

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 51 (1996)

**Artikel:** Durchmesser und Mittelpunkte algebraischer Hyperflächen  
**Autor:** Kunz, Ernst / Lux, Rainer  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46959>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

## Durchmesser und Mittelpunkte algebraischer Hyperflächen

---

Ernst Kunz und Rainer Lux

Ernst Kunz, geboren 1933 in Heidelberg, ist Professor für Mathematik an der Universität Regensburg. Seine Spezialgebiete sind kommutative Algebra und algebraische Geometrie.

Rainer Lux, Jahrgang 1966, ist wissenschaftlicher Mitarbeiter im Rechenzentrum des Universitätsklinikums Regensburg. Der nachstehende Artikel ist aus seiner Diplomarbeit hervorgegangen.

Man definiert gewöhnlich Durchmesser des Kreises als Geraden durch seinen Mittelpunkt und den Mittelpunkt als den Punkt, von dem alle Punkte der Kreislinie gleichen Abstand haben. Schon Apollonius von Perga ( $\sim 262\text{--}190$  v.Chr.) hat eine andere Möglichkeit angegeben (vgl. [A]): Schneidet man den Kreis mit einer Schar paralleler Geraden und nimmt man auf jeder Geraden den Mittelpunkt der ausgeschnittenen Strecke, so definieren diese Mittelpunkte einen Durchmesser des Kreises. Der Mittelpunkt des Kreises ist dann der Schnittpunkt aller seiner Durchmesser. Ein „verloren gegangener“ Mittelpunkt kann so rekonstruiert werden. Apollonius hat diese Vorgehensweise gleich für Kegelschnitte verwendet, und Newton [N] hat sie 1710 auf beliebige ebene algebraische Kurven ausgedehnt. Sie lässt sich auch auf Hyperflächen im  $n$ -dimensionalen affinen Raum anwenden. Es empfiehlt sich, noch allgemeiner sogleich projektive Hyperflächen

Algebraische Kurven in der Ebene, Flächen im dreidimensionalen Raum, Hyperflächen im  $n$ -dimensionalen Raum untersucht die Mathematik mit Hilfe der algebraischen Geometrie. Der Erfolg der dabei verwendeten algebraischen Techniken geht einher mit einem hohen Abstraktionsgrad, der die geometrische Anschauung weitgehend in den Hintergrund treten lässt. Zum Beispiel arbeitet man in der algebraischen Geometrie aus Gründen einer möglichst einfachen und transparenten Behandlung im allgemeinen nicht im affinen, sondern im projektiven Raum und legt ferner fast immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper, etwa  $\mathbb{C}$ , zugrunde. Die anschauliche Geometrie interessiert sich aber vor allem für den sichtbaren, das heißt affinen und reellen Teil! Es ist aus diesem Grund angezeigt, immer wieder den Beziehungen zwischen dem anschaulich geometrischen Objekt und seinem abstrakten algebraischen Gegenstück nachzugehen. Der vorliegende Beitrag von Ernst Kunz und Rainer Lux wirft Licht auf diese Frage im Beispiel der geometrischen Begriffe des Durchmessers und des Mittelpunktes einer algebraischen Hyperfläche. usf

zu betrachten. Wir wollen hier die Eigenschaften der Durchmesser und Mittelpunkte von Hyperflächen untersuchen und der Frage nachgehen, wann eine Hyperfläche einen (eindeutigen) Mittelpunkt besitzt. Für die im folgenden auftretenden Grundbegriffe der algebraischen Geometrie sei etwa auf [K<sub>1</sub>] verwiesen.

## 1 Durchmesser von Hyperflächen im projektiven Raum

Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und  $\mathbb{P}_K^n$  der  $n$ -dimensionale projektive Raum über  $K$ . Für  $P \in \mathbb{P}_K^n$  bezeichne  $\tilde{P} = (a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$  jeweils ein  $(n+1)$ -Tupel homogener Koordinaten von  $P$ . Wir verwenden hierfür die Schreibweise  $P = \langle \tilde{P} \rangle$ .

Ist  $F \subset \mathbb{P}_K^n$  eine Hyperfläche, so bezeichnen wir mit  $F$  auch stets ein Minimalpolynom der Hyperfläche, also ein homogenes Polynom vom kleinsten Grad aus dem Polynomring  $K[X_0, \dots, X_n]$ , so daß die Hyperfläche die Menge aller Nullstellen dieses Polynoms in  $\mathbb{P}_K^n$  ist. Sein Grad  $d := \deg F$  ist dann die Anzahl der Schnittpunkte von  $F$  mit einer projektiven Geraden, die nicht ganz auf  $F$  liegt, wobei man die Schnittpunkte jeweils mit der richtigen Vielfachheit (Schnittmultiplizität) zu zählen hat.

Seien nun eine Hyperfläche  $F$  vom Grad  $d$ , eine Hyperebene  $H$  (ein homogenes lineares Polynom) und eine Gerade  $G$  in  $\mathbb{P}_K^n$  gegeben, so daß  $F \cap G \cap H = \phi$  ist. Die Punkte von  $F \cap G$  seien mit  $P_1, \dots, P_\delta$  bezeichnet, wobei  $P_i = \langle \tilde{P}_i \rangle$  mit  $\tilde{P}_i \in K^{n+1}$ , und es sei  $\mu_{P_i}(F, G)$  die Schnittmultiplizität der Hyperfläche mit der Geraden im Punkte  $P_i$  ( $i = 1, \dots, \delta$ ).

**1.1 Definition.** Der *Schwerpunkt*  $\Sigma_{F \cap G}^H$  von  $F \cap G$  bzgl.  $H$  ist gegeben als

$$\Sigma_{F \cap G}^H := \left\langle \sum_{i=1}^{\delta} \mu_{P_i}(F, G) \cdot H(\tilde{P}_i)^{-1} \cdot \tilde{P}_i \right\rangle .$$

Die Schnittmultiplizitäten sind in unserer Situation einfach zu beschreiben: Sei  $P$  der Schnittpunkt von  $G$  und  $H$  und  $Q$  ein weiterer Punkt von  $G$ . Dann hat  $G$  die Parameterdarstellung  $G = \{\langle \lambda \tilde{P} + \mu \tilde{Q} \rangle \mid (\lambda, \mu) \in K^2 \setminus (0, 0)\}$ . Ist  $\tilde{P}_i = \lambda_i \tilde{P} + \mu_i \tilde{Q}$  ( $i = 1, \dots, \delta, (\lambda_i, \mu_i) \in K^2$ ), so besitzt das homogene Polynom  $d$ -ten Grades  $\varphi \in K[\lambda, \mu]$  mit  $\varphi(\lambda, \mu) := F(\lambda \tilde{P} + \mu \tilde{Q})$ , weil  $K$  algebraisch abgeschlossen ist, eine Zerlegung in homogene Linearfaktoren

$$\varphi = c \cdot \prod_{i=1}^{\delta} (\mu_i \lambda - \lambda_i \mu)^{\nu_i} \quad (c \in K^\times) , \quad (1)$$

und es ist  $\mu_{P_i}(F, G) = \nu_i$  ( $i = 1, \dots, \delta$ ). Wir können diese Gleichungen als die Definition der Schnittmultiplizitäten verwenden. Es ist  $H(\tilde{\Sigma}_{F \cap G}^H) = \sum_{i=1}^{\delta} \mu_{P_i}(F, G) = d \neq 0$ , so daß

nicht alle Koordinaten von  $\Sigma_{F \cap G}^H$  verschwinden können und somit ein wohldefinierter Punkt in  $\mathbb{P}_K^n$  vorliegt. Er ist von der Koordinatenwahl und der Wahl einer speziellen Gleichung  $H$  der Hyperebene unabhängig.

**1.2 Bemerkung.** Bei geeigneter Koordinatenwahl ist  $H$  die Hyperebene  $X_0 = 0$ . Sei  $\mathbb{A}_K^n := \mathbb{P}_K^n \setminus H$  der affine Raum mit der unendlich fernen Hyperebene  $H$  und seien  $f := F \cap \mathbb{A}_K^n$ ,  $g := G \cap \mathbb{A}_K^n$  die affinen Teile von  $F$  und  $G$ . Schreibt man  $P_i = \langle \tilde{P}_i \rangle$  mit  $\tilde{P}_i = (1, p_1^i, \dots, p_n^i)$ , so sind durch  $Q_i := (p_1^i, \dots, p_n^i)$  die Punkte von  $f \cap g$  in affinen Koordinaten gegeben. Mit  $\mu_{Q_i}(f, g) := \mu_{P_i}(F, G)$  erhält man wegen  $H(\tilde{P}_i) = 1$

$$\Sigma_{F \cap G}^H = \left\langle 1, \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{\delta} \mu_{Q_i}(f, g) \cdot Q_i \right\rangle ,$$

d.h.  $\Sigma_{F \cap G}^H$  identifiziert sich im Affinen mit dem gewöhnlichen (physikalischen) Schwerpunkt  $\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{\delta} \mu_{Q_i}(f, g) \cdot Q_i$  von  $f \cap g$ , dem arithmetischen Mittel der mit der Schnittmultiplizität gewichteten Schnittpunkte.

Im folgenden bezeichnet  $F_{X_i}$  die partielle Ableitung des Polynoms  $F \in K[X_0, \dots, X_n]$  nach der Variablen  $X_i$  und  $\text{Grad } F$  das  $(n+1)$ -Tupel  $(F_{X_0}, \dots, F_{X_n})$ . Die Aussage des Apollonius verallgemeinert sich nun wie folgt:

**1.3 Satz.** Wähle  $P \in H \setminus F$  und lasse  $G$  die Geraden mit  $G \cap H = \{P\}$  durchlaufen. Dann bilden die Schwerpunkte  $\Sigma_{F \cap G}^H$  eine dichte offene Teilmenge der Hyperebene

$$\Delta_F(P) : \sum_{i=0}^n F_{X_i}(\tilde{P}) \cdot X_i = 0 .$$

Diese hängt nur von  $P$  ab und nicht von der Wahl der Hyperebene  $H$  mit  $P \in H$ .

*Beweis:* Nach der Taylorschen Formel gilt für  $\varphi$  aus (1) und  $Q \notin H$

$$\varphi(\lambda, \mu) = F(\lambda \tilde{P} + \mu \tilde{Q}) = F(\tilde{P}) \cdot \lambda^d + (\text{Grad } F(\tilde{P}), \tilde{Q}) \cdot \lambda^{d-1} \mu + \dots ,$$

wobei  $(\cdot, \cdot)$  das Standardskalarprodukt auf  $K^{n+1}$  bedeutet. Hierbei ist  $F(\tilde{P}) \neq 0$ , da  $P \notin F$ . Andererseits folgt aus (1)

$$\varphi(\lambda, \mu) = c \left[ (-1)^d \prod_{i=1}^{\delta} \mu_i^{\nu_i} \cdot \lambda^d + (-1)^{d-1} \left( \sum_{i=1}^{\delta} \nu_i \mu_i^{\nu_i-1} \lambda_i \prod_{j \neq i} \mu_j^{\nu_j} \right) \cdot \lambda^{d-1} \mu + \dots \right] .$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich  $\prod_{i=1}^{\delta} \mu_i \neq 0$  und

$$\frac{1}{F(\tilde{P})} (\text{Grad } F(\tilde{P}), \tilde{Q}) = - \sum_{i=1}^{\delta} \nu_i \frac{\lambda_i}{\mu_i} .$$

Mit

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{F \cap G}^H &= \left\langle \sum_{i=1}^{\delta} \nu_i \frac{\lambda_i \tilde{P} + \mu_i \tilde{Q}}{H(\lambda_i \tilde{P} + \mu_i \tilde{Q})} \right\rangle = \\ &\left\langle \sum_{i=1}^{\delta} \nu_i \cdot \frac{\lambda_i}{\mu_i} \cdot \tilde{P} + d \cdot \tilde{Q} \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{F(\tilde{P})} \cdot (\text{Grad } F(\tilde{P}), \tilde{Q}) \cdot \tilde{P} + d \cdot \tilde{Q} \right\rangle \end{aligned}$$

erhält man

$$(\text{Grad } F(\tilde{P}), \tilde{\Sigma}_{F \cap G}^H) = d \cdot (\text{Grad } F(\tilde{P}), \tilde{Q}) - \frac{1}{F(\tilde{P})} \cdot (\text{Grad } F(\tilde{P}), \tilde{Q}) \cdot (\text{Grad } F(\tilde{P}), \tilde{P}) .$$

Nach der Eulerschen Formel für homogene Polynome ist aber  $(\text{Grad } F(\tilde{P}), \tilde{P}) = d \cdot F(\tilde{P})$ , und es ergibt sich somit, daß  $(\text{Grad } F(\tilde{P}), \tilde{\Sigma}_{F \cap G}^H) = 0$  ist, also liegen die Schwerpunkte auf der Hyperebene  $\Delta_F(P)$ . Da  $Q$  ein beliebiger Punkt außerhalb von  $H$  war und der Schwerpunkt  $\tilde{\Sigma}_{F \cap G}^H$  jeweils auf der Geraden  $G$  liegt, bilden die Schwerpunkte eine dichte Teilmenge der Hyperebene  $\Delta_F(P)$ .

**1.4 Definition.**  $\Delta_F(P)$  heißt der  $P$  entsprechende *Durchmesser* von  $F$ . Er wird durch die Gleichung  $\sum_{i=0}^n F_{X_i}(\tilde{P}) \cdot X_i = 0$  beschrieben.

**1.5 Bemerkung.** In der Situation von Bemerkung 1.2 sei  $P = \langle 0, p_1, \dots, p_n \rangle$  und  $f := F(1, X_1, \dots, X_n)$ . Dieses Polynom beschreibt den affinen Teil von  $F$ , den wir im folgenden ebenfalls mit  $f$  bezeichnen. Ist  $f = \sum_{i=0}^d f_i$  die Zerlegung von  $f$  in homogene Polynome  $f_i$  vom Grad  $i$ , so ist  $F(\tilde{P}) = f_d(p_1, \dots, p_n) \neq 0$ ,  $F_{X_0}(\tilde{P}) = f_{d-1}(p_1, \dots, p_n)$ ,  $F_{X_i}(\tilde{P}) = (f_d)_{X_i}(p_1, \dots, p_n)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Der affine Teil des Durchmessers  $\Delta_F(P)$  ist somit die Hyperebene mit der Gleichung

$$\sum_{i=1}^n (f_d)_{X_i}(p_1, \dots, p_n) \cdot X_i + f_{d-1}(p_1, \dots, p_n) = 0 . \quad (2)$$

Aus dieser affinen Beschreibung des Durchmessers ergibt sich z.B. sofort, daß die hier definierten Durchmesser einer “ $(n-1)$ -Sphäre”  $\sum_{i=1}^n (X_i - a_i)^2 = r^2$  in  $\mathbb{A}_K^n$  gerade die Hyperebenen durch  $(a_1, \dots, a_n)$  sind.

Dem Geradenbüschel durch  $P$  entspricht im Affinen die Schar paralleler Geraden mit dem unendlich fernen Punkt  $P$ , und die Schwerpunkte der Schnitte der Hyperfläche mit diesen Geraden liegen nach Satz 1.3 auf der Hyperebene (2), die offensichtlich nur von den homogenen Bestandteilen höchsten und zweithöchsten Grades von  $f$  abhängt (siehe Figur 1). Über Verallgemeinerungen dieses Satzes und verwandte Aussagen kann man sich in [K<sub>2</sub>] informieren.

Anders als in Bemerkung 1.5 kann man die unendlich ferne Hyperebene auch so wählen, daß sie  $P$  nicht enthält, und man kann das affine Koordinatensystem so einrichten, daß  $P = 0$  der affine Ursprung wird. Die Geraden durch  $P$  können dann durch ihre Parameterdarstellung  $g_x = \{\lambda x \mid \lambda \in K\}$  gegeben werden, wobei  $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n \setminus \{0\}$ . Bei dieser Betrachtungsweise geht 1.3 in den folgenden Satz von MacLaurin ([M], p.379) über (siehe Figur 2):

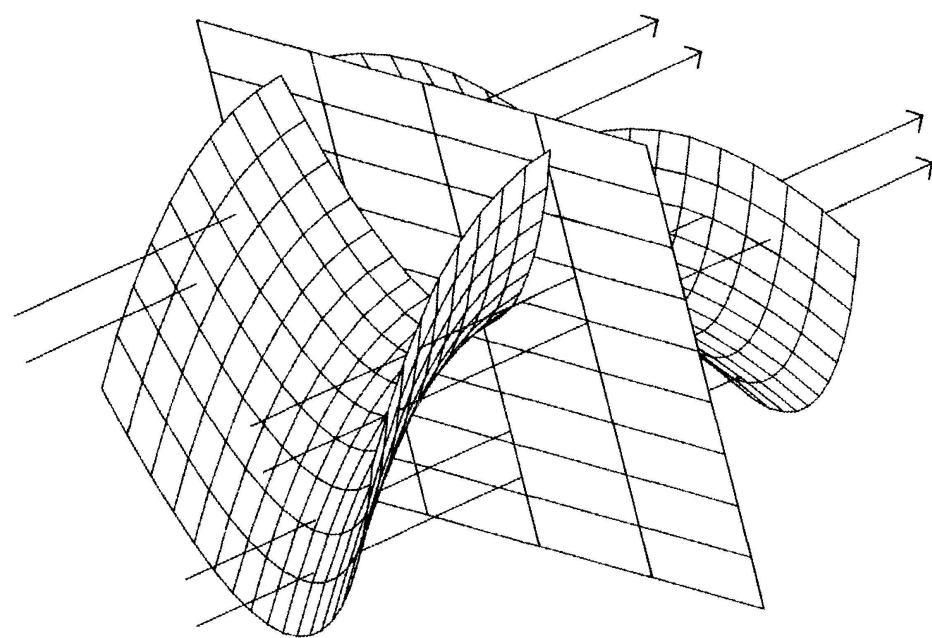


Fig. 1

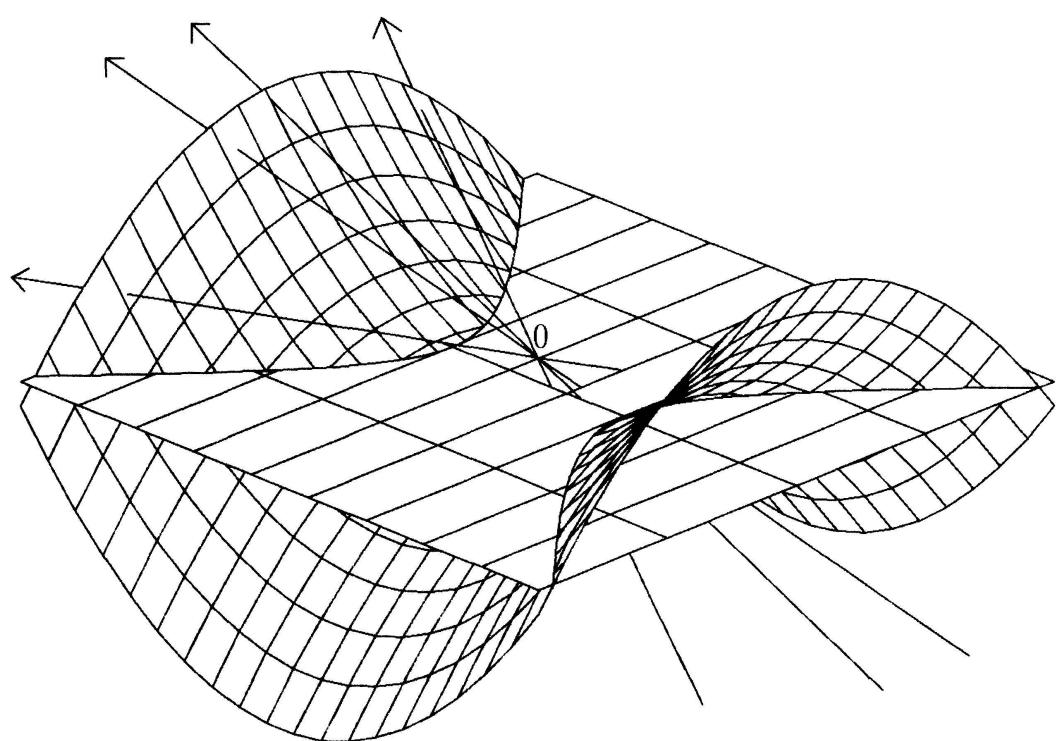


Fig. 2

**1.6 Korollar.** Sei  $f \subset \mathbb{A}_K^n$  eine Hyperfläche vom Grad  $d \geq 1$  mit  $0 \notin f$ . Die Gerade  $g_x$  durch 0 schneide  $f$  in den Punkten  $P_i = \lambda_i x$  ( $i = 1, \dots, d$ ). Dann heißt  $d \cdot \left( \sum_{i=1}^d \lambda_i^{-1} \right)^{-1} x$  der harmonische Mittelpunkt von  $f \cap g_x$ . Für variables  $x$  liegen die harmonischen Mittelpunkte auf einer Hyperebene.

*Beweis.* In projektiven Koordinaten ist  $P_i = \langle 1, \lambda_i x_1, \dots, \lambda_i x_n \rangle$  ( $i = 1, \dots, d$ ). Ist etwa  $x_n \neq 0$ , so sei  $H$  die Hyperebene  $X_n = 0$ . Wenn  $F$  die  $f$  entsprechende projektive Hyperfläche und  $G_x$  die  $g_x$  entsprechende projektive Gerade ist, dann gilt nach 1.1

$$\begin{aligned} \Sigma_{F \cap G_x}^H &= \left\langle \sum_{i=1}^d \frac{1}{\lambda_i x_n} (1, \lambda_i x_1, \dots, \lambda_i x_n) \right\rangle \\ &= \left\langle 1, d \cdot (\sum \lambda_i^{-1})^{-1} x_1, \dots, d \cdot (\sum \lambda_i^{-1})^{-1} x_n \right\rangle. \end{aligned}$$

Der entsprechende Punkt in  $\mathbb{A}_K^n$  ist gerade der harmonische Mittelpunkt von  $f \cap g_x$ . Da die  $\Sigma_{F \cap G_x}^H$  nach 1.3 auf einer Hyperebene liegen, folgt die Behauptung des Korollars.

Der Begriff des harmonischen Mittels wurde von MacLaurin im Zusammenhang mit diesem Satz geprägt.

## 2 Mittelpunkte

Seien  $F$  und  $H$  wie zu Beginn von Abschnitt 1 gegeben.

**2.1 Definition.** Ein Punkt  $M \in \mathbb{P}_K^n$  heißt *Mittelpunkt von  $F$  bzgl. der Hyperebene  $H$* , wenn er auf allen Durchmessern  $\Delta_F(P)$  für  $P \in H \setminus F$  liegt. Unter einem Mittelpunkt einer affinen Hyperfläche verstehen wir einen Mittelpunkt ihrer projektiven Abschließung bzgl. der unendlich fernen Hyperebene.

Eine Hyperfläche  $F$  braucht keine Mittelpunkte bzgl.  $H$  zu haben. Wenn sie Mittelpunkte besitzt, dann können diese auf  $H$  liegen, für den affinen Teil von  $F$  also “unendlich fern” sein. Ein Beispiel hierfür sind die Parabeln in der Ebene. Läßt sich in der Situation von Bemerkung 1.5 das affine Koordinatensystem so wählen, daß  $f_{d-1} = 0$  ist, so sind alle Gleichungen (2) homogen, und der Ursprung ist sicher ein Mittelpunkt von  $f$ .

Sei  $M \in \bigcap_{P \in H \setminus F} \Delta_F(P)$ ,  $M = \langle m_0, \dots, m_n \rangle$  ein Mittelpunkt von  $F$  bzgl.  $H$  und sei

$$D_M(F) := \sum_{i=0}^n m_i \cdot F_{X_i}$$

die *Polare* von  $F$  bzgl.  $M$ . Die entsprechende Hyperfläche hat den Grad  $d - 1$ . Nach 1.3 ist  $D_M(F)(\tilde{P}) = 0$  für  $P \in H \setminus F$ . Da  $H \setminus F$  eine dichte offene Menge von  $H$  ist, gilt  $D_M(F)(\tilde{P}) = 0$  für alle  $P \in H$ .

Sei  $\text{Reg}(F)$  die Menge der Punkte, in denen die Hyperfläche  $F$  glatt ist, und  $\text{Sing}(F) := F \setminus \text{Reg}(F)$  der singuläre Ort von  $F$ . Nach dem Kriterium von Jacobi sind die Singularitäten gerade die Punkte  $P$  von  $F$  mit  $\text{Grad } F(\tilde{P}) = 0$ . Für  $P \in \text{Reg}(F)$  ist durch  $\Delta_F(P) = \sum_{i=0}^n F_{X_i}(\tilde{P}) \cdot X_i$  die Tangentialhyperebene  $T_P F$  von  $F$  im Punkte  $P$  gegeben.

Setze noch  $\Delta_F(P) = \mathbb{P}_K^n$  für  $P \in \text{Sing}(F)$ . Da  $D_M(F)(\tilde{P}) = 0$  für alle  $P \in H$  ist, folgt:

**2.2 Satz.** Die Menge aller Mittelpunkte von  $F$  bzgl.  $H$  ist der projektive Unterraum  $\bigcap_{P \in H} \Delta_F(P)$  von  $\mathbb{P}_K^n$ . Er besitzt die Dimension  $d$ , wenn der Untervektorraum

$$\sum_{P \in H} K \cdot (\text{Grad } F)(\tilde{P}) \subset K^{n+1}$$

von der Dimension  $n - d$  ist ( $d \geq -1$ ). Die Mittelpunkte sind in allen Tangentialhyperebenen von  $F$  in den Punkten von  $H \cap \text{Reg}(F)$  enthalten.

Ist  $H$  selbst tangential an  $F$ , so sind alle Mittelpunkte für den affinen Teil von  $F$  unendlich fern. Bei einer Sphäre  $\sum_{i=1}^n (X_i - a_i)^2 = r^2$  stellt sich der Sachverhalt wie folgt dar: Die Tangentialhyperebenen in den unendlich fernen Punkten  $\langle 0, c_1, \dots, c_n \rangle$ ,  $\sum_{i=1}^n c_i^2 = 0$  sind durch die Gleichungen  $\sum_{i=1}^n c_i(X_i - a_i) = 0$  gegeben. Sie haben als Schnittpunkt gerade den Mittelpunkt  $(a_1, \dots, a_n)$  der Sphäre.

Der Beweis von 2.2 hat auch gezeigt:

**2.3 Korollar.** Genau dann ist  $M \in \mathbb{P}_K^n$  ein Mittelpunkt von  $F$  bzgl.  $H$ , wenn das Polynom  $H$  die Polare  $D_M(F)$  teilt. Die Mittelpunkte von  $F$  (bzgl. einer geeigneten Hyperebene) sind genau die Punkte  $M \in \mathbb{P}_K^n$ , deren Polare  $D_M(F)$  einen Linearfaktor abspaltet.

Sei jetzt  $H$  die Hyperebene  $X_0 = 0$  und  $f$  wie in 1.5 die  $F$  entsprechende affine Hyperebene. Genau dann ist  $M = \langle m_0, m_1, \dots, m_n \rangle \in \mathbb{P}_K^n$  Mittelpunkt von  $F$  bzgl.  $H$ , wenn  $D_M(F) \equiv 0 \pmod{X_0}$ , also wenn

$$m_0 f_{d-1} + \sum_{i=1}^n m_i (f_d)_{X_i} = 0 .$$

Hieraus folgt

**2.4 Korollar.** Genau dann besitzt  $f$  einen Mittelpunkt im Endlichen, wenn sich  $f_{d-1}$  als Linearkombination von  $(f_d)_{X_1}, \dots, (f_d)_{X_n}$  schreiben lässt.

Diese Bedingung ist bei gegebenem Polynom  $f$  leicht zu überprüfen, und jede Darstellung  $-f_{d-1} = \sum_{i=1}^n m_i (f_d)_{X_i}$  ergibt einen affinen Mittelpunkt  $(m_1, \dots, m_n)$  von  $f$ . Beispielsweise hat die "Tomate"

$$(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 4X_3)^2 - 16(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) = 0$$

den eindeutigen Mittelpunkt  $M = (0, 0, -2)$  (siehe Figur 3).

Die Bedingung in 2.4 ist auch äquivalent dazu, daß  $f_{d-1}$  durch eine affine Koordinatentransformation zum Verschwinden gebracht werden kann.

Unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen sind die Mittelpunkte von  $F$  bzgl.  $H$  gerade die Schnittpunkte aller Tangentialhyperebenen der auf  $H$  liegenden regulären Punkte von  $F$ , der "Asymptotenhyperebenen" in affiner Betrachtungsweise.

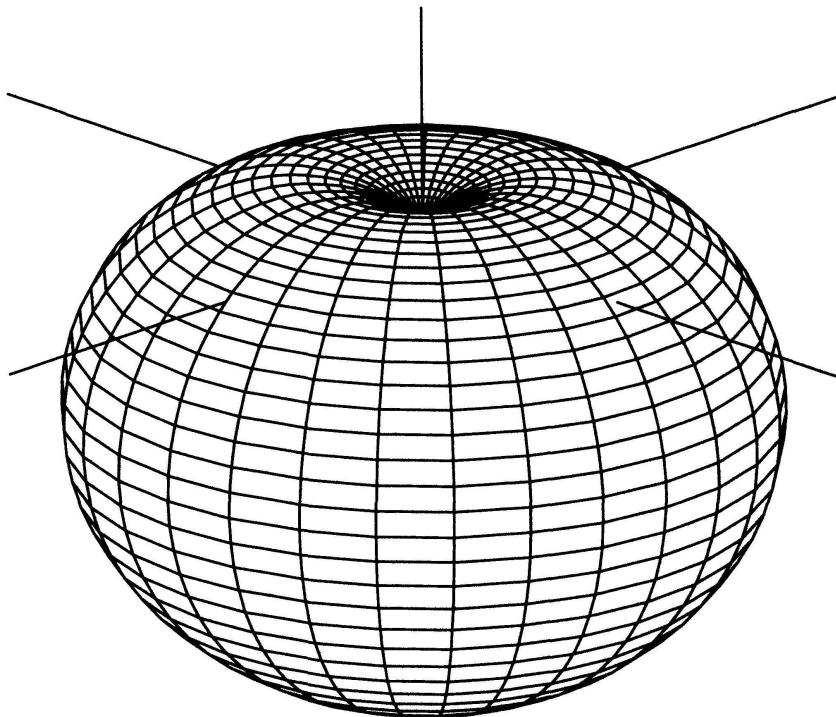


Fig. 3

**2.5 Satz.** Ist das Schnittschema  $F \cap H$  reduziert, so ist  $\bigcap_{P \in H \cap \text{Reg}(F)} T_P F$  die Menge aller Mittelpunkte von  $F$  bzgl.  $H$ .

**Beweis.** Nach 2.3 ist nachzuweisen, daß  $H$  für jedes  $M \in \bigcap_{P \in H \cap \text{Reg}(F)} T_P F$  die Polare  $D_M(F)$  teilt. Für  $d = 1$  ist nichts zu zeigen, sei daher  $d \geq 2$ . Die Polare, aufgefaßt als Hyperfläche in  $\mathbb{P}_K^n$ , enthält die Singularitäten von  $F$  und die Berührpunkte  $P$  der Tangentialhyperebenen  $T_P F$  mit  $M \in T_P F$ . Es ist also  $H \cap F \subset D_M(F)$ .

Nach einer Koordinatentransformation kann man annehmen, daß  $H$  die Hyperebene  $X_0 = 0$  ist. Die Reduziertheitsvoraussetzung bedeutet gerade, daß  $F(0, X_1, \dots, X_n)$  ein Polynom vom Grad  $d$  ohne mehrfache Faktoren ist, also das Minimalpolynom von  $H \cap F$ , aufgefaßt als Hyperfläche in der unendlich fernen Hyperebene. Da es  $D_M(F)(0, X_1, \dots, X_n)$  teilt und  $D_M(F)$  den Grad  $d - 1$  besitzt, folgt  $D_M(F)(0, X_1, \dots, X_n) = 0$  und somit ist  $H$  ein Teiler von  $D_M(F)$ .

**2.6 Korollar.** Besitzt  $F \cap H$  genau  $d$  verschiedene irreduzible Komponenten, so ist  $\bigcap_{P \in H \cap \text{Reg}(F)} T_P(F)$  die Menge aller Mittelpunkte von  $F$  bzgl.  $H$ .

Für alle Punkte  $P \notin F$ ,  $P = \langle \tilde{P} \rangle$ , ist  $\text{Grad } F(\tilde{P}) \neq 0$ , denn nach Euler ist

$$(\text{Grad } F(\tilde{P}), \tilde{P}) = d \cdot F(\tilde{P}) \neq 0.$$

Man hat daher eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \gamma_F : \mathbb{P}_K^n \setminus \text{Sing}(F) & \rightarrow & \mathbb{P}_K^n \\ P & \mapsto & \langle \text{Grad } F(\tilde{P}) \rangle , \end{array}$$

deren Zusammensetzung mit der kanonischen Dualität zwischen Punkten und Hyperebenen  $\mathbb{P}_K^n \rightarrow (\mathbb{P}_K^n)^\vee$  ( $\langle a_0, \dots, a_n \rangle \mapsto \sum_{i=0}^n a_i X_i$ ) jedem  $P \notin F$  den Durchmesser  $\Delta_F(P)$  und jedem  $P \in \text{Reg}(F)$  die Tangentialhyperebene  $T_P F$  zuordnet. Die Beschränkung von  $\gamma_F$  auf  $\text{Reg}(F)$  heißt Gauß-Abbildung. Sie ist schon intensiv studiert worden. In unserem Zusammenhang ist  $\gamma_F$  aber auch als Abbildung von  $\mathbb{P}_K^n \setminus \text{Sing}(F)$  nach  $\mathbb{P}_K^n$  von Interesse. Die Frage nach der Existenz eines Mittelpunkts von  $F$  bzgl.  $H$  stellt sich nämlich nach 2.2 wie folgt dar: Genau dann besitzt  $F$  einen solchen Mittelpunkt, wenn  $\gamma_F(H)$  in einer Hyperebene enthalten ist. Der zu dieser Hyperebene duale Punkt ist dann ein Mittelpunkt von  $F$  bzgl.  $H$ .

Für glatte Hyperflächen läßt sich diese Aussage verschärfen, wofür wir aber einige etwas weiterreichende Tatsachen der kommutativen Algebra benötigen als bisher. Wir zeigen zunächst

**2.7 Lemma.** *Ist  $F$  glatt und  $d \geq 2$ , so ist  $\gamma_F : \mathbb{P}_K^n \rightarrow \mathbb{P}_K^n$  endlich und surjektiv.*

*Beweis.* Wegen der Glattheit von  $F$  ist das Bild von  $(X_0, \dots, X_n)$  in der Algebra  $A := K[X_0, \dots, X_n]/(F_{X_0}, \dots, F_{X_n})$  das einzige homogene Primideal. Daher ist  $A$  eine endlich-dimensionale  $K$ -Algebra. Nach dem homogenen Nakayama-Lemma ist  $K[F_{X_0}, \dots, F_{X_n}] \rightarrow K[X_0, \dots, X_n]$  eine endliche Erweiterung von Polynomalgebren. Die durch diese Erweiterung induzierte Abbildung

$$\text{Proj } K[X_0, \dots, X_n] \rightarrow \text{Proj } K[F_{X_0}, \dots, F_{X_n}] \quad (\mathfrak{P} \mapsto \mathfrak{P} \cap K[F_{X_0}, \dots, F_{X_n}])$$

identifiziert sich mit  $\gamma_F$ , woraus die Behauptung folgt.

Insbesondere bleibt bei  $\gamma_F$  die Höhe (homogener) Primideale  $\mathfrak{P}$  erhalten ([K1], Kap. II, 2.17). Hyperflächen werden daher auf Hyperflächen abgebildet. Das Bild von  $F$  ist die zu  $F$  duale Hyperfläche  $\hat{F}$ , deren Punkte die Tangentialhyperebenen in den Punkten von  $F$  sind, aufgefaßt als Punkte des dualen projektiven Raums. Aus der Endlichkeit der Abbildung folgt auch die Tatsache, daß eine Hyperebene nur in endlich vielen Schnittpunkten mit  $F$  tangential zu  $F$  sein kann.

Speziell ist  $\gamma_F(H)$  für jede Hyperebene  $H$  eine Hyperfläche, braucht aber keine Hyperebene zu sein. Gemäß der obigen Diskussion gilt jedoch

**2.8 Satz.** *Ist  $F$  eine glatte Hyperfläche vom Grad  $d \geq 2$ , so besitzt  $F$  bzgl. jeder Hyperebene  $H$  keinen oder genau einen Mittelpunkt. Dieser ist der zu  $\gamma_F(H)$  duale Punkt, sofern  $\gamma_F(H)$  eine Hyperebene ist. Jede Hyperebene durch den Mittelpunkt ist ein Durchmesser oder tangential an  $F$  in einem Punkt von  $H \cap F$ .*

In der affinen Version des Satzes hat man darauf zu achten, daß die betrachtete Hyperfläche auch in ihren unendlich fernen Punkten glatt sein muß. Ist die unendlich ferne Hyperebene tangential zur Hyperfläche, so hat die zugehörige affine Hyperfläche keinen Mittelpunkt im Endlichen.

### 3 Beispiele

a) **Quadriken.** Sei

$$F = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} X_i X_j \quad (a_{ik} \in K, a_{ik} = a_{ki})$$

eine projektive Quadrik. Setze  $A := [a_{ik}]_{i,k=0,\dots,n}$  für ihre Koeffizientenmatrix. Es ist dann  $\text{Grad } F = 2(X_0, \dots, X_n) \cdot A$ , und  $P \in \mathbb{P}_K^n$  ist genau dann eine Singularität von  $F$ , wenn  $A \cdot \tilde{P}^T = 0$  ist, wobei  $\tilde{P}^T$  die  $\tilde{P}$  entsprechende Spalte ist. Ferner ist  $D_P(F) = 2(X_0, \dots, X_n) \cdot A \cdot \tilde{P}^T = 0$  genau dann, wenn  $P$  eine Singularität ist. Nach 2.4 ist jede Singularität von  $F$  Mittelpunkt bzgl. jeder Hyperebene; ein regulärer Punkt  $P$  ist Mittelpunkt nur für seine Polare  $D_P(F)$ .

Ist  $F$  eine glatte Quadrik, so ist für jede Hyperebene  $H$  der zu  $H$  gehörige Pol  $P$  der eindeutige Mittelpunkt von  $F$  bzgl.  $H$ . Er liegt genau dann auf  $H$ , wenn  $H$  tangential an  $F$  ist. Bei einer glatten Quadrik identifiziert sich also die Abbildung “Polare  $\mapsto$  Pol” gerade mit der Zuordnung “Hyperebene  $\mapsto$  Mittelpunkt von  $F$  bzgl. der Hyperebene”.

Eine affine Quadrik  $f = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} X_i X_k + \sum_{i=1}^n b_i X_i + c$  besitzt nach 2.4 genau dann einen Mittelpunkt im Endlichen, wenn sich das Koordinatensystem so wählen lässt, daß  $b_1 = \dots = b_n = 0$  ist.

b) **Kubische Hyperflächen.** Sei nun  $\deg F = 3$ . In diesem Fall ist für  $P \in \mathbb{P}_K^n$  die Polare  $D_P(F)$  eine Quadrik.

**3.1 Bemerkung.** Die Koeffizientenmatrix von  $D_P(F)$  ist  $\frac{1}{2} (\text{Hess } F)(\tilde{P})$ , wobei  $\text{Hess } F$  die Hessematrix  $[F_{X_i X_j}]_{i,j=0,\dots,n}$  ist.

*Beweis.* Sei  $P = \langle p_0, \dots, p_n \rangle$ . Nach der Eulerschen Formel hat man

$$D_P(F) = \sum_{i=0}^n p_i \cdot F_{X_i} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^n p_i \cdot F_{X_i X_j} \cdot X_j .$$

Da  $[F_{X_i X_j}]$  eine symmetrische Matrix mit homogenen linearen Polynomen als Koeffizienten ist, gilt  $\sum_{i=0}^n p_i F_{X_i X_j} = \sum_{i=0}^n F_{X_i X_j}(\tilde{P}) \cdot X_i$  und somit

$$D_P(F) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=0}^n F_{X_i X_j}(\tilde{P}) \cdot X_i X_j .$$

Genau dann ist  $P$  nach 2.3 ein Mittelpunkt bzgl. einer geeigneten Hyperebene  $H$ , wenn  $D_P(F)$  in das Produkt zweier linearer homogener Polynome zerfällt, wenn also  $D_P(F)$  als Hyperfläche aus zwei Hyperebenen oder einer doppelt zu zählenden Hyperebene besteht. Dies gilt genau dann, wenn  $\text{Rang}(\text{Hess } F) \leq 3$  ist. Die Mittelpunkte bilden also die projektive Varietät  $V$ , die durch Verschwinden der 3-Minoren der Hessematrix von  $F$  beschrieben wird. Für die  $M \in V$  ist dann  $M$  Mittelpunkt bzgl. der Hyperebenen, die den beiden Linearfaktoren der Polare entsprechen.

Bei der Fermat-Hyperfläche  $F = \sum_{i=0}^n X_i^3$  sind gerade die Punkte Mittelpunkte, bei denen alle Koordinaten bis auf zwei verschwinden.

Für eine ebene nichtsinguläre Kurve  $F \subset \mathbb{P}_K^2$  vom Grad 3 (elliptische Kurve) ist die durch  $\det(\text{Hess } F) = 0$  gegebene *Hessekurve* von  $F$  die Menge aller Mittelpunkte (bzgl. geeigneter Geraden). Die Schnittpunkte von  $F$  mit der Hessekurve sind die 9 Wendepunkte von  $F$ . Diese sind somit Mittelpunkte (bzgl. der Wendetangente).

## Literatur

- [A] Czwalina, A. (Übersetzer): Die Kegelschnitte des Apollonius. Nachdruck der Ausgabe München und Berlin 1926, Oldenbourg Verlag, München 1967.
- [K<sub>1</sub>] Kunz, E.: Introduction to commutative algebra und algebraic geometry. 3<sup>rd</sup> printing. Birkhäuser Boston 1993 .
- [K<sub>2</sub>] Kunz, E.: Über den  $n$ -dimensionalen Residuensatz. Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 94 (1992), 170–188.
- [M] MacLaurin, C.: A treatise on algebra. London 1748.
- [N] Whiteside, D.A. (Herausgeber): The mathematical papers of Isaac Newton, Vol. VII. Cambridge 1976.

Ernst Kunz

Rainer Lux

Fakultät für Mathematik

Universität Regensburg

D-93040 Regensburg