El. Math. *51* (1996)
0013-6018/96/010038-05$1.50 + 0.20/0


# Aufgaben

## Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. August 1996 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma

  oder

- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

**Aufgabe 1105:** Es sei $I$ der Inkreismittelpunkt und $U$ der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks $ABC$. Die verlängerten Winkelhalbierenden des Dreiecks sollen den Umkreis in den Punkten $D$, $E$ resp. $F$ schneiden. Man beweise

$$\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{UD} + \overrightarrow{UE} + \overrightarrow{UF} \quad .$$

Šefket Arslanagić, Berlin, D

**Aufgabe 1106:** Eine symmetrische 0-1-Münze wird wiederholt geworfen. Für jede 1 erhalten Sie einen Franken. Sie dürfen das Spiel jederzeit abbrechen und behalten, was Sie bis dahin gewonnen haben. Sobald aber zweimal hintereinander 0 erscheint, ist das Spiel aus, und Sie haben alles verloren. (Irgendwelche Ähnlichkeiten mit realen Lebenssituationen sind rein zufällig.) — Welches ist die optimale Strategie, und welchen Erwartungswert hat dann dieses Spiel?

Christian Blatter, Zürich, CH

**Aufgabe 1107 (Die einfache dritte Aufgabe):** Es ist bekannt, wie man $a^2 - b^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$ in zwei reelle Linearfaktoren zerlegt. Dagegen sagt man, $a^2 + b^2$ sei nicht zerlegbar. Da ist es vielleicht überraschend, dass es trotzdem eine Zerlegung in zwei nichttriviale reelle Faktoren gibt. Natürlich handelt es sich dabei nicht um Linearfaktoren. Man bestimme eine solche nichttriviale Zerlegung und gebe an, unter welcher Bedingung für natürliche $a$ und $b$ sich sogar eine Zerlegung in zwei natürliche Faktoren ergibt.

Johannes Gollnick, Hamburg, D

## Lösungen zu den Aufgaben aus Heft 1, 1995

**Aufgabe 1093.** Bei welchen Vierecken ist das von den Mittelsenkrechten der vier Seiten gebildete Vierseit kongruent zum Ausgangsviereck?

Hans Walser, Frauenfeld, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind vier Zuschriften eingetroffen: Branko Grünbaum (Seattle, USA), Hans Irminger (Wetzikon, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Georg Unger (Dornach, CH). Für den Fall konvexer Vierecke zeigen *Hans Irminger* und *Joachim Klose* mit umfangreichen Winkelüberlegungen und Fallunterscheidungen, dass die gesuchten Vierecke Trapeze sein müssen mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass sich die beiden Verbindungslinien gegenüberliegender Seitenmitten unter einem Winkel von 45° schneiden (*Hans Irminger*) oder gleichbedeutend, dass $|\cot(\alpha_i)+\cot(\alpha_{i+2})|=2$, wobei $\alpha_i$ und $\alpha_{i+2}$ zwei gegenüberliegende Trapezwinkel sind (*Joachim Klose*).

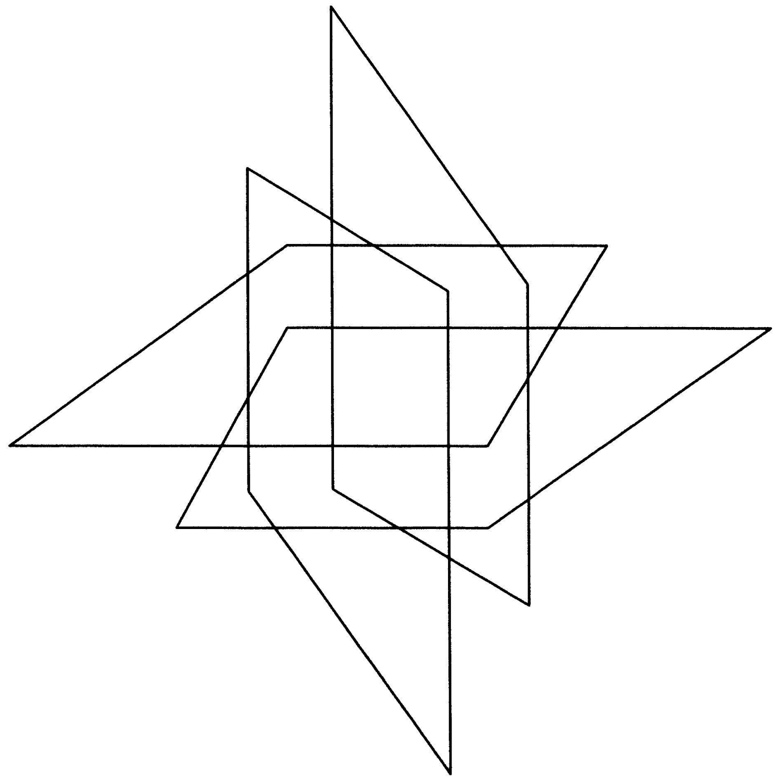

Fig. 1

Die Figur 1 zeigt ein solches Beispiel, wobei der Prozess des Mittelsenkrechtenbildens iteriert worden ist. Nach vier Schritten kommen wir zum Ausgangsviereck zurück. *Branko Grünbaum* weist darauf hin, dass der Prozess des Mittelsenkrechtenbildens bei einem beliebigen Viereck nach zwei Schritten zu einem Viereck führt, welches zum Ausgangsviereck ähnlich ist [1,2]. Die Formulierung von *Hans Irminger* gilt auch für "überschlagene" Trapeze mit zwei sich kreuzenden Schrägseiten, während die Formulierung von *Joachim Klose* in $|\cot(\alpha_i)+\cot(\alpha_{i+1})|=2$ mit zwei an einer Parallelseite benachbarten Winkeln $\alpha_i$ und $\alpha_{i+1}$ abgeändert werden muss.

Für den Fall nichtkonvexer, aber nicht überschlagener Vierecke gibt *Georg Unger* folgende zweiparametrige Schar von Lösungen an: Das zentralsymmetrische Bild $A'B'C'$ eines Dreieckes $ABC$ (mit dem Höhenschnittpunkt $H$) bezüglich des Mittelpunktes $F$ seines *Feuerbachschen Kreises* gibt Anlass zu den drei Vierecken $ABHC$, $BCHA$ und $CAHB$ mit der Eigenschaft, dass die Mittelsenkrechten der Seiten zu ihnen kongruente Vierecke bilden (Fig. 2).

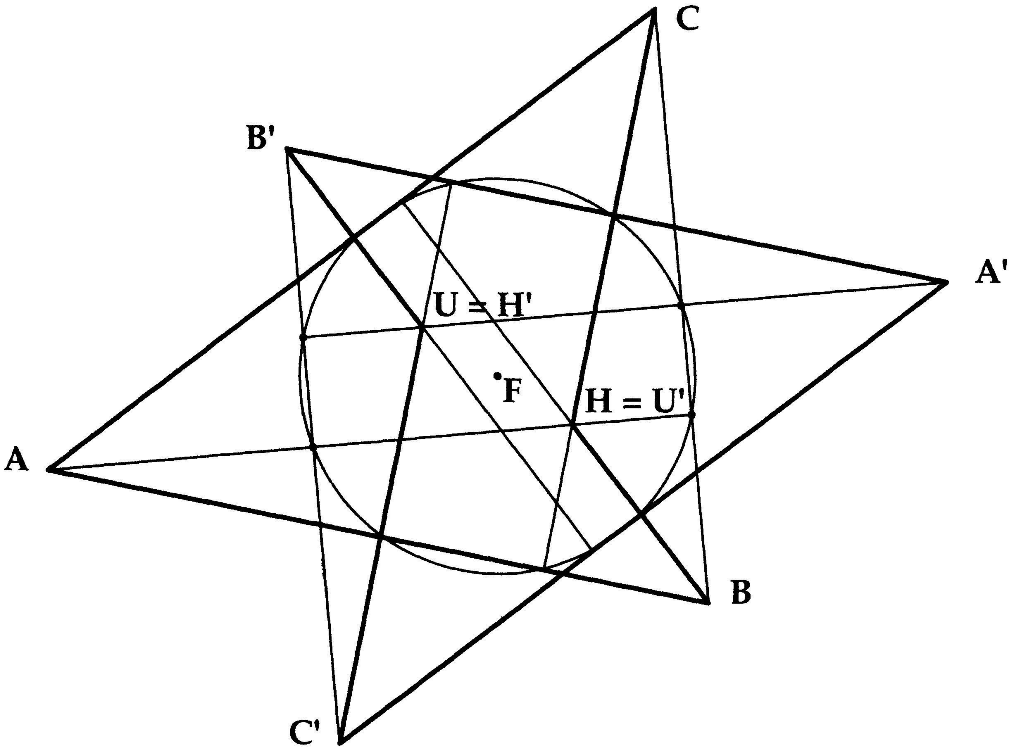


Fig. 2

Bei der genannten Abbildung werden nämlich Umkreismittelpunkt $U$ und Höhenschnittpunkt $H$ von Dreieck und Bild vertauscht. Dadurch sind die Seiten des einen Dreiecks die Mittelsenkrechten der Abschnitte zwischen Höhenschnittpunkt und Ecken des anderen.

[1] Grünbaum, Branko: *Quadrangles, Pentagons, and Computers.* Geombinatorics 3(1993), 4–9.

[2] Grünbaum, Branko: *Quadrangles, Pentagons, and Computers, Revisited.* Geombinatorics 4(1994), 11–16.

**Aufgabe 1094.** Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\left(\frac{\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}}{2}\right)^4} < e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\left(\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}}{2}\right)^3}$$

(Mit $e$ wird wie üblich die Eulersche Zahl bezeichnet.)

R. Bil, Kiel, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 13 Lösungen eingetroffen: Erhard Braune (Linz, A), Peter Bundschuh (Köln, D), H.-J. Fischer (Chemnitz, D), Friedhelm Götze (Jena, D), F. Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Kappus (Rodersdorf, CH), André Kiener (Oberdorf, CH), Kee-Wai Lau (Hong Kong), H.-J. Seiffert (Berlin, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Paul Streckeisen (Zürich, CH), Michael Vowe (Therwil, CH). Die meisten Lösungen arbeiten mit Funktionsdiskussionen, wie zum Beispiel die folgende Lösung (nach *F. Grupp*, *Hans Kappus* und *Kee-Wai Lau*): Für $1 < x < 2^{\frac{1}{4}}$ sei

$$f(x) = 4(x-1)(x^2+1)(x+1)^{-3} - \ln(x) = \frac{4(x^4-1)}{(x+1)^4} - \ln(x).$$

Dann ist $f'(x) = (x-1)^2(-1+10x-x^2)x^{-1}(x+1)^{-4} > 0$. Wegen

$$\lim_{x \downarrow 1} f(x) = 0$$

ist $f(x) > 0$. Daraus folgt $x^{\frac{1}{4}(x+1)^4/(x^4-1)} < e$, und durch die Substitution

$$x = (1+n^{-1})^{\frac{1}{4}}$$

ergibt sich die erste Ungleichung. Analog kann die zweite Ungleichung bewiesen werden. Numerische Untersuchungen mit Reihenentwicklungen zeigen, dass die erste Ungleichung ohne Interesse ist, die zweite Ungleichung hingegen mit ihrer "précision diabolique"(*François Sigrist*) nicht verschärft werden kann. *F. Grupp* und *Walther Janous* geben konkrete Verschärfungen an. *Walther Janous* zeigt unter Verwendung von DERIVE: Die bestmöglichen Zahlen $q$ und $p$, so dass die Ungleichungskette

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\left(\frac{n^{\frac{1}{q}}+(n+1)^{\frac{1}{q}}}{2}\right)^q} < e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\left(\frac{n^{\frac{1}{p}}+(n+1)^{\frac{1}{p}}}{2}\right)^p}$$

gilt, sind $p = 3$ und $q = 3{,}00531\ldots$, wobei $q$ die Lösung der Gleichung

$$\frac{2^t}{(1+2^{\frac{1}{t}})^t} = \ln(2)$$

ist.

**Aufgabe 1095 (Die einfache dritte Aufgabe).** Wie lässt sich die gewichtete arithmetisch-geometrische Ungleichung

$$x^p y^{1-p} < px + (1-p)y\,, \quad 0 < p < 1,\ x > 0,\ y > 0,\ x \neq y$$

zum Beweis der Ungleichung

$$a + b < \left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}}, \quad a > 0,\ b > 0,\ a \neq b \tag{1}$$

heranziehen? (Vgl. Hinweise zu den Aufgaben Nr. 987 und Nr. 1081 in Heft 1, 1995)

H.-J. Seiffert, Berlin, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Die 4 eingesandten Lösungen von Šefket Arslanagić (Berlin, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Walther Janous (Innsbruck, A) und Michael Vowe (Therwil, CH) zeigen im Prinzip zwei verschiedene Lösungsansätze: *Friedhelm Götze* und *Michael Vowe* beschreiten den gleichen algebraischen Weg wie *Walther Janous*, dessen Version wir hier abdrucken. *Šefket Arslanagić* dividiert (1) durch $b$, setzt $a = bt$ und zeigt dann für $t > 1$ mit analytischen Mitteln, dass die entstehende Funktion

$$f(t) = t + 1 - t^{\frac{t}{t-1}}$$

stets negativ ist.

*Lösung.* Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a > b$ annehmen. Dann lässt sich die behauptete Ungleichung folgendermassen umformen:

$$a+b < \left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}} \Leftrightarrow (a+b)^{a-b} < \frac{a^a}{b^b} \Leftrightarrow (a+b)^{a-b}b^b < a^a \Leftrightarrow (a+b)^{1-\frac{b}{a}}b^{\frac{b}{a}} < a \quad ,$$

wobei $1-\frac{b}{a} > 0$, $\frac{b}{a} > 0$ und $(1-\frac{b}{a})+\frac{b}{a} = 1$. Dank der oben vorausgesetzten gewichteten arithmetisch-geometrischen Ungleichung ergibt sich mit $x = a+b$, $y = b$ und $1-p = \frac{b}{a}$

$$(a+b)^{1-\frac{b}{a}}b^{\frac{b}{a}} < (1-\frac{b}{a}) \cdot (a+b) + \frac{b}{a} \cdot b \quad .$$

Die rechte Seite hat aber gerade den Wert $a$, womit alles bewiesen ist.

*Walther Janous* fügt noch eine weitere Abschätzung an und schreibt:

*Weiterführende Überlegungen.* Oben ist die Ungleichung $a+b-\left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}} < 0$ bewiesen worden. Es liegt also nahe, auch einen einfachen Term anzugeben, der den Ausdruck der linken Seite nach unten abschätzt. Es lässt sich zeigen, dass

$$a+b-\left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}} > (2-e)\cdot a \quad \text{für} \quad a > b \quad \text{resp.} \tag{2}$$

$$a+b-\left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}} > (2-e)\cdot b \quad \text{für} \quad a < b \quad ,$$

wobei $e$ die Eulersche Zahl bedeutet. Die beiden Abschätzungen können folgendermassen in eine einzige zusammengefasst werden:

$$\left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}} < \min(a,b) + (e-1)\max(a,b) \quad .$$

Dabei kann die Konstante $e-1$ durch keine kleinere Zahl ersetzt werden.

Zum Beweis setzt *Walther Janous* wieder $a > b$ und dividiert die Ungleichung (2) durch $a$. Mit $b = at$ $(0 < t < 1)$ erhält er auf der linken Seite von (2) die bereits eingeführte Funktion $f(t)$. Er zeigt dann mit analytischen Mitteln, dass für $0 < t < 1$

$$f(t) > 2-e$$

und dass die Schranke $2-e$ nicht verbessert werden kann.