

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 51 (1996)

Artikel: Identitäten bei den Stirling-Zahlen 2. Art aus kombinatorischen Überlegungen beim Würfelspiel
Autor: Wyss, Roland
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46962>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Identitäten bei den Stirling-Zahlen 2. Art aus kombinatorischen Überlegungen beim Würfelspiel

Roland Wyss

Roland Wyss studierte Mathematik an der ETH Zürich, wo er 1970 bei Max Jeger über ein Thema der Differentialgeometrie doktorierte. Seither unterrichtet er Mathematik an der Kantonsschule Solothurn. Es war ihm immer ein Anliegen, als Lehrer 'mathematisch fit' zu bleiben. Aus diesem Bemühen entstanden eine ganze Anzahl von Vorträgen und Zeitschriftenartikel über die Behandlung neuer Themen in der Schule. In seiner Freizeit erholt er sich beim Klavierspielen, beim Kunstschmieden oder einfach beim Grasmähen mit der Sense.

In dieser Notiz soll das Potential kombinatorischer Methoden zur Gewinnung algebraischer Beziehungen an einem elementaren Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchgeführt werden, indem dieses auf mehrere Arten gelöst wird.

Man betrachtet einen *hypothetischen* w -Würfel mit $w \geq 2$ gleichwahrscheinlichen Ausfällen E_1, E_2, \dots, E_w ; also kurz die Augenzahlen "1", "2", ..., " w ". Als Modell eignet sich auch das in w gleiche Sektoren eingeteilte und zufällig stillstehende w -Glücksrad aus [1], p. 60. Die Wahrscheinlichkeit $p(n, w)$ für das erstmalige Auftreten aller w Merkmale (Augenzahlen) nach genau $n \geq w$ Versuchen wird jetzt auf drei Arten berechnet.

1. Art: Bezeichnet Z_i ($0 \leq i \leq w$) den Zustand, dass schon i verschiedene Augenzahlen in der Versuchsreihe aufgetreten sind, so entnimmt man aus dem Graphen der Figur 1,

Der erste Schritt zur Lösung eines Problems – nicht nur eines mathematischen – besteht in der Regel darin, die Situation von *verschiedenen* Seiten her zu studieren und dann *verschiedenartige* Lösungsansätze durchzuprobieren. Denn auch in den Fällen, in denen das Problem nicht vollständig gelöst werden kann, führt ein Vergleich der verschiedenen Lösungsansätze unweigerlich zu einer besseren Einsicht. In der Mathematik ist diese Erfahrung alltäglich; sie ist aber mit Sicherheit nicht auf die Mathematik beschränkt. Und so könnte der mathematische Unterricht ein Ort sein, wo diese ganz allgemein nützliche Grunderfahrung beispielhaft illustriert werden kann. – Im vorliegenden Beitrag geht Roland Wyss ein kombinatorisches Problem auf mehrere verschiedene Arten an, und – wen wundert's? – ein anschliessender Vergleich der Resultate führt zu neuen Einsichten! *usf.*

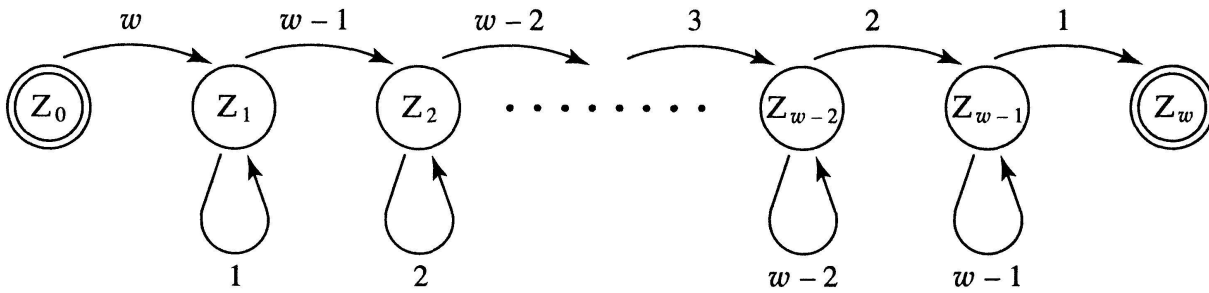


Fig. 1

wo die Übergangspfeile mit den Anzahlen der noch möglichen Fälle beschriftet sind, nach dem *Prinzip des Ein- und Ausschaltens* ([2], p. 159):

$$p(n, w) = w \cdot \left[\binom{w-1}{0} \left(\frac{w-1}{w} \right)^{n-1} - \binom{w-1}{1} \left(\frac{w-2}{w} \right)^{n-1} + \binom{w-1}{2} \left(\frac{w-3}{w} \right)^{n-1} - \dots + (-1)^{w-1} \binom{w-1}{w-1} \left(\frac{0}{w} \right)^{n-1} \right] \cdot \frac{1}{w},$$

denn nach $n - 1$ Spielen soll der Zustand Z_{w-1} erreicht sein und da beträgt die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{w-1}{w} \right)^{n-1}$, dass beispielsweise die Augenzahl "1" fehlt, und

$$\binom{w-1}{1} \left(\frac{w-2}{w} \right)^{n-1}$$

ist die Wahrscheinlichkeit für das Fehlen einer weiteren Augenzahl (ausser "1") und muss daher subtrahiert werden u.s.f. Die Multiplikation mit w steht für die Betrachtung einer anderen fehlenden Augenzahl als die "1" und $1/w$ ist die zu multiplizierende Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der einzigen noch fehlenden Augenzahl beim n -ten Wurf (für den Übergang vom Zustand Z_{w-1} in Z_w). Man erhält somit für die Wahrscheinlichkeit, nach genau n Spielen ($n \geq w$) erstmals einen vollständigen Satz der Augenzahlen "1", "2", ..., "w" zu erhalten, den Ausdruck

$$p(n, w) = \sum_{i=0}^{w-1} (-1)^i \binom{w-1}{i} \left(\frac{w-1-i}{w} \right)^{n-1}, \quad (1)$$

welcher übrigens für alle n mit $1 < n < w$ verschwindet, wie man im nächsten Abschnitt sehen wird.

Beispiel 1: Mit welcher Wahrscheinlichkeit stand ein reguläres Tetraeder beim sechsten Wurf erstmals auf jeder seiner vier (numerierten) Seitenflächen?

$$\begin{aligned} p(6, 4) &= \binom{3}{0} \left(\frac{3}{4} \right)^5 - \binom{3}{1} \left(\frac{2}{4} \right)^5 + \binom{3}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^5 - \binom{3}{3} \left(\frac{0}{4} \right)^5 \\ &= \frac{3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 1^5}{4^5} = \frac{75}{512} \approx 0.1465 \end{aligned}$$

2. Art: Will man im Graphen der Figur 1 vom Zustand Z_0 in genau n Zügen erstmals in den Zustand Z_w gelangen, so müssen die ersten $n - 1$ Züge ein $(n - 1)$ -Tupel von Augenzahlen bilden, in dem noch eine einzige Augenzahl " i " fehlt, während alle anderen $w - 1$ Augenzahlen mindestens einmal auftreten. Dies führt aber genau auf alle surjektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ auf die Menge $\{1, 2, \dots, w\} \setminus \{i\}$, deren Anzahl nach [3], p. 65 $(w - 1)! \cdot S(n - 1, w - 1)$ beträgt, wo $S(\cdot, \cdot)$ die bekannten *Stirling-Zahlen 2. Art* bezeichnet, (vgl. auch [4], p. 204). Nach der Multiplikation mit w für die w Möglichkeiten der genau im n -ten Zug erstmals auftretenden Augenzahl " i " und der Division durch die insgesamt möglichen w^n Fälle erhält man

$$p(n, w) = \frac{w!}{w^n} \cdot S(n - 1, w - 1). \quad (2)$$

Nach [4], p. 204 verschwinden diese Zahlen, wenn die erste Variable kleiner als die zweite ist.

Beispiel 2: Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht man beim Würfeln beim siebten Spiel erstmals alle Augenzahlen?

Aus den Tabellen für die Stirling-Zahlen ([4], p. 310) entnimmt man

$$p(7, 6) = \frac{6!}{6^7} \cdot S(6, 5) = \frac{6!}{6^7} \cdot 15 = \frac{25}{648} \approx 0.0386.$$

3. Art: Um im Graphen der Figur 1 vom Zustand Z_0 in den Zustand Z_w zu gelangen, sind für $n \geq w$ Versuche sicher die mit $w, w - 1, \dots, 3, 2, 1$ beschrifteten (oberen) Pfeile — dies ergibt $w!$ Fälle — und die $\binom{n-2}{n-w}$ Kombinationen mit Wiederholungen der $w - 1$ Beschriftungszahlen $1, 2, \dots, w - 1$ der unteren Pfeile (in aufsteigender Reihenfolge) zur Klasse $n - w$ zu durchschreiten, so dass nach Division mit der Anzahl w^n der insgesamt möglichen Fälle das Resultat

$$p(n, w) = \frac{w!}{w^n} \cdot \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{n-w} \leq w-1} j_1 \cdot j_2 \cdot \dots \cdot j_{n-w} \quad (3)$$

gewonnen wird. Für $n = w$ ist die (leere) Summe durch 1 zu ersetzen.

Beispiel 3: Eine Firma versieht jede Schokoladentafel unter der Verpackung zufällig mit genau einem Konterfei aus einer Auswahl von fünf populären Fussballern. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man genau beim Kauf der siebten Schokolade erstmals einen vollständigen Satz der Fussballer-Bildchen?

$$\begin{aligned} p(7, 5) &= \frac{5!}{5^7} \cdot \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq 4} j_1 \cdot j_2 \\ &= \frac{5!}{5^7} \cdot (1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4) \\ &= \frac{5!}{5^7} \cdot 65 = \frac{312}{3125} \approx 0.0998. \end{aligned}$$

Auswerten der Ergebnisse: Der Vergleich der Resultate (1) (2) (3) ergibt nun für $w \geq 2$, $n \geq w$ die *algebraischen Identitäten*

$$\begin{aligned} \frac{1}{(w-1)!} \sum_{i=0}^{w-1} (-1)^i \binom{w-1}{i} (w-1-i)^{n-1} &= S(n-1, w-1) \\ &= \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{n-w} \leq w-1} j_1 \cdot j_2 \cdot \dots \cdot j_{n-w}. \end{aligned} \quad (4)$$

Das erste Gleichheitszeichen ist die bekannte, geschlossene Darstellung der Stirling-Zahlen 2. Art ([3], p. 65). Der rein rechnerische Beweis der ungewohnten zweiten Gleichheit in (4) sei der fleissigen Leserschaft überlassen.

Von weiterem Interesse ist die *mittlere Spieldauer*, um beim w -Würfel erstmals einen vollständigen Satz der Augenzahlen "1", "2", ..., " w " zu erhalten. Dieser Erwartungswert soll wiederum auf zwei verschiedene Weisen ermittelt werden.

1. Art: Ist X_i die Wartezeit, um im Graphen der Figur 1 vom Zustand Z_i zum Zustand Z_{i+1} zu gelangen ($0 \leq i \leq w-1$), so ist der Erwartungswert der Kehrwert der Übergangswahrscheinlichkeit, da es sich hier um eine geometrische Verteilung handelt, also $E(X_i) = w/(w-i)$ (vgl. [1], p. 69). Da die Zufallsvariablen X_i unabhängig sind, folgt

$$E\left(\sum_{i=0}^{w-1} X_i\right) = \sum_{i=0}^{w-1} E(X_i) = \sum_{i=0}^{w-1} \frac{w}{w-i} = w \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right).$$

Die mittlere Wartezeit bis zu einem vollständigen Satz der w Augenzahlen beträgt beim w -Würfel

$$E = w \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{w} \right). \quad (5)$$

Beim Spielwürfel ist beispielsweise $E = 6(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{6}) = \frac{147}{10} = 14.70$.

2. Art: Bezeichnet Y_i ($0 \leq i \leq w$) die mittlere Anzahl Würfe, um vom Zustand Z_i zum Zustand Z_w (Ziel) zu gelangen, so entnimmt man wieder aus dem Graphen der Figur 1 das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} Y_0 &= 1 + \frac{w}{w} \cdot Y_1 \\ Y_1 &= 1 + \frac{1}{w} \cdot Y_1 + \frac{w-1}{w} \cdot Y_2 \\ Y_2 &= 1 + \frac{2}{w} \cdot Y_2 + \frac{w-2}{w} \cdot Y_3 \\ &\vdots \\ Y_{w-1} &= 1 + \frac{w-1}{w} \cdot Y_{w-1} + \frac{1}{w} \cdot Y_w \\ Y_w &= 0 \end{aligned}$$

oder umgeformt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_{w-1} \\ Y_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{w}{w-1} \\ \frac{w}{w-1} \\ \vdots \\ \frac{w}{1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

das durch Rückwärtseinsetzen aufgelöst werden kann.

Der Vergleich mit (5) ergibt dessen Lösung

$$Y_i = \sum_{j=i}^{w-1} E(X_j) = \sum_{j=i}^{w-1} \frac{w}{w-j} \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, w-1 \quad \text{und } Y_w = 0$$

in geschlossener Form.

Auswerten der Ergebnisse: Da sich der Erwartungswert E der Wurfzahlen für einen vollständigen Satz der Augenzahlen neben (5) auch vermöge (2) durch

$$E = \sum_{n=w}^{\infty} n \cdot p(n, w) = \sum_{n=w}^{\infty} n \cdot \frac{w!}{w^n} S(n-1, w-1)$$

berechnen lässt, wird man auf die eigenartige Beziehung

$$(w-1)! \cdot \sum_{n=w}^{\infty} \frac{n}{w^n} S(n-1, w-1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{w} \quad (7)$$

für die Stirling-Zahlen 2. Art geführt. Ein rechnerischer Nachweis von (7) soll als Übungsaufgabe gestellt sein.

Literatur

- [1] A. Engel, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik 2, Klett Verlag, Stuttgart, 1978.
- [2] M. Jeger, Einführung in die Kombinatorik 1, Klett Verlag, Stuttgart, 1976.
- [3] M. Jeger, Einführung in die Kombinatorik 2, Klett Verlag, Stuttgart, 1979.
- [4] L. Comtet, Advanced combinatorics, Reidel, Dordrecht, 1974.

Roland Wyss
Länggasse 15
CH-4534 Flumenthal