schwerpunkten aus der Betrachtung von Flächen in der  $x, z$ -Ebene. Dabei besteht für festes  $\lambda$  die Restfläche aus einem unteren sowie einem oberen Rechteck der Masse (des Inhalts)  $m_u$  beziehungsweise  $m_o$ , mit den Schwerpunkten bei den  $x$ -Werten  $s_u$  beziehungsweise  $s_o$ ; Schwerpunktkoordinate der Gesamtfläche sei  $s$ .

Mit diesen Bezeichnungen gilt:  $m_u = (1 - \lambda)a \cdot \lambda b$ ,  $m_o = a \cdot (1 - \lambda)b$ , und

$$s_u = \frac{\lambda a + a}{2}, \quad s_o = \frac{a}{2},$$

$$\frac{s - s_o}{s_u - s} = \frac{m_u}{m_o},$$

das heisst  $(m_u + m_o)s = m_u s_u + m_o s_o$  oder  $(\lambda + 1)s = \lambda s_u + s_o$ .

Der Restkörper steht für  $\lambda a \leq s$ , bei maximalem  $\lambda$  ist  $s = \lambda a$ , so dass aus der vorhergehenden Gleichung

$$(\lambda + 1)\lambda = \frac{(\lambda + 1)}{2}\lambda + \frac{1}{2}$$

folgt, woraus sich  $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  als Maximalwert ergibt. Der herausgeschnittene Quader kann also bis zu den grösseren goldenen Abschnitten der Kanten  $a$  und  $b$  reichen.