Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 51 (1996)

Artikel: Le calcul de la racine cubique selon Héron

Autor: Deslauriers, Gilles / Dubuc, Serge

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46955

El. Math. *51* (1996) 0013-6018/96/010028-07$1.50 + 0.20/0

Le calcul de la racine cubique selon Héron

Gilles Deslauriers et Serge Dubuc

Gilles Deslauriers est né en 1941 au Québec (Canada). Il a obtenu son doctorat en mathématiques en 1975 à l'Université de Montréal. Il est professeur titulaire à l'École Polytechnique de Montréal. Ses sujets d'intérêt sont les processus stochastiques, les fractales et la théorie des ondelettes.

Serge Dubuc est né à Montréal en 1939. Il a complété son doctorat en mathématiques à l'Université Cornell en 1966. Il a principalement enseigné à l'Université de Montréal. Son enseignement et sa recherche ont surtout porté sur l'analyse numérique, la géométrie fractale et l'optimisation. Un de ses loisirs est le jeu d'échecs par correspondance.

Héron d'Alexandrie [7] (pp. 176-179) a fait les calculs suivants pour obtenir une valeur approchée de la racine cubique de 100. Il se sert de 64 et de 125, deux cubes qui encadrent 100.

$$\begin{aligned} 125-100 &= 25 \\ 100-64 &= 36 \\ 5\times 36 &= 180 \\ 180+100 &= 280 \\ 180/280 &= 9/14 \\ 4+9/14 &= 4\frac{9}{14} \end{aligned}$$

Heron von Alexandria ist jedermann aus dem Geometrieunterricht bekannt, denn die Heronsche Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks trägt immer noch seinen Namen, auch wenn man heute ziemlich sicher weiss, dass sie nicht von ihm stammt, sondern schon auf Archimedes zurückgeht. Weniger verbreitet ist das Wissen darüber, dass Heron auch eine Rechenvorschrift zur approximativen Bestimmung der dritten Wurzel angegeben hat, denn mathematisch hat diese Formel nie grosse Beachtung gefunden. Umso überraschender sind die Resultate der Untersuchungen von Gilles Deslauriers und Serge Dubuc: Sie zeigen, dass Herons Rechenvorschrift die dritte Wurzel so gut approximiert, dass das daraus abgeleitete iterative Verfahren den Vergleich mit den Algorithmen nicht zu scheuen braucht, die noch in den 50er und 60er Jahren für Computerberechnungen vorgeschlagen wurden. *ust*

Ce dernier nombre est proposé comme racine cubique de 100. Et cette valeur approchée est excellente. En effet, la valeur numérique de $\sqrt[3]{100}$ est 4,6416 alors que l'approximation d'Héron est 4,6429; la concordance est bonne; l'erreur absolue est 0,0013 et l'erreur relative est aussi petite que 0,027 %.

L'interprétation de ces calculs n'est pas entièrement transparente vu certaines ambiguïtés. Mais on semble s'entendre pour dire qu'il faut procéder comme suit pour le calcul de $\sqrt[3]{N}$: on pose a = le plus grand entier dont le cube ne dépasse pas N , puis $d_1 = N - a^3$ et $d_2 = (a+1)^3 - N$, et l'approximation d'Héron est alors

$$a + \frac{(a+1)d_1}{(a+1)d_1 + ad_2} .$$

D'une manière générale, si a et b sont deux nombres dont les cubes encadrent N, $a^3 \le N \le b^3$, la valeur approchée pour $\sqrt[3]{N}$ sera

$$\phi(N;a,b) = a + \frac{bd_1}{bd_1 + ad_2}\,(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \tag{1}$$

où $d_1 = N - a^3$ et $d_2 = b^3 - N$. Nous avons mis le facteur $b - a$ en évidence, en le mettant en caractères gras, car il arrive que ce facteur soit oublié comme c'est le cas dans l'article de L'Huillier [9].

Le but de cet article est d'apprécier l'approximation d'Héron. À notre connaissance, il n'y a eu qu'une courte étude de celle-ci, par Eneström [2]. Or il y a lieu de pousser beaucoup plus loin l'analyse de la formule d'Héron. Nous verrons que la précision de l'approximation d'Héron est d'ordre trois, d'ordre cubique. Nous verrons aussi que les meilleurs algorithmes que l'on a utilisés dans les années 60 pour le calcul de la racine cubique à l'aide d'ordinateurs avaient aussi une précision cubique et nous ferons le lien entre ceux-ci et l'approximation d'Héron. Nous indiquerons enfin une amélioration du calcul d'Héron: il est possible d'effectuer un calcul qui a une précision d'ordre 4 en se servant d'interpolation d'Hermite.

1 Propriétés de l'approximation d'Héron

Nous entreprenons l'analyse de la formule d'Héron $\phi(N;a,b)$ pour le calcul de la racine cubique d'un nombre N compris entre a^3 et b^3. Il y a plusieurs autres façons d'exprimer la formule d'Héron. Par exemple, $\phi(N;a,b)$ est la combinaison convexe de a et de b

$$\phi(N;a,b) = \frac{ad_2}{bd_1 + ad_2}a + \frac{bd_1}{bd_1 + ad_2}b \tag{2}$$

où $d_1 = N - a^3$ et $d_2 = b^3 - N$.

Ou encore

$$\phi(N;a,b) = \frac{a^2b^2 + (a+b)N}{ab(a+b) + N} = a + b - \frac{a^3b + a^2b^2 + ab^3}{N + a^2b + ab^2} . \tag{3}$$

La question que nous envisageons est de majorer le plus simplement possible l'erreur relative dans le calcul de $\sqrt[3]{N}$ par l'approximation d'Héron.

Théorème 1. *Si $0 < a^3 \leq N \leq b^3$, alors l'erreur relative dans le calcul de $\sqrt[3]{N}$ par l'approximation d'Héron $\phi(N; a, b)$ ne dépasse pas*

$$\frac{1+\sqrt{b/a}}{a(a^2+ab+b^2)}(\sqrt[3]{N}-a)(b-\sqrt[3]{N})\left|\sqrt[3]{N}-\sqrt{ab}\right| .$$

Démonstration. L'erreur relative E dans le calcul de $\sqrt[3]{N}$ par l'approximation d'Héron $\phi(N; a, b)$ est

$$E = \frac{\left|\phi(N;a,b)-\sqrt[3]{N}\right|}{\sqrt[3]{N}} = \left|\phi(N;a,b)/\sqrt[3]{N}-1\right| .$$

Posons $x = \sqrt[3]{N}$. D'après la formule (3) et après factorisation

$$E = \frac{(x-a)(b-x)\left|x-\sqrt{ab}\right|(x+\sqrt{ab})}{x(x^3+a^2b+ab^2)} .$$

La fonction

$$x \longrightarrow \frac{x+\sqrt{ab}}{x(x^3+a^2b+ab^2)}$$

est décroissante et est donc majorée par

$$\frac{a+\sqrt{ab}}{a^2(a^2+ab+b^2)} .$$

D'où la conclusion du théorème.

Lemme 2. $\forall x \in [a, b], \left|(x-a)(x-b)(x-\sqrt{ab})\right| < (4/27)(b-a)^3$.

Démonstration. Les valeurs extrêmes de la fonction $x \longrightarrow (x-a)(x-b)(x-\sqrt{ab})$ sur $[a, b]$ sont encadrées par les valeurs extrêmes de la fonction de deux variables $(x, y) \longrightarrow (x-a)(x-b)(x-y)$ sur le rectangle $[a, b]^2$. En optimisant la fonction $(x-a)(x-b)(x-y)$ par rapport à y, puis par rapport à x, on trouve que les valeurs extrêmes de celle-ci sont $\pm\frac{4}{27}(b-a)^3$. D'où la conclusion.

Théorème 3. *Si $0 < a^3 \leq N \leq b^3$, alors l'erreur relative dans le calcul de $\sqrt[3]{N}$ par l'approximation d'Héron $\phi(N; a, b)$ ne dépasse pas*

$$\frac{4}{27}\frac{1+\sqrt{b/a}}{a(a^2+ab+b^2)}(b-a)^3 .$$

Démonstration. Il suffit de faire le lien entre le théorème 1 et le lemme 2.

Illustrons les théorèmes 1 et 3 selon le problème d'Héron. Nous considérons que $N = 100$, $a = 4$ et $b = 5$. La borne fournie par le théorème 1 vaut donc 0,00034. Elle est assez proche de la valeur $|\phi(100; 4, 5)/\sqrt[3]{100} - 1| = 0,00027$. Cette borne demande cependant la connaissance de $\sqrt[3]{100}$. La borne fournie par le théorème 3 vaut 0,00129. Évidemment elle n'est pas aussi petite que la première borne, cependant elle donne une majoration uniforme de $|\phi(N; 4, 5)/\sqrt[3]{N} - 1|$ pour tout N compris entre 64 et 125 et ne demande pas de connaissance de racine cubique.

Remarque. Le théorème 3 montre que la formule d'Héron pour le calcul de la racine cubique d'un nombre N est précise jusqu'à l'ordre 3, c'est-à-dire que $\phi(N; a, b) - \sqrt[3]{N}$ est de l'ordre de $(b-a)^3$ lorsque $(b-a) \to 0$.

2 Autres calculs de la racine cubique

Nous rappelons comment les informaticiens des années 50 ou 60 traitaient le calcul de la racine cubique d'un nombre réel positif N à l'aide d'ordinateurs.

Le premier algorithme consiste à résoudre l'équation $x^3 = N$ à l'aide de la méthode de Newton. On fera donc le calcul de $\sqrt[3]{N}$ par itération:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - N}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + N}{3x_n^2} .$$

Vu la convexité de la fonction x^3, le processus itératif est toujours convergent pour tout point de départ $x_0 > 0$; la convergence des itérées est quadratique. L'étude détaillée de cet algorithme en tenant compte des erreurs d'arrondies a été entreprise par Yohe [10].

Le second algorithme se sert aussi de la méthode de Newton appliquée cependant à l'équation $x^2 - N/x = 0$. On obtient alors la récurrence

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 2Nx_n}{2x_n^3 + N} .$$

Ce qui est remarquable de cette récurrence est qu'elle produit une suite à convergence cubique. On retrouve l'analyse de ce schéma itératif dans le volume de Fike [3] ou si l'on préfère une source plus ancienne dans l'article de Kogbetlianz [8].

On peut trouver d'autres méthodes de calcul approché de racine cubique, par exemple dans un article de Gower [5] ou une communication de Fraser-Hart [4]. Ces méthodes sont soit plus complexes, soit moins précises.

Maintenant nous illustrons les deux algorithmes avec le problème d'Héron. Si l'on choisit le nombre 5 comme approximation de départ pour $\sqrt[3]{100}$, les deux suites obtenues sont les suivantes

Premier algorithme		Second algorithme	
n	x_n	n	x_n
0	$5,000000000$	0	$5,000000000$
1	$4,666666667$	1	$4,642857143$
2	$4,641723356$	2	$4,641588834$
3	$4,641588838$	3	idem
4	$4,641588834$	4	idem

Pour atteindre 10 chiffres significatifs, il faut 4 étapes pour le premier algorithme et 2 pour le second. Ce que nous remarquons maintenant est que le second algorithme est un cas particulier de l'approximation d'Héron. En effet supposons que x_n est une approximation de $\sqrt[3]{N}$, alors il est très facile de voir que x_n et N/x_n^2 sont deux valeurs qui encadrent la racine. On peut donc se servir de ces deux nombres comme des valeurs a et b dans la formule d'Héron. Après calcul, on vérifie que $\phi(N; x_n, N/x_n^2)$ est précisément égal à

$$\frac{x_n^4 + 2Nx_n}{2x_n^3 + N} \, .$$

3 Amélioration de l'approximation d'Héron

Nous ignorons comment Héron a imaginé sa formule, cependant nous allons porter un regard moderne à son problème. Considérons toujours le problème du calcul de la racine cubique d'un nombre x compris entre a^3 et b^3. Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, nous proposons de calculer f par le polynôme cubique $P(x)$ solution du problème d'Hermite [6]:

$$\begin{array}{ll} P(a^3) = f(a^3) = a & P'(a^3) = f'(a^3) = 1/(3a^2) \\ P(b^3) = f(b^3) = b & P'(b^3) = f'(b^3) = 1/(3b^2) \end{array}$$

Il est facile de vérifier que ce polynôme P peut se calculer de la manière suivante:

$$P(x) = \frac{bd_1 + ad_2}{b^3 - a^3} + \frac{d_1 d_2}{(b^3 - a^3)^2}(c_2 d_1 + c_1 d_2)$$

où $d_1 = x - a^3$ et $d_2 = b^3 - x$ et où

$$c_1 = \frac{1}{3a^2} - \frac{b-a}{b^3 - a^3}, \quad c_2 = \frac{b-a}{b^3 - a^3} - \frac{1}{3b^2} \, .$$

Théorème 4. *Si* $0 < a^3 \le N \le b^3$, *alors*

$$0 < P(N) - \sqrt[3]{N} < \frac{5a(b^3/a^3 - 1)^4}{1944} \, .$$

Démonstration. D'après la formule du reste pour l'interpolation d'Hermite (cf. Crouzeix-Mignot [1] par exemple), on a que pour tout x de (a^3, b^3)

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x - a^3)^2 (x - b^3)^2$$

où $\xi \in (a^3, b^3)$.

Or la quatrième dérivée de f, $f^{(4)}(\xi)$, vaut $-80/(81\xi^{11/3})$. On remarque ensuite que $f^{(4)}(\xi)$ est toujours négative et que sa valeur minimale est $-80/(81a^{11})$. Le maximum de $(x - a^3)^2(x - b^3)^2$ vaut $(b^3 - a^3)^4/16$. Si ces inégalités sont portées dans la formule du reste, on obtient la conclusion désirée.

Corollaire 5. *Le calcul de la racine cubique par le polynôme d'Hermite P a une précision d'ordre 4.*

En effet, d'après le théorème précédent, le calcul de $\sqrt[3]{N}$ par $P(N)$ donne une erreur relative qui est $O((b-a)^4)$ lorsque $b-a$ tend vers 0.

Reprenons les données d'Héron. Si $a = 4$, $b = 5$, $N = 100$, alors $P(100) = 4,64366$ alors que la valeur d'Héron, 4,64286, approche mieux $\sqrt[3]{100} = 4,641588834$. Ceci semble contredire les espoirs entretenus par le théorème 4. Cependant si l'on choisit $a = 4,6$ et $b = 4,7$, l'approximation d'Héron est dans ce cas 4,6415882 alors que celle qui provient du polynôme d'Hermite est 4,6415890, ce qui est plus proche de $\sqrt[3]{100}$.

Remarques.

- Il est possible de créer une suite x_n d'approximations de la racine cubique de N dont la convergence est d'ordre 4. Si x_n est la $n$ème approximation, il suffit de poser x_{n+1} comme l'approximation obtenue par le polynôme d'Hermite avec $a = x_n$ et $b = N/x_n^2$.
- L'approche que nous avons exposée dans cette section pourrait s'adapter aisément au calcul de la racine $n$ème d'un nombre donné.

4 Conclusion

Van der Waerden dans son volume *Science Awakening* [11] consacre une section à Héron d'Alexandrie. L'opinion qu'il a de lui est sévère. Il affirme que *Les métriques* d'Héron forment un petit livre très enfantin. Ceci nous apparaît excessif. Le calcul proposé par Héron pour approcher la valeur d'une racine cubique est d'une excellente qualité et ne se retrouve nulle part ailleurs dans l'histoire des mathématiques. Le hasard ne peut pas expliquer l'origine de cette formule d'Héron; nous devons admettre que nous ignorons la source qui a inspiré ce mathématicien, ce calculateur du premier siècle après Jésus-Christ.

Références

[1] Crouzeix, M. et A.L. et Mignot, A. L. *Analyse numérique des équations différentielles.* Masson, Paris, 1984.

[2] Eneström, G. Une note dans M. Cantor, Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Bibliotheca Mathematica, 3ème série, volume 8. Leipzig (1907–8), pp. 412–413.

[3] Fike, C. T. *Computer Evaluation of Mathematical Functions.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1968.

[4] Fraser W. & Hart, J. F. Minimax approximations for square root and cube root routines. In *Proceedings of the Third Conference of the Computing and Data Processing Society of Canada*, June 11–12, 1962, pp.158–167. University of Toronto Press.

[5] Gower, J. C. A note on an iterative method for root extraction. The Computer J. 1 (1958) 142–143.

[6] Hermite, C. Formule d'interpolation de Lagrange. In *Oeuvres*, III, pp. 432–443. Gauthier-Villars, Paris, 1912.

[7] Héron d'Alexandrie, Les métriques. In *Opera Omnia*, volume 3, B. G. Teubner, Leipzig, 1903, (texte grec et traduction allemande par H. Schöne).

[8] Kogbetliantz, E. G. Computation of Sin N, Cos N and $\sqrt[m]{N}$ using an electronic computer. IBM J. Res. and Devel. 3 (1959) 147–152.

[9] L'Huillier, H. Concerning the method employed by Nicolas Chuquet for the extraction of cube roots. In C. Hay (Ed.), *Mathematics from Manuscript to Print 1300–1600*, pp. 89–95, Clarendon Press, Oxford, 1988.

[10] Yohe, J. M. Interval bounds for square roots and cube roots. Computing 11 (1973) 51–57.

[11] Van der Waerden, B. L. *Science Awakening*. P. Noordhoff, Groningen, 1954.

Gilles Deslauriers
Département de mathématiques appliquées
École Polytechnique
C. P. 6079, succ. Centre-ville
Montréal, Québec
H3C 3A7 Canada

Serge Dubuc
Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, succ. Centre-ville
Montréal, Québec
H3C 3J7 Canada