

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	51 (1996)
<b>Artikel:</b>	Eine einheitliche Methode zur Behandlung einer linearen Kongruenz mit Nebenbedingungen
<b>Autor:</b>	Spilker, Jürgen
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-46963">https://doi.org/10.5169/seals-46963</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

# Eine einheitliche Methode zur Behandlung einer linearen Kongruenz mit Nebenbedingungen

---

Jürgen Spilker

Jürgen Spilker wurde 1935 geboren. Er studierte und promovierte in Göttingen und ist seit 1970 Professor für Mathematik an der Universität Freiburg (Breisgau). Sein wissenschaftliches Interesse galt zunächst den automorphen Formen, heute der elementaren Zahlentheorie, insbesondere den arithmetischen Funktionen.

Seien  $n$  und  $r$  natürliche Zahlen. Man nennt

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_s \equiv n \pmod{r} \quad (1)$$

eine lineare Kongruenz in  $s$  Veränderlichen zum Modul  $r$ . Eine Lösung ist ein  $s$ -Tupel ganzer Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_s$ , wobei 2 Lösungstupel als gleich angesehen werden, wenn ihre Komponenten modulo  $r$  gleich sind. Die Kongruenz (1) hat offenbar  $r^{s-1}$  Lösungen.

In der elementaren Zahlentheorie bestimmt man Anzahlen von Lösungen der Kongruenz (1), welche Nebenbedingungen unterliegen, z.B. größter gemeinsamer Teiler  $(x_i, r) = 1$  für  $1 \leq i \leq s$ . Diese Anzahlen sind in vielen Arbeiten behandelt worden. Eine zusammenfassende Darstellung findet man in [4], Kap. 3. In diesem Aufsatz wird eine einheitliche Methode zur Bestimmung derartiger Anzahlen vorgestellt:

- die Anzahlen sind das Cauchy-Produkt von einfachen Grundfunktionen;
- die Grundfunktionen sind arithmetische Funktionen in 2 Variablen, welche in der ersten Veränderlichen  $r$ -gerade und in der anderen multiplikativ sind;
- diese Eigenschaften bleiben beim Cauchy-Produkt erhalten und führen somit direkt zu Ramanujan-Entwicklungen und Produktdarstellungen der Lösungsanzahlen; aus diesen erkennt man z.B., wann eine Kongruenz (1) mit Nebenbedingungen lösbar ist und wann nicht.

Gegeben ist eine lineare Kongruenz  $x_1 + x_2 + \cdots + x_s \equiv n \pmod{r}$  und für jedes  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , ein Teiler  $d_i$  von  $r$ . Wieviele Lösungen modulo  $r$  der Kongruenz gibt es, welche der Nebenbedingung  $(x_i, r) = d_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , genügen? Diese häufig auftretende Frage führt auf interessante zahlentheoretische Probleme. In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe sich diese Anzahl auf eine einheitliche Weise bestimmen lässt. *ust*

## 1 $r$ -gerade Funktionen und Ramanujan-Entwicklungen

Eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt  $r$ -gerade ( $r \in \mathbb{N}$ ), wenn

$$f(n) = f((n, r)) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Eine derartige Funktion ist also durch ihre Werte auf allen Teilern von  $r$  bestimmt. Typische  $r$ -gerade Funktionen sind die *Ramanujan-Summen*

$$c(n, r) := \sum_{\substack{1 \leq x \leq r \\ (x, r) = 1}} e^{2\pi i nx/r}.$$

Weil die Funktionen  $n \mapsto c(n, d)$  für  $d|r$   $r$ -gerade und linear unabhängig sind und die Dimension des komplexen Vektorraumes aller  $r$ -geraden Funktionen gleich der Teileranzahl von  $r$  ist, gilt

**Satz 1** ([6], S. 124). *Für jedes natürliche  $r$  bilden die Ramanujan-Summen*

$$c(\cdot, d) \text{ mit } d|r$$

*eine Basis des Vektorraumes der  $r$ -geraden Funktionen.*

Jede  $r$ -gerade Funktion  $f$  hat folglich eine Entwicklung

$$f(n) = \sum_{d|r} a(d, r) c(n, d)$$

mit eindeutig bestimmten komplexen “Ramanujan-Koeffizienten”

$$a(d, r) = \frac{1}{r} \sum_{e|r} f\left(\frac{r}{e}\right) c\left(\frac{r}{d}, e\right), \quad d|r.$$

Diese Formel erhält man aus den für alle Teiler  $t_1, t_2$  von  $r$  gültigen Orthogonalitätsrelationen ([4], S. 78)

$$\sum_{d|r} c\left(\frac{r}{d}, t_1\right) c\left(\frac{r}{t_2}, d\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t_1 \neq t_2, \\ r & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2)$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{d|r} a(d, r) c(n, d) &= \sum_{d|r} \frac{1}{r} \sum_{e|r} f\left(\frac{r}{e}\right) c\left(\frac{r}{d}, e\right) c(n, d) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{e|r} f(e) \sum_{d|r} c\left(\frac{r}{d}, \frac{r}{e}\right) c((n, r), d) \\ &= f((n, r)) \\ &= f(n), \end{aligned}$$

weil die innere Summe nach (2) für  $e \neq (n, r)$  verschwindet und sonst den Wert  $r$  hat. Also gilt der

**Satz 2** ([4], S. 80). *Jede  $r$ -gerade Funktion  $f$  hat eine Darstellung*

$$f = \sum_{d|r} a(d, r) c(\cdot, d).$$

*Die Koeffizienten sind eindeutig bestimmt und berechnen sich aus*

$$a(d, r) = \frac{1}{r} \sum_{e|r} f\left(\frac{r}{e}\right) c\left(\frac{r}{d}, e\right), \quad d|r. \quad (3)$$

**Beispiele:**

**1.** Für jedes natürliche  $r$  ist die Funktion

$$n \mapsto f(n, r) := \begin{cases} 1 & \text{falls } (n, r) = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$r$ -gerade mit Ramanujan-Koeffizienten

$$a(d, r) = \frac{1}{r} c\left(\frac{r}{d}, r\right) = \frac{\mu(d)\varphi(r)}{r\varphi(d)}, \quad d|r.$$

**2.** Seien  $r$  und  $k$  natürliche Zahlen und

$$g_k(n, r) := \begin{cases} 1 & \text{falls } (n, r) \text{ eine } k\text{-te Potenz ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion  $g_k(\cdot, r)$  ist  $r$ -gerade und

$$a(d, r) = \frac{1}{r} \sum_{e^k|r} c\left(\frac{r}{d}, \frac{r}{e^k}\right), \quad d|r.$$

Mit der Funktion  $\lambda_k(n) := \sum_{d^k|r} \mu\left(\frac{n}{d^k}\right)$  wird ([2], S. 21)

$$a(d, r) = \frac{1}{r} \sum_{t|\frac{r}{d}} t \lambda_k\left(\frac{r}{t}\right).$$

**3.** Seien  $r$  und  $k$  natürliche Zahlen und

$$h_k(n, r) := \begin{cases} 1 & \text{falls } (n, r) \text{ } k\text{-frei ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei heißt eine natürliche Zahl  $a$   $k$ -frei, wenn  $d^k|a$  für kein  $d > 1$  gilt. Die Funktionen  $h_k(\cdot, r)$  sind  $r$ -gerade und

$$a(d, r) = \frac{1}{r} \sum_{\substack{e|r \\ (e,r)_k=1}} c\left(\frac{r}{d}, \frac{r}{e}\right), \quad d|r;$$

dabei bezeichnet  $(e, r)_k$  den größten gemeinsamen Teiler von  $e$  und  $r$ , der eine  $k$ -Potenz ist. Auch dieser Wert ist in [2], S. 21 berechnet worden, und zwar mittels  $\mu_k(n) := \sum_{\substack{d|n \\ (d,n)_k=1}} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$  zu

$$a(d, r) = \frac{1}{r} \sum_{t|\frac{r}{d}} t \mu_k\left(\frac{r}{t}\right).$$

## 2 Cauchy-Produkt und Multiplikativität

Von je zwei arithmetischen Funktionen  $f, g$  kann man das *Cauchy-Produkt*

$$(f \odot g)(n) := \sum_{\substack{1 \leq x, y \leq r \\ x+y \equiv n \pmod{r}}} f(x)g(y)$$

bilden. Es ist assoziativ und kommutativ. Aus den Orthogonalitätsrelationen ([4], S. 76)

$$\sum_{\substack{1 \leq x, y \leq r \\ x+y \equiv n \pmod{r}}} c(x, t_1)c(y, t_2) = \begin{cases} 0 & t_1 \neq t_2 \\ rc(n, t_1) & t_1 = t_2, \end{cases}$$

welche für alle Teiler  $t_1, t_2$  von  $r$  gelten, folgt, daß für zwei  $r$ -gerade Funktionen  $f, g$  auch  $f \odot g$   $r$ -gerade ist und gilt

**Satz 3** ([4], S. 84). *Sind  $f$  und  $g$   $r$ -gerade Funktionen mit Ramanujan-Koeffizienten  $a(d, r)$  bzw.  $b(d, r)$ ,  $d|r$ , dann hat das Cauchy-Produkt  $f \odot g$  die Ramanujan-Koeffizienten  $ra(d, r)b(d, r)$ ,  $d|r$ .*

Bei arithmetischen Funktionen in zwei Veränderlichen gibt es einen zweifachen Zusammenhang von Ramanujan-Koeffizienten in der einen und Multiplikativität in der anderen.

**Satz 4.** *Sei  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, und für jedes natürliche  $r$  sei  $n \mapsto f(n, r)$  eine  $r$ -gerade Funktion; ihre Ramanujan-Entwicklung laute*

$$f(n, r) = \sum_{d|r} a(d, r)c(n, d), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind die folgenden beiden Eigenschaften äquivalent:

- (4)  $r \rightarrow f(n, r)$  ist multiplikativ für jedes natürliche  $n$ ;
- (5)  $\begin{cases} a(d_1d_2, r_1r_2) = a(d_1, r_1)a(d_2, r_2), & \text{falls } d_1|r_1, d_2|r_2, (r_1, r_2) = 1; \\ \text{insbesondere } a(1, 1) = 1. \end{cases}$

**Beweis:** (4)  $\Rightarrow$  (5): Sei gegeben  $(r_1, r_2) = 1$ ,  $d_1|r_1, d_2|r_2$ . Wegen (3) gilt

$$\begin{aligned} a(d_1d_2, r_1r_2) &= \frac{1}{r_1r_2} \sum_{e|r_1r_2} f\left(\frac{r_1r_2}{e}, r_1r_2\right) c\left(\frac{r_1r_2}{d_1d_2}, e\right) \\ &= \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} \sum_{e_1|r_1} \sum_{e_2|r_2} f\left(\frac{r_1}{e_1} \frac{r_2}{e_2}, r_1r_2\right) c\left(\frac{r_1}{d_1} \frac{r_2}{d_2}, e_1e_2\right). \end{aligned}$$

Der  $f$ -Wert zerfällt wegen (4) in

$$f\left(\frac{r_1}{e_1} \frac{r_2}{e_2}, r_1\right) f\left(\frac{r_1}{e_1} \frac{r_2}{e_2}, r_2\right) = f\left(\frac{r_1}{e_1}, r_1\right) f\left(\frac{r_2}{e_2}, r_2\right).$$

In analoger Weise kann man die Ramanujan-Summe zerlegen ([4], S. 89, Exercise 2.2). Man erhält

$$\begin{aligned} a(d_1 d_2, r_1 r_2) &= \prod_{i=1}^2 \frac{1}{r_i} \sum_{e_i|r_i} f\left(\frac{r_i}{e_i}, r_i\right) c\left(\frac{r_i}{d_i}, e_i\right) \\ &= a(d_1, r_1) a(d_2, r_2). \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$1 = f(1, 1) = a(1, 1)c(1, 1) = a(1, 1).$$

(5)  $\Rightarrow$  (4): Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(r_1, r_2) = 1$  gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} f(n, r_1 r_2) &= \sum_{d|r_1 r_2} a(d, r_1 r_2) c(n, d), \\ &= \sum_{d_1|r_1} \sum_{d_2|r_2} a(d_1 d_2, r_1 r_2) c(n, d_1 d_2). \end{aligned}$$

Der Ramanujan-Koeffizient zerfällt nach (5), und  $d \mapsto c(n, d)$  ist multiplikativ ([6], S. 16). Es folgt

$$f(n, r_1 r_2) = \prod_{i=1}^2 \sum_{d_i|r_i} a(d_i, r_i) c(n, d_i) = f(n, r_1) f(n, r_2).$$

Letztlich ist

$$f(n, 1) = a(1, 1)c(n, 1) = 1,$$

also ist  $f(n, \cdot)$  multiplikativ.  $\square$

Aus den letzten beiden Sätzen folgt der für unsere Anwendungen wichtige

**Satz 5.** Sind  $f_i(n, r)$  komplexwertige Funktionen auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq s$ , und ist  $F(n, r)$  ihr Cauchy-Produkt bzgl. der ersten Veränderlichen, dann gilt:

a) Sind für jedes natürliche  $r$  die Funktionen

$$n \mapsto f_i(n, r), \quad 1 \leq i \leq s$$

$r$ -gerade mit Ramanujan-Koeffizienten  $a_i(d, r)$ ,  $d|r$ , dann hat  $F(\cdot, r)$  die Ramanujan-Koeffizienten

$$r^{s-1} \prod_{i=1}^s a_i(d, r), \quad d|r;$$

b) Sind zusätzlich für jedes natürliche  $n$  die Funktionen

$$r \mapsto f_i(n, r), \quad 1 \leq i \leq s$$

multiplikativ, dann ist auch  $F(n, \cdot)$  multiplikativ für alle  $n$ , und es gilt

$$\begin{aligned} F(n, r) &= \prod_{p^\alpha \parallel r} F(n, p^\alpha) \\ &= \prod_{p^\alpha \parallel r} F(p^{\min\{\alpha, \beta\}}, p^\alpha), \end{aligned}$$

wobei  $p^\beta \parallel n$ .

### 3 Anwendung auf lineare Kongruenzen

Wir betrachten jetzt die lineare Kongruenz

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_s \equiv n \pmod{r} \quad (1)$$

unter verschiedenen Nebenbedingungen; dabei sind  $n, r, s$  natürliche Zahlen. Die Lösungsanzahlen sind das Cauchy-Produkt von einfachen Grundfunktionen in 2 Variablen  $n, r$ , welche in  $n$   $r$ -gerade und in  $r$  multiplikativ sind. Mit Satz 5 ergeben sich sofort die Ramanujan-Entwicklung sowie eine Produktdarstellung.

**1.** Zunächst betrachten wir alle Lösungen, deren Komponenten zu  $r$  teilerfremd sind. Wir betrachten also

$$N(n, r, s) := \#\{(x_1, \dots, x_s) \text{ Lösung von (1): } 1 \leq x_i \leq r, (x_i, r) = 1 \text{ für } 1 \leq i \leq s\}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} N(n, r, s) &= \sum_{\substack{x_s+y \equiv n \pmod{r} \\ (x_s, r)=1}} \sum_{\substack{x_1+\cdots+x_{s-1} \equiv y \pmod{r} \\ (x_i, r)=1}} 1 \\ &= \sum_{\substack{x_s+y \equiv n \pmod{r} \\ (x_s, r)=1}} N(y, r, s-1) \\ &= f(\cdot, r) \odot N(\cdot, r, s-1) \end{aligned}$$

mit der Funktion  $f(\cdot, r)$  aus Abschnitt 1, Beispiel 1. Wegen  $N(n, r, 1) = f(n, r)$  ist  $N(\cdot, r, s)$  das  $s$ -fache Cauchy-Produkt von  $f(\cdot, r)$  mit sich selbst. Da  $f(\cdot, r)$   $r$ -gerade und  $f(n, \cdot)$  multiplikativ ist, ergibt Satz 5 direkt die Darstellung ([4], S. 117)

$$\begin{aligned} N(n, r, s) &= \frac{1}{r} \sum_{d|r} c\left(\frac{r}{d}, r\right)^s c(n, d) \\ &= \frac{\varphi(r)^s}{r} \sum_{d|r} \frac{\mu(d)^s}{\varphi(d)^s} c(n, d) \end{aligned} \quad (6)$$

sowie die Produktformel ([4], S. 118)

$$N(n, r, s) = \prod_{p^\alpha \parallel r} N(n, p^\alpha, s).$$

Die Faktoren berechnen sich aus (6) zu ([4], S. 119)

$$N(n, p^\alpha, s) = \begin{cases} p^{\alpha(s-1)} \frac{(p-1)((p-1)^{s-1} - (-1)^{s-1})}{p^s} & p|n, \\ p^{\alpha(s-1)} \frac{(p-1)^s - (-1)^s}{p^s} & p \nmid n. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich: (1) hat genau dann keine Lösung mit  $(x_i, r) = 1$ , wenn einer der drei folgenden Fälle vorliegt:

- $(n, r) > 1, s = 1$ ;
- $n, r$  gerade,  $s$  ungerade;
- $n$  ungerade,  $r, s$  gerade.

2. Sei  $P_k(n, r, s)$  die Anzahl der Lösungen modulo  $r$  von (1), die den Bedingungen  
 $(x_i, r)$  ist eine  $k$ -te Potenz,  $1 \leq i \leq s$

genügen. Diese Anzahl ist das  $s$ -fache Cauchy-Produkt der Funktion  $g_k(\cdot, r)$  aus Abschnitt 1, Beispiel 2, und  $g_k(\cdot, r)$  ist  $r$ -gerade und  $g_k(n, \cdot)$  multiplikativ. Satz 5 ergibt

$$P_k(n, r, s) = \frac{1}{r} \sum_{d|r} \left( \sum_{e^k|r} c\left(\frac{r}{d}, \frac{r}{e^k}\right) \right)^s c(n, d)$$

und

$$P_k(n, r, s) = \prod_{p^\alpha \parallel r} P_k(n, p^\alpha, s).$$

Für  $P_k(n, p^\alpha, s)$  scheint keine explizite Formel bekannt zu sein.

3. Eine verwandte Lösungszahl ist  $Q_k(n, r, s)$ , die Anzahl der Lösungen mod  $r$  von (1), die den Bedingungen

$$(x_i, r) \text{ ist } k\text{-frei, } 1 \leq i \leq s$$

genügen. Die Anzahl ist das  $s$ -fache Cauchy-Produkt der Funktion  $h_k(\cdot, r)$  (siehe Abschnitt 1, Beispiel 3). Nach Satz 5 ist

$$Q_k(n, r, s) = \frac{1}{r} \sum_{d|r} \left( \sum_{\substack{e|r \\ (e, r)_k=1}} c\left(\frac{r}{d}, \frac{r}{e}\right) \right)^s c(n, d)$$

sowie

$$Q_k(n, r, s) = \prod_{p^\alpha \parallel r} Q_k(n, p^\alpha, s).$$

Man berechnet ([5], S. 72)

$$Q_k(n, p^\alpha, s) = \begin{cases} p^{\alpha(s-1)} & \alpha < k, \\ p^{\alpha(s-1)} \frac{(p^k-1)[(p^k-1)^{s-1} - (-1)^{s-1}]}{p^{ks}} & \alpha \geq k, p^k | n, \\ p^{\alpha(s-1)} \frac{(p-1)^s - (-1)^s}{p^{ks}} & \alpha \geq k, p^k \nmid n. \end{cases}$$

Es gilt  $Q_k(n, r, s) = 0$  genau dann, wenn

- $(n, r)_k = 1, s = 1$ ,
- oder  $k = 1, n, r$  gerade,  $s$  ungerade,
- oder  $k = 1, n$  ungerade,  $r, s$  gerade.

**4.** Man kann auch Mischungen obiger Nebenbedingungen behandeln. Ein bekanntes Beispiel ([2], S. 22) ist die Anzahl  $\varepsilon_k(n, r)$  der Lösungen mod  $r$  von  $x_1 + x_2 \equiv n \pmod{r}$  mit

$$(x_1, r) = 1, \quad (x_2, r) \text{ ist } k\text{-Potenz.}$$

Es gilt

$$\varepsilon_k(\cdot, r) = f(\cdot, r) \odot g_k(\cdot, r)$$

und folglich

$$\varepsilon_k(n, r) = \frac{1}{r} \sum_{d|r} c\left(\frac{r}{d}, r\right) \sum_{e^k|r} c\left(\frac{r}{d}, \frac{r}{e^k}\right) c(n, d)$$

und

$$\varepsilon_k(n, r) = \prod_{p^\alpha \parallel r} \varepsilon_k(n, p^\alpha).$$

Die Faktoren berechnen sich zu ([2], S. 22)

$$(p^k - 1)\varepsilon_k(n, p^\alpha) = \begin{cases} p^{\alpha-1}(p-1)(p^k-1) & p|n, \\ p^{\alpha+k-1}(p-2) + p^{\alpha-1} + p^{k-1} - 1 & p\nmid n, k|\alpha, \\ p^{\alpha+k-1}(p-2) + p^{\alpha-1} - p^{t-1}(p-1) & p\nmid n, k\nmid\alpha, \end{cases}$$

dabei ist im 3. Fall  $t$  bestimmt durch  $\alpha \equiv t \pmod{k}$ ,  $1 \leq t \leq k-1$ . Nur in diesem Fall kann  $\varepsilon_k(n, p^\alpha) = 0$  sein.

Es folgt

$$\varepsilon_k(n, r) = 0 \Leftrightarrow n \text{ ungerade, } 2|r, 2^k \nmid r.$$

**5.** Eine allgemeine Beispielklasse erhält man, indem man für  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$  nichtleere Mengen  $D_i(r)$  von Teilern von  $r$  vorgibt und die Anzahl  $M(n, r, s)$  der Lösungen  $(x_1, \dots, x_s)$  modulo  $r$  von (1) mit

$$(x_i, r) \in D_i(r), \quad 1 \leq i \leq s$$

eingeführt ([4], S. 121). Mit den Grundfunktionen

$$d_i(n, r) := \begin{cases} 1 & (n, r) \in D_i(r) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird  $M(\cdot, r, s) = d_s \odot d_{s-1} \odot \dots \odot d_1(\cdot, r)$ , und Satz 5a) ergibt ([3], S. 121)

$$M(n, r, s) = \frac{1}{r} \sum_{d|r} \prod_{i=1}^s \sum_{\substack{e|r \\ e \in D_i(r)}} c\left(\frac{r}{d}, \frac{r}{e}\right) c(n, d).$$

Wenn für alle teilerfremden Paare  $(r_1, r_2)$  und alle  $i$  die Eigenschaft

$$d_1 \in D_i(r_1), d_2 \in D_i(r_2) \Leftrightarrow d_1 d_2 \in D_i(r_1 r_2)$$

gilt, dann sind alle Funktionen  $d_i(n, \cdot)$  multiplikativ, und nach Satz 5b) gilt

$$M(n, r, s) = \prod_{p^\alpha \parallel r} M(p^{\min\{\alpha, \beta\}}, p^\alpha, s),$$

wobei  $p^\beta \parallel n$ . Die Beispiele 1 bis 4 sind Spezialfälle hiervon.

**6.** Zuletzt werden noch zwei weitere Beispiele angegeben, die sich dem allgemeinen Fall 5 unterordnen:

a)  $s = 2$ ,  $(x_1, r) = 1$ ,  $(x_2, r)_k = 1$ ; die zugehörigen Lösungszahlen  $\Theta_k(n, r)$  wurden in [2], S. 22 behandelt;  $\Theta_1(n, r) = N(n, r, 2)$  ist die Nagell-Funktion ([4], S. 119).

b) Seien  $a_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) ganze Zahlen und sei  $A(n, r, s)$  die Anzahl der Lösungen mod  $r$  von

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_s x_s \equiv n \pmod{r} \text{ mit } (x_i, r) = 1.$$

Dann gilt ([1] Cor. 1.12)

$$A(n, r, s) = \frac{1}{r} \sum_{d|r} \prod_{i=1}^s c\left(\frac{r}{d}, \frac{r}{d_i}\right) c(n, d) \prod_{i=1}^s \frac{\varphi(r)}{\varphi(\frac{r}{d_i})}$$

mit  $d_i := (a_i, r)$ .

Der *Beweis* folgt aus:

(i) die Anzahl der Lösungen mod  $r$  von

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_s \equiv n \pmod{r} \text{ mit } (y_i, r) = d_i$$

ist

$$M(n, r, s) = \frac{1}{r} \sum_{d|r} \prod_{i=1}^s c\left(\frac{r}{d}, \frac{r}{d_i}\right) c(n, d);$$

(ii)  $\#\{1 \leq x \leq r: ax \equiv y \pmod{r}, (x, r) = 1\} = \frac{\varphi(r)}{\varphi(\frac{r}{d})}$ , sofern  $(a, r) = (y, r) = d$ .

Die Aussage in (i) ist ein Spezialfall von Beispiel 5 ( $D_i(r) = \{d_i\}$ , s.a. [4], S. 138, Exercise 3.8).

Zur Aussage (ii) bemerken wir, dass der Reduktionshomomorphismus der primen Restklassengruppen

$$f_1 : \mathbb{Z}_r^* \rightarrow \mathbb{Z}_{r/d}^* : x \pmod{r} \mapsto x \pmod{\frac{r}{d}}$$

surjektiv ist und

$$f_2 : \mathbb{Z}_{r/d}^* \rightarrow \mathbb{Z}_{r/d}^* : x \pmod{\frac{r}{d}} \mapsto \frac{a}{d} x \pmod{\frac{r}{d}}$$

bijektiv ist; also hat jedes Element von  $\mathbb{Z}_{r/d}^*$  unter der Abbildung  $f_2 \circ f_1$  genau soviele Urbilder, wie es Elemente im Kern von  $f_1$  gibt, also  $\varphi(r)/\varphi(\frac{r}{d})$ .

## Literatur

- [1] U. Cerruti: Counting the Number of Solutions of Congruences. E. Bergum et al (eds.), Applications of Fibonacci Numbers, vol. 5, 85–101, Kluwer Acad. Publ. 1993.
- [2] E. Cohen: A class of residue systems ( $\text{mod } r$ ) and related arithmetical functions. I. A generalization of Möbius inversion. Pacific J. Math. 9 (1959), 13–23.
- [3] P. Haukanen and R. Sivaramakrishnan: Cauchy multiplication and periodic functions ( $\text{mod } r$ ). Collect. Math. 42 (1991), 33–44.
- [4] P.J. McCarthy: Introduction to Arithmetical Functions. Springer, New York, 1986.
- [5] A. Metzger: Lineare Kongruenzen und Cauchy-Operatoren, Staatsarbeit, Freiburg, 1994.
- [6] W. Schwarz and J. Spilker: Arithmetical Functions, Cambridge University Press, 1994.

Jürgen Spilker  
Math. Institut der Universität  
Eckerstr. 1  
D-79104 Freiburg