

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 51 (1996)

**Artikel:** Die Wärmeleitung auf dem Kreis und Thetafunktionen  
**Autor:** Lang, Serge  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46954>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

# Die Wärmeleitung auf dem Kreis und Thetafunktionen

---

Serge Lang

Serge Lang wurde 1927 in Paris geboren, wo er auch seine ersten Schuljahre absolvierte. Die weitere Ausbildung erhielt er dann allerdings in den Vereinigten Staaten, wo er das California Institute of Technology (Caltech) und die University of Princeton besuchte. Hier erhielt er das Doktorat in Mathematik im Jahre 1951. Nach Aufenthalten am Institute for Advanced Study in Princeton und an der University of Chicago war er von 1955 bis 1970 Professor an der Columbia University in New York. Gastprofessuren in Princeton und Harvard folgten, und 1972 wurde er Professor an der Yale University. Seine Interessen sind weitgespannt, aber sein Hauptinteresse gehörte immer der Mathematik, besonders der Zahlentheorie. Bis anhin hat er 34 Bücher und über 70 Forschungsartikel veröffentlicht.

## 1 Die Wärmeleitung auf dem Kreis

Der erste Teil dieses Beitrages schliesst an den früheren, in dieser Zeitschrift erschienenen Artikel “Approximationssätze der Analysis” (siehe [L94]) an. Er behandelt mit den dort eingeführten Methoden einen wichtigen Spezialfall, der einige neue Elemente aufweist, die auch in anderen Situationen typisch sind.

In [L94] haben wir die Wärmeleitungsgleichung auf der reellen Geraden  $\mathbf{R}$  mit Hilfe einer Diracfamilie gelöst, nämlich des sogenannten Wärmeleitungskerns  $K^R$ , den wir

Ein besonders einfaches und zugleich instruktives Beispiel zu partiellen Differentialgleichungen und Fourierreihen ist die *Wärmeleitung auf der Kreislinie*. Ein wichtiges Gebiet der Funktionentheorie ist die Theorie der doppelt periodischen Funktionen, der *elliptischen Funktionen* und der *Thetafunktionen*. Ein zentrales Gebiet der analytischen Zahlentheorie ist die *Riemannsche Zetafunktion*. In seinem Beitrag gelingt es Serge Lang, eine Verbindung zwischen diesen so unterschiedlich scheinenden Dingen herzustellen: Wird hier ein Stück des Netzwerkes von Ideen sichtbar, das die Mathematik “im Innersten zusammenhält”? — Der Beitrag basiert auf einem Vortrag, den Serge Lang am 25. Mai 1994 an der ETH Zürich vor einem Publikum von Mathematikstudenten und -studentinnen gehalten hat. Der Text wurde anschliessend ins Deutsche übersetzt und von Serge Lang mehrmals überarbeitet. *ust*

jetzt in der Form

$$K^R(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

schreiben. Hier wollen wir uns mit dem Wärmeleitungsproblem auf der Kreislinie beschäftigen. Zu diesem Zweck suchen wir ein dem Wärmeleitungskern  $K^R$  entsprechendes Objekt für Funktionen auf dem Kreis oder, anders ausgedrückt, für periodische Funktionen der Periode  $2\pi$ . Wir stehen damit vor der Aufgabe, eine Diracfamilie  $\{K_t\}$  von  $2\pi$ -periodischen Funktionen zu finden, also eine Familie von Funktionen

$$K(t, x) = K_t(x) \quad \text{mit} \quad K(t, x + 2\pi) = K(t, x) ,$$

welche die drei nachfolgenden Bedingungen **DIR 1**, **DIR 2**, **DIR 3** erfüllen und zugleich Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind.

**DIR 1.**  $K_t \geq 0$ . (In unserem Fall wird für alle  $x$  sogar  $K_t(x) > 0$  gelten.)

**DIR 2.**  $\int_0^{2\pi} K_t(x) dx = 1$ .

**DIR 3.** Zu  $\epsilon, \delta > 0$  ( $\epsilon, \delta < 1$ ) existiert ein  $t_0$  mit  $0 < t_0 < 1$ , so dass für  $0 < t < t_0$  gilt

$$\int_{-\pi}^{-\delta} K_t(x) dx + \int_{\delta}^{\pi} K_t(x) dx < \epsilon .$$

Der Wärmeleitungsoperator lautet

$$\mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} - \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 ,$$

so dass also

$$\mathbf{H}K = 0$$

gelten soll.

Es liegt nahe zu versuchen, die Funktionen  $K_t$  dadurch zu konstruieren, dass man die entsprechenden Funktionen für die reelle Gerade “mittelt”. Wir definieren deshalb,  $t > 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$K(t, x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x+2\pi n)^2/4t} .$$

Die (absolute) Konvergenz dieser Reihe von positiven Gliedern ergibt sich aus der exponentiellen Abnahme der Beträge der Glieder mit wachsendem  $|n|$ . Für die so definierte  $2\pi$ -periodische Funktion  $K$  gilt nun:

**Satz 1.** Die Funktion  $K$  definiert eine Diracfamilie und erfüllt zusätzlich die Wärmeleitungsgleichung  $HK = 0$ .

Die Bedingung **DIR 1** ist nach der obigen Bemerkung trivialerweise erfüllt. Als nächstes weisen wir nach, dass  $K$  die Wärmeleitungsgleichung erfüllt. Die Ableitungen von  $K$  erhalten wir, indem wir die Reihe gliedweise ableiten, denn die gliedweise abgeleitete Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem beschränkten Gebiet von  $x$  und in jedem beschränkten Intervall von  $t$ . Ist nun  $f$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so ist für jede reelle Zahl  $c$  die Funktion  $g$ , definiert durch

$$g(t, x) = f(t, x + c) ,$$

ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Demzufolge erfüllt jeder Term unserer Reihe die Wärmeleitungsgleichung, und damit auch die Summe.

Es bleibt nachzuweisen, dass die Bedingungen **DIR 2** und **DIR 3** erfüllt sind. Auch dies folgt direkt aus der Reihendarstellung von  $K$ .

Für **DIR 2** haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} K(t, x) \, dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-(x+2\pi n)^2/4t} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-(x+2\pi n)^2/4t} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} e^{-y^2/4t} \, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/4t} \, dy \\ &= 1 , \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt **DIR 2** für den Wärmeleitungskern  $K^R$  benutzt haben. Damit ist für unsere Familie **DIR 2** nachgewiesen.

Auch zum Nachweis von **DIR 3** benutzen wir die gleiche Idee. Um zu zeigen, dass der Wert des über das Intervall  $[\delta, \pi]$  erstreckten Integrals klein ist, wenn nur  $t$  genügend klein ist, gehen wir wie folgt vor. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(x+2\pi n)^2/4t} \, dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\delta+2\pi n}^{2\pi(n+1)} e^{-y^2/4t} \, dy \\ &\leq \int_{\delta}^{\infty} K^R(t, y) \, dy . \end{aligned}$$

Nach **DIR 3** für den Wärmeleitungskern  $K^R$  wissen wir, dass  $t_0$  existiert mit  $0 < t_0 < 1$ , so dass dieser letzte Ausdruck für  $0 < t \leq t_0$  kleiner als  $\epsilon$  ist. Ein analoges Argument lässt sich auf das Intervall  $[-\pi, -\delta]$  anwenden. Damit ist auch **DIR 3** nachgewiesen.

Wir haben damit, wie es unsere Aufgabe war, eine aus  $2\pi$ -periodischen Funktionen bestehende Diracfamilie gefunden, welche das Wärmeleitungsproblem auf dem Kreis löst.

## 2 Thetafunktionen

Jedermann kennt die periodischen Funktionen  $\sin$  und  $\cos$ , die mit der Geometrie des Kreises eng verbunden sind. Die Differentialrechnung sagt, dass sie einer Differentialgleichung

$$y' = 1 - y^2 \quad (1)$$

genügen. Im Laufe des 18. und 19. Jahrhunderts hat man sich die Frage nach Funktionen  $f$  gestellt, welche einer Differentialgleichung

$$f'^2 = f^3 + Af + B \quad (2)$$

genügen. Dabei sind  $A$  und  $B$  Konstanten. In der Differentialgleichung (1) der Sinus- und Cosinusfunktion ist die rechte Seite ein (einfaches) quadratisches Polynom, in der Gleichung (2) ein Polynom dritten Grades. Und zwar ist trotz der speziellen Form des Polynoms der allgemeine Fall abgedeckt, denn in einem Polynom dritten Grades kann der quadratische Term immer durch eine einfache lineare Transformation zum Verschwinden gebracht werden. Man war auf die Differentialgleichung (2) bei der Beschäftigung mit elliptischen Integralen gestossen. Die Lösungen nannte man aus diesem Grunde *elliptische Funktionen*. Aufgefasst als Funktionen einer komplexen Variablen sind sie doppelt periodisch, d.h. es gibt komplexe Zahlen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , linear unabhängig über  $\mathbf{R}$ , mit

$$f(z + \omega_1) = f(z) = f(z + \omega_2).$$

Im Laufe der intensiven Beschäftigung mit doppelt periodischen Funktionen, wie zum Beispiel den elliptischen Funktionen hat man die Wichtigkeit der Thetafunktionen entdeckt: Sie liefern einen generischen Prozess zur Konstruktion doppelt periodischer Funktionen. Es ist zweifellos eine ganz bemerkenswerte Tatsache, dass dieser Prozess gleichzeitig zu einer Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf dem Kreis führt. Auf die Thetafunktionen wollen wir in diesem Abschnitt näher eingehen, wobei wir uns auf den wichtigsten und typischsten Spezialfall beschränken. Wir definieren die *Riemannsche Thetafunktion* wie folgt:

$$\theta_1(\tau, z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{\pi i n^2 \tau} \cdot e^{2\pi i n z}.$$

Dabei sind  $\tau$  und  $z$  komplexe Zahlen, und für den Imaginärteil  $t = \operatorname{Im} \tau$  gelte  $t > 0$ . Diese letztere Bedingung impliziert, dass mit zunehmendem  $|n|$  der absolute Betrag der Glieder der Reihe exponentiell abnimmt. Daraus folgt die absolute und für  $t \geq \delta > 0$  gleichmässige Konvergenz der Reihe.

Die Riemannsche Thetafunktion  $\theta_1$  besitzt einfache Periodizitätseigenschaften, auf die wir als erstes eingehen. Es gilt

**PER 1** 
$$\theta_1(\tau, z + 1) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{\pi i n^2 \tau} \cdot e^{2\pi i n(z+1)} = \theta_1(\tau, z),$$

letzteres wegen  $e^{2\pi in} = 1$  für  $n \in \mathbf{Z}$ . Ferner erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathbf{PER 2} \quad \theta_1(\tau, z + \tau) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{\pi in^2 \tau} \cdot e^{2\pi inz} \cdot e^{2\pi in\tau} \\
 &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{\pi i(n^2 + 2n + 1)\tau} \cdot e^{-\pi i\tau} \cdot e^{2\pi inz} \\
 &= e^{-\pi i(\tau + 2z)} \cdot \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{\pi i(n+1)^2 \tau} \cdot e^{2\pi i(n+1)z} \\
 &= e^{-\pi i(\tau + 2z)} \cdot \theta_1(\tau, z) .
 \end{aligned}$$

Der Zusammenhang mit doppelt periodischen Funktionen ist aus dem folgenden Ergebnis ersichtlich, wobei wir der Einfachheit halber nur einen Spezialfall eines allgemeineren Satzes aufführen. Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_k$  und  $b_1, b_2, \dots, b_k$  komplexe Zahlen mit der Eigenschaft

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k.$$

Dann ist

$$f(z) = \frac{\prod_j \theta_1(\tau, z - a_j)}{\prod_j \theta_1(\tau, z - b_j)}$$

eine doppelt periodische Funktion mit Perioden 1 und  $\tau$ . Dies folgt unmittelbar aus **PER 2**.

Man kann beweisen, dass sich *alle* doppelt periodischen Funktionen mit Hilfe der Thetafunktionen beschreiben lassen, und zwar durch ein Verfahren, das nur um wenig allgemeiner ist als das eben angegebene.

### 3 Zusammenhang mit der Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten hier, wie bereits in [L94] und §1, die Wärmeleitungsgleichung

$$\mathbf{H}f(t, x) = 0 .$$

Dabei bezeichnet

$$\mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} - \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2$$

den eindimensionalen Wärmeleitungsoperator. Wir setzen nun

$$\theta(t, x) = \theta_1 \left( \frac{it}{\pi}, \frac{x}{2\pi} \right) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-n^2 t} \cdot e^{inx} ,$$

wobei  $t$  und  $x$  als *reelle* Variablen aufzufassen sind. Dann folgt

$$\mathbf{H}\theta(t, x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-n^2 - (in)^2) e^{-n^2 t} \cdot e^{inx} = 0 .$$

Die Funktion  $\theta$ , welche als Spezialfall der Riemannschen Thetafunktion definiert wurde, ist also eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Es ist klar, dass  $\theta$  in  $x$   $2\pi$ -periodisch ist. In der physikalischen Interpretation ist deshalb  $\theta$  eine Lösung des Wärmeleitungproblems auf der Peripherie des (Einheits-)Kreises. Gerade für dieses Problem wurde in §1 mit anderen Methoden ebenfalls eine Lösung  $K$  gefunden, der sogenannte Wärmeleitungskern:

$$K(t, x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x+2\pi n)^2/4t}.$$

Wir behaupten nun

**Satz 2.** Es gilt  $K = \frac{1}{2\pi} \theta$ .

Wie beweist man, dass zwei stetige  $2\pi$ -periodische Funktionen gleich sind? Es genügt zu zeigen, dass ihre Fourier-Koeffizienten übereinstimmen. Wir werden also beweisen, dass für  $m \in \mathbf{Z}$

$$\int_0^{2\pi} K_t(x) e^{-imx} dx = e^{-m^2 t}$$

gilt, und für  $\theta_t(x) = \theta(t, x)$  werden wir zeigen, dass

$$\int_0^{2\pi} \theta_t(x) e^{-imx} dx = 2\pi e^{-m^2 t}$$

gilt. Daraus folgt  $K = \frac{1}{2\pi} \theta$ .

Wir wenden uns zuerst der Funktion  $\theta$  zu. Hier erhalten wir, da wir die Reihe gliedweise integrieren können,

$$\int_0^{2\pi} \theta_t(x) e^{-imx} dx = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-n^2 t} \cdot e^{i(n-m)x} dx = 2\pi e^{-m^2 t},$$

denn nur der Summand mit  $n = m$  liefert einen von Null verschiedenen Beitrag.

Um die Fourier-Koeffizienten der Funktion  $K_t$  zu berechnen benötigen wir das folgende Resultat der Analysis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} \cdot e^{-iuv} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} = e^{-v^2/2}. \quad (3)$$

Dieses Resultat besagt, dass die Funktion  $e^{-u^2/2}$  unter der Fourier-Transformation invariant bleibt. Es handelt sich dabei um ein grundlegendes Standardresultat der Analysis. Für einen Beweis konsultiere man z.B. [L], p. 301.

Wiederum können wir natürlich die Reihe für  $K_t$  gliedweise integrieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} K_t(x) e^{-imx} dx &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{2\pi} e^{-(x+2\pi n)^2/4t} \cdot e^{-imx} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} e^{-y^2/4t} \cdot e^{-imy} dy, \end{aligned}$$

wobei wir die Substitution  $y = x + 2\pi n$  durchgeführt und dabei  $e^{im2\pi n} = 1$  benutzt haben. Der letzte Ausdruck ist aber gleich

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/4t} \cdot e^{-imy} dy .$$

Eine weitere Substitution, nämlich  $y = \sqrt{2t} u$ ,  $dy = \sqrt{2t} du$ , liefert schliesslich zusammen mit dem erwähnten Standardresultat (3)

$$\int_0^{2\pi} K_t(x) e^{-imx} dx = e^{-m^2 t} .$$

Damit ist die Gleichheit der beiden  $2\pi$ -periodischen Funktionen  $K_t$  und  $\theta_t/2\pi$  bewiesen:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-n^2 t} \cdot e^{inx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-(x+2\pi n)^2/4t} . \quad (4)$$

Wir fügen hier die folgende Bemerkung an. Auf der linken Seite der Gleichung (4) kommt  $t$  vor, während auf der rechten Seite  $1/t$  auftritt. Dies ist der Ansatzpunkt für die berühmte *Inversionsformel von Poisson*. Setzen wir nämlich  $x = 0$ , so erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-(2\pi n)^2/4t} . \quad (5)$$

Die Inversionsformel von Poisson findet Anwendungen in vielen Gebieten der Analysis und Zahlentheorie; eine dieser Anwendungen betrifft die wichtige Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion. Darauf kommen wir im Addendum am Schlusse dieses Beitrages zurück. Die Formel (5) taucht auch im Zusammenhang mit der Spektraltheorie von Operatoren auf. Für eine Übersicht siehe [JoL94].

Wir kehren zurück zur Relation (4). Die Reihe der Thetafunktion auf der linken Seite der Gleichung enthält Terme  $e^{inx}$ ; diese oszillieren, sind also sicher nicht überall positiv. Aber die Glieder der Reihe auf der rechten Seite der Gleichung sind alle positiv, so dass auch deren Summe, die Thetafunktion, positiv ist.

Die Thetafunktion hat, ausser den schon besprochenen, weitere wichtige Eigenschaften, auf die wir jetzt noch eingehen wollen. Wir erinnern zuerst daran, dass die Faltung zweier periodischer Funktionen  $f$  und  $g$  durch die Formel

$$(f * g)(x) = \int_0^{2\pi} f(x - u) \cdot g(u) du$$

gegeben ist. Diese Faltung definiert ein Produkt, das assoziativ, kommutativ und bilinear in  $f$  und  $g$  ist, wie in [L94] nachgewiesen worden ist. Es gilt nun

**Satz 3.** Für  $t, s \in \mathbf{R}^+$  gilt die Relation

$$\theta_t * \theta_s = \theta_{t+s} .$$

Der *Beweis* ist nicht schwierig. Wir schreiben

$$\theta_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} \cdot e^{inx}$$

und

$$\theta_s(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-m^2 s} \cdot e^{imx} .$$

Im Integral, welches die Faltung darstellt, dürfen wir wegen der absoluten Konvergenz gliedweise integrieren. In der entstehenden Reihe verschwinden die Glieder, die

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx$$

mit  $n \neq m$  enthalten. Daraus ergibt sich unmittelbar die Aussage von Satz 3.

Die Faltung mit einer periodischen stetigen Funktion  $\phi$  definiert auf periodischen Funktionen  $f$  durch

$$f \mapsto \phi * f$$

einen linearen Operator. Mit  $\langle f, g \rangle$  bezeichnen wir das Skalarprodukt definiert durch

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

In der Folge nehmen wir der Einfachheit halber an, dass alle Funktionen reell sind; dies bedeutet, dass die Konjugation weggelassen werden kann.

**Satz 4.** Es sei  $\phi$  eine reelle periodische stetige Funktion. Dann gilt

$$\langle \phi * f, g \rangle = \langle f, \phi * g \rangle .$$

In der Sprache der Operatortheorie besagt die Aussage des Satzes 4, dass die Zuordnung  $f \mapsto \phi * f$  (im algebraischen Sinn) selbstadjungiert ist.

Der *Beweis* folgt mit Hilfe des Satzes von Fubini, welcher sagt, dass unter geeigneten Konvergenzbedingungen ein Doppelintegral durch iterierte Integration in beliebiger Reihenfolge berechnet werden kann. Die Einzelheiten des Beweises überlassen wir dem Leser.

Die Tatsache, dass die Thetafunktion nichtnegativ ist,  $\theta(t, x) \geq 0$ , kann nun ohne Benutzung der Gleichung (3) mit Hilfe der Sätze 3 und 4 auch wie folgt eingesehen werden. Wir beweisen dazu zuerst das folgende Lemma.

**Lemma.** Es sei  $\phi$  eine reelle periodische stetige Funktion und  $h = \phi * \phi$ . Falls für alle  $2\pi$ -periodischen stetigen (reellen) Funktionen  $f$  gilt  $\langle h * f, f \rangle \geq 0$ , so folgt  $h(x) \geq 0$  für alle  $x$ .

**Beweis.** Wir beweisen zuerst  $h(0) \geq 0$ . Wir gehen dabei indirekt vor und führen die Annahme  $h(0) < 0$  zu einem Widerspruch. Dazu wählen wir eine Funktion  $f$ , die in einer kleinen Umgebung von 0 den Wert 1 und ausserhalb einer  $\delta$ -Umgebung den Wert 0 annimmt (siehe Figur 1).

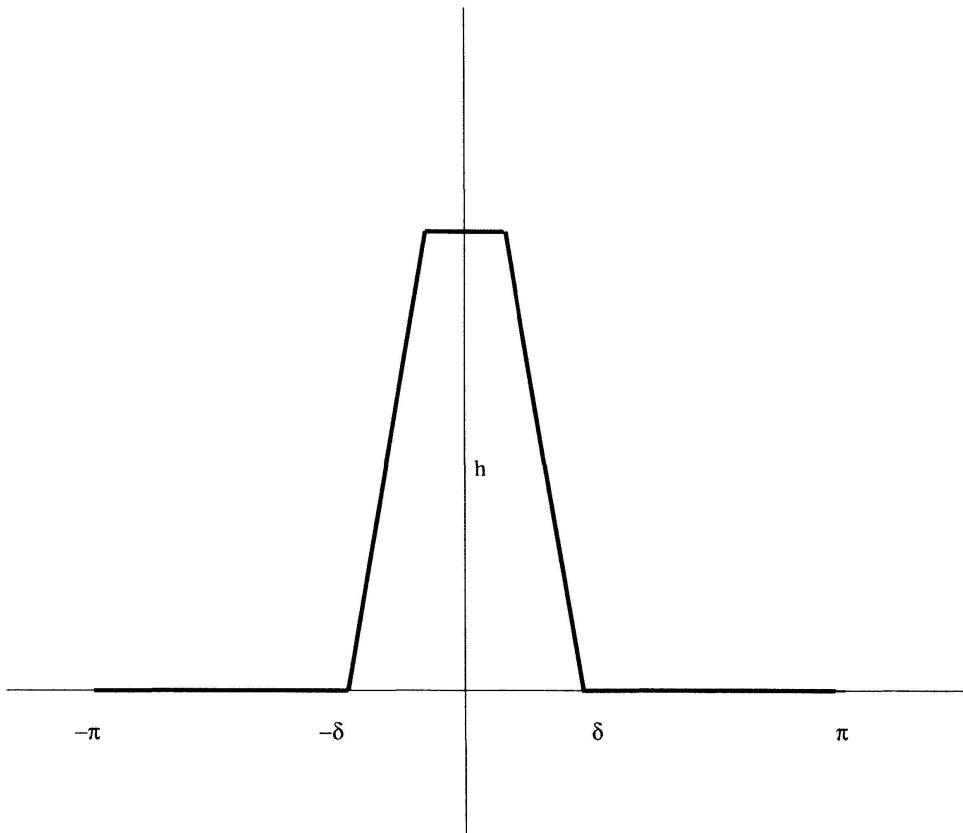


Fig. 1 Die Funktion  $f$

Wir haben

$$\langle h * f, f \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h(u) f(x-u) f(x) du dx$$

zu betrachten. Der Ausdruck unter dem Integral ist nur dann von Null verschieden, wenn sowohl  $x$  wie auch  $x - u$  im  $\delta$ -Intervall liegen, wenn also — für kleine  $\delta$ 's — sowohl  $u$  wie auch  $x$  nahe bei 0 liegen. Indem wir nun  $\delta$  klein wählen und beachten, dass unter der getroffenen Voraussetzung für  $u$  nahe bei Null  $h(u) < 0$  gilt, folgt, dass der Wert  $\langle h * f, f \rangle$  negativ ist. Dies widerspricht der Voraussetzung des Lemmas, und die Aussage  $h(0) \geq 0$  ist bewiesen.

Für den nächsten Schritt benötigen wir auch die bis anhin noch nicht benutzte Voraussetzung  $h = \phi * \phi$ . Es sei  $a \in \mathbf{R}$  und  $g = h_a$ , d.h.  $g(x) = h(x+a)$ . Um  $h(a) \geq 0$  zu zeigen genügt es  $g(0) \geq 0$  nachzuweisen. Nun gilt aber

$$h_a = (\phi * \phi)_a = \phi_{a/2} * \phi_{a/2}$$

und für alle  $f$

$$\langle h_a * f, f \rangle = \langle \phi_{a/2} * \phi_{a/2} * f, f \rangle = \|\phi_{a/2} * f\|^2 \geq 0 .$$

Folglich gilt nach dem ersten Teil des Beweises,  $h_a(0) = g(0) \geq 0$ . Damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

Mit Hilfe des Lemmas lässt sich nun ein zweiter Beweis für die Tatsache liefern, dass die Thetafunktion nichtnegativ ist. Wir haben nämlich

$$\langle \theta_t * f, f \rangle = \langle \theta_{t/2} * \theta_{t/2} * f, f \rangle = \langle \theta_{t/2} * f, \theta_{t/2} * f \rangle = \|\theta_{t/2} * f\|^2 \geq 0 ,$$

und mit dem Lemma folgt  $\theta_t \geq 0$ . Dies war zu beweisen.

Wir bemerken zum Schluss, dass dieses hier dargestellte funktionalanalytische Argument nur die Ungleichung  $\theta(t, x) \geq 0$  liefert, während sich aus dem Satz 2 die *strikte* Ungleichung  $\theta(t, x) > 0$  ergibt, da  $K$  als unendliche Summe von strikt positiven Gliedern erhalten wird.

## Addendum

Wir wollen in diesem Zusatzabschnitt noch einiges über die Anwendung der Inversionsformel von Poisson (5) auf die Riemannsche Zetafunktion sagen. Es geht dabei um die Herleitung der wichtigen Funktionalgleichung der Zetafunktion.

Wir führen als erstes die Funktion  $\psi$  durch

$$\psi(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-n^2 \pi x}$$

ein. Gemäß unseren in Abschnitt 3 getroffenen Definitionen gilt  $\psi(x) = \theta(\pi x, 0)$ . In dieser Bezeichnung entspricht die Inversionsformel von Poisson (5) der Formel

$$\psi(x^{-1}) = x^{1/2} \psi(x) .$$

Wir wenden uns jetzt der Riemannschen Zetafunktion  $\zeta$  zu. Diese ist bekanntlich definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s} ,$$

wobei die komplexe Zahl  $s$  durch  $s = \sigma + i\tau$  mit  $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$  und  $\sigma > 1$  gegeben ist. Wie man zeigen kann, konvergiert die angegebene Reihe absolut und gleichmäßig für  $\sigma \geq a > 1$ . Wir betrachten nun für  $\sigma > 1$  die Funktion

$$F(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) .$$

Dabei ist die Gammafunktion wie üblich durch

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$$

definiert. Wir benützen ausserdem die Bezeichnungen

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} = \frac{1}{2}(\psi(x) - 1) \quad (6)$$

und

$$I(s) = \int_0^{\infty} x^{s/2} g(x) \frac{dx}{x} . \quad (7)$$

Zur direkten Berechnung von  $I(s)$  setzen wir für  $g(x)$  die Reihe ein und vertauschen die Reihenfolge von Integration und Summation, was wegen der guten Konvergenz ohne weiteres möglich ist. Dies liefert

$$I(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{s/2} e^{-n^2 \pi x} \frac{dx}{x} .$$

Mit der Substitution  $n^2 \pi x = t$ ,  $n^2 \pi dx = dt$  erhalten wir weiter

$$I(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{t^{s/2}}{n^s \pi^{s/2}} e^{-t} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi^{s/2}} \int_0^{\infty} t^{s/2} e^{-t} \frac{dt}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\pi^{s/2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = F(s) .$$

Andererseits lässt sich  $I(s)$  in zwei Integrale aufspalten, nämlich

$$I(s) = \int_1^{\infty} x^{s/2} g(x) \frac{dx}{x} + \int_1^{\infty} x^{-s/2} g\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} .$$

Nun gilt wegen des in (6) ausgedrückten Zusammenhangs zwischen  $g(x)$  und  $\psi(x)$ :

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \left( \psi\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) = \frac{1}{2} x^{1/2} \psi(x) - \frac{1}{2} = x^{1/2} g(x) + \frac{1}{2} x^{1/2} - \frac{1}{2} .$$

Einsetzen in das Integral des zweiten Summanden liefert schliesslich

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{\infty} \left( x^{s/2} + x^{(1-s)/2} \right) g(x) \frac{dx}{x} .$$

An dieser Formel lässt sich nun direkt das anvisierte Resultat ablesen, nämlich

$$F(s) = F(1-s) .$$

Dies ist die berühmte Funktionalgleichung der Zetafunktion.

**Acknowledgment:** I am very grateful to U. Stammbach for the care he has given to the translation and the publication of my talk.

## Literatur

- [JoL94] J. Jorgenson, S. Lang: Explicit formulas for regularized series and products, Springer Lecture Notes 1593, 1994
- [L] S. Lang: *Undergraduate Analysis*, Springer Verlag 1983.
- [L94] S. Lang: Approximationssätze der Analysis. El. Math. 49 (1994), 92–103.

Serge Lang  
Yale University  
New Haven  
Connecticut 06520  
USA