

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 51 (1996)

Artikel: Iteration einer n-Ecksabbildung
Autor: Adelmeyer, Moritz / Stoffer, Daniel / [s.n.]
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46953>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Iteration einer n -Ecksabbildung

Unseren ehemaligen Lehrern Josef Hölzli und Heinz Kummer gewidmet.

Moritz Adelmeyer und Daniel Stoffer

Moritz Adelmeyer, Jahrgang 1964, studierte Mathematik an der ETH in Zürich. Es folgte ein Forschungsaufenthalt an der Universität Stuttgart und eine dreijährige Assistententätigkeit an der ETH. Seit 1994 ist er Hauptlehrer an der Kantonsschule Baden.

Daniel Stoffer, Jahrgang 1949, studierte Mathematik an der ETH Zürich. Er war anschliessend längere Zeit in der Wirtschaft tätig. Danach kehrte er als Assistent an die ETH zurück und promovierte 1988 mit einer Dissertation über dynamische Systeme. Nach einem zweijährigen Aufenthalt als Research Assistant Professor an der University of California in Los Angeles wurde er Oberassistent an der ETH. Sein Hauptinteresse gilt den geometrischen und numerischen Aspekten der dynamischen Systeme.

Zusammenfassung

Im Zentrum dieses Artikels steht eine einfache *Abbildung von n -Ecken* in der Ebene. In einem ersten Schritt *invertieren* wir diese n -Ecksabbildung *konstruktiv*. In einem zweiten Schritt *iterieren* wir die inverse n -Ecksabbildung und studieren das Grenzverhalten der iterierten n -Ecksfolgen. Es stellt sich heraus, dass es zu jedem noch so komplizierten n -Eck ein einfaches n -Eck gibt mit dem gleichen Grenzverhalten. Da es möglich ist, die n -Ecksabbildung analytisch als lineare Abbildung zu erfassen, sind *elementare Methoden* aus der linearen Algebra und der Zahlentheorie unsere wesentlichen Hilfsmittel.

Es spricht zweifellos für eine Wettbewerbsaufgabe für Schüler(innen), wenn sie die Lehrer(innen) dazu anregt, sich über die eigentliche Aufgabenstellung hinaus Gedanken zum Thema zu machen. Genau dies ist hier geschehen: Moritz Adelmeyer und Daniel Stoffer zeigen in ihrem Beitrag, wie die Verallgemeinerung einer geometrischen Wettbewerbsaufgabe zu weiteren interessanten Fragen und Resultaten Anlass gibt. *msf*

1 Eine Wettbewerbsaufgabe

Im Dezember 1992 führten wir an der Kantonsschule Wettingen einen Mathematikwettbewerb durch. Die Wettbewerbsaufgabe lautete im Kern wie folgt:

Im Dreieck $A'B'C'$ wird A' an B' nach A gespiegelt, B' an C' nach B gespiegelt und C' an A' nach C gespiegelt (Abb. 1). Konstruiere das Dreieck $A'B'C'$, wenn nur das Dreieck ABC gegeben ist.

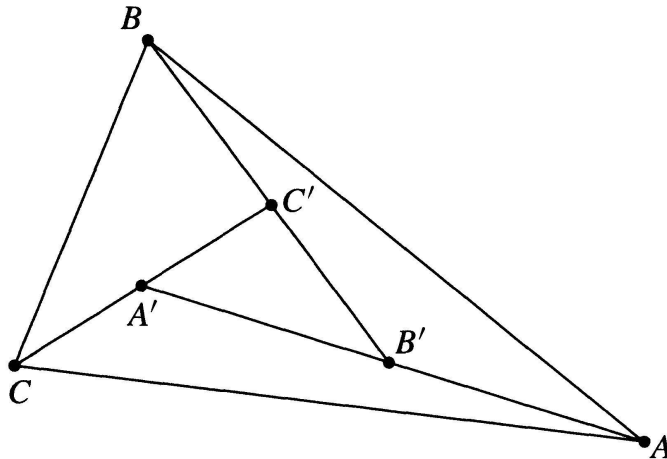


Abb. 1

Die Aufgabe in obigem Wortlaut wurde unter anderem auch in der 1. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 1978 gestellt [1]. Wir haben die Aufgabe für die Wettinger KantonsschülerInnen in eine Hexengeschichte mit Lokalkolorit verpackt [2].

2 Eine Schülerlösung

Die meisten SchülerInnen, die am Wettbewerb teilnahmen, argumentierten mit Hilfe der Strahlensätze.

Die Verlängerung von $A'B'$ schneide BC in P , die Parallele zu $A'B'$ durch C' schneide BC in Q (Abb. 2). Dann gilt nach dem 1. Strahlensatz und aufgrund der Spiegelungsvoraussetzung

$$\frac{|BQ|}{|QP|} = \frac{|BC'|}{|C'B'|} = 1$$

und

$$\frac{|CP|}{|PQ|} = \frac{|CA'|}{|A'C'|} = 1.$$

Daraus folgt $|BQ| = |QP| = |PC|$, das heisst P teilt BC im Verhältnis 2:1. Entsprechendes gilt für die übrigen Seiten, woraus sich die gesuchte Konstruktion unmittelbar ergibt.

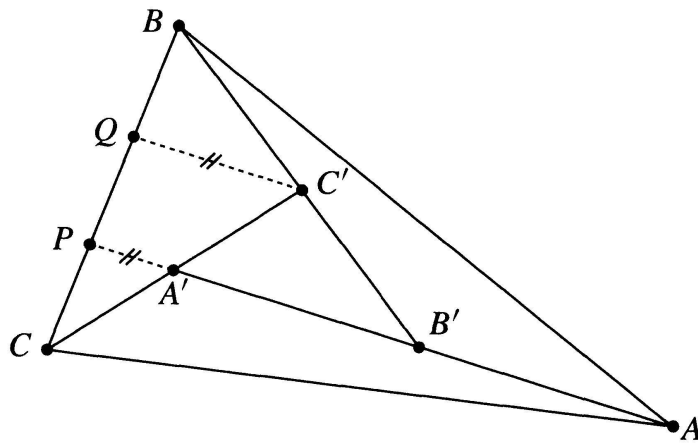


Abb. 2

3 Eine n -Ecksabbildung

Wir verallgemeinern in diesem Artikel die Wettbewerbsaufgabe aus Abschnitt 1 in zwei Richtungen:

- Anstelle von Dreiecken konstruieren wir n -Ecke.
- Wir iterieren die zu Abschnitt 2 analoge Lösungskonstruktion im Falle von n -Ecken.

Die genaue Problemstellung lautet wie folgt:

Im n -Eck $P_1 \dots P_n$ ($n \in \mathbf{N}, n \geq 3$) wird P'_1 an P'_2 nach P_1 gespiegelt, ..., P'_{n-1} an P'_n nach P_{n-1} gespiegelt und schliesslich P'_n an P'_1 nach P_n gespiegelt (Abb. 3). Dadurch wird eine Abbildung $\Psi : P'_1 \dots P'_n \mapsto P_1 \dots P_n$ auf der Menge der n -Ecke definiert.

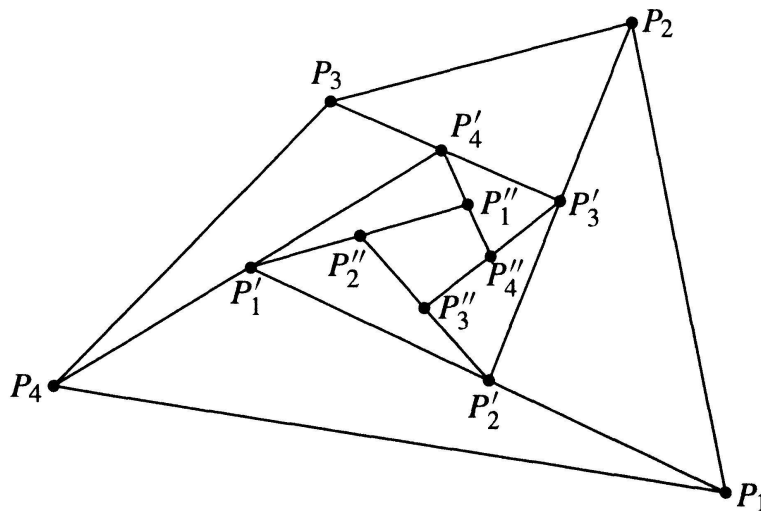


Abb. 3

• **Problem I (Rekonstruktion):** Konstruiere das n -Eck $P'_1 \dots P'_n$, wenn nur das n -Eck $P_1 \dots P_n$ gegeben ist. Das heisst: Ermittle die zu Ψ inverse Abbildung $\Phi : P_1 \dots P_n \mapsto P'_1 \dots P'_n$.

• **Problem II (Iteration):** Iteriere die Abbildung Φ . Wie verhält sich die resultierende Folge von n -Ecken $P_1 \dots P_n, P'_1 \dots P'_n = \Phi(P_1 \dots P_n), P''_1 \dots P''_n = \Phi^2(P_1 \dots P_n), \dots$?

Problem II wirft viele Fragen auf. Wir greifen zwei davon auf:

- **Problem II.1:** Die n -Ecke $P_1 \dots P_n, P'_1 \dots P'_n, P''_1 \dots P''_n, \dots$ werden immer kleiner (vgl. Abb. 3). Konvergiert die Folge der n -Ecke gegen einen Punkt? Wenn ja, gegen welchen Punkt?
- **Problem II.2:** Ist $P_1 \dots P_n$ ein reguläres n -Eck, so ist auch $P'_1 \dots P'_n$ ein reguläres n -Eck (Abb. 4). Reguläre n -Ecke behalten also unter Iteration ihre Form bei. Welches Verhalten zeigen die n -Ecke $P_1 \dots P_n, P'_1 \dots P'_n, P''_1 \dots P''_n, \dots$ in bezug auf ihre Form? Konvergiert die Folge der n -Ecke in der Form? Wenn ja, gegen welche Form?

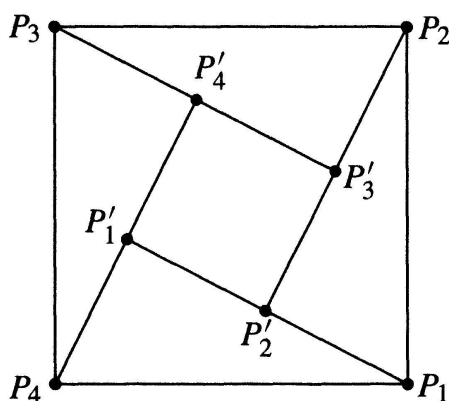


Abb. 4

4 Ein Zugang über die lineare Algebra

Analytische Lösung von Problem I

Wir siedeln die n -Ecke in der komplexen Zahlenebene an. Den Eckpunkten P_1, \dots, P_n und P'_1, \dots, P'_n entsprechen komplexe Zahlen z_1, \dots, z_n und z'_1, \dots, z'_n , welche wir zu Eckpunktvektoren $z = (z_1, \dots, z_n)$ und $z' = (z'_1, \dots, z'_n)$ zusammenfassen. So wird jedem n -Eck $P_1 \dots P_n$ in der Ebene genau ein Vektor $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ zugeordnet und umgekehrt.

Die Abbildungsvorschrift für Ψ aus Abschnitt 3 führt auf die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} z_1 - z'_2 &= z'_2 - z'_1 \\ z_2 - z'_3 &= z'_3 - z'_2 \\ &\vdots \\ z_n - z'_1 &= z'_1 - z'_n \end{aligned}$$

Das Rekonstruktionsproblem I aus Abschnitt 3 zu lösen heisst, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -z'_1 + 2z'_2 &= z_1 \\ -z'_2 + 2z'_3 &= z_2 \\ &\vdots \\ 2z'_1 - z'_n &= z_n \end{aligned}$$

nach z'_1, \dots, z'_n aufzulösen.

Die Koeffizientenmatrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & & & \\ & -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 \\ 2 & & & & \end{pmatrix}$$

der Abbildung Ψ besitzt die Inverse

$$A = B^{-1} = \frac{1}{2^n - 1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 1 & 2 & \dots & 2^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & 4 & \dots & 2^{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die zu Ψ inverse Abbildung Φ wird durch die Matrix A repräsentiert. Die Kenntnis der Matrix A löst also das Problem I.

Eine effiziente Konstruktion

Wie lassen sich die Punkte P'_1, \dots, P'_n aus P_1, \dots, P_n auf *effiziente* Weise konstruieren? Der folgende Algorithmus liefert eine Möglichkeit (Abb. 5).

a) Konstruktion von P'_1

- 1. Schritt: Starte im Punkt $Q_1 = P_n$.
- 2.-n. Schritt: Konstruiere sukzessive die Punkte

$$Q_{k+1} = Q_k + \frac{1}{2^{k+1} - 1} \overrightarrow{Q_k P_{n-k}} \quad (k = 1, \dots, n - 1).$$

Aus der Struktur der Matrix A folgt mit *Induktion nach n*, dass

$$Q_n = P'_1.$$

b) Konstruktion der übrigen Punkte P'_2, \dots, P'_n

Den Punkt P'_2 erhält man nun unmittelbar als Mittelpunkt von $P_1 P'_1$, den Punkt P'_3 als Mittelpunkt von $P_2 P'_2$, usw.

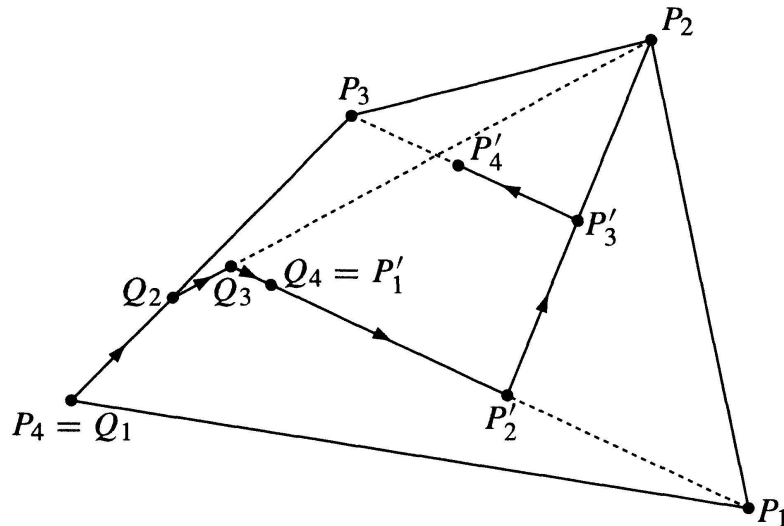


Abb. 5

Eigenwerte und Eigenvektoren von A

Um das Iterationsproblem II aus Abschnitt 3 zu lösen, untersuchen wir die lineare Abbildung $z \mapsto z' = Az$.

Es seien für $j = 1, \dots, n$

$$\varepsilon_j = e^{i2\pi j/n} \in \mathbf{C}$$

die n -ten Einheitswurzeln und

$$e_j = (\varepsilon_j, \varepsilon_j^2, \dots, \varepsilon_j^n) \in \mathbf{C}^n.$$

Wegen

$$Be_j = \begin{pmatrix} -1 & 2 & & \\ & -1 & 2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 2 & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_j \\ \varepsilon_j^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_j^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_j + 2\varepsilon_j^2 \\ -\varepsilon_j^2 + 2\varepsilon_j^3 \\ \vdots \\ -\varepsilon_j^n + 2\varepsilon_j \end{pmatrix} = (-1 + 2\varepsilon_j) \begin{pmatrix} \varepsilon_j \\ \varepsilon_j^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_j^n \end{pmatrix}$$

ist e_j ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $\mu_j = -1 + 2\varepsilon_j$ für $j = 1, \dots, n$ (Abb. 6). Damit ist e_j auch ein Eigenvektor von $A = B^{-1}$ und zwar zum Eigenwert $\lambda_j = 1/\mu_j$.

Wie Abb. 6 illustriert, gilt:

- Die Eigenwerte μ_j sind paarweise verschieden. Folglich sind die Eigenvektoren e_j linear unabhängig.
- $1 = |\mu_n| < |\mu_1| = |\mu_{n-1}| < \dots < |\mu_{[n/2]}| = |\mu_{n-[n/2]}|$
- $1 = |\lambda_n| > |\lambda_1| = |\lambda_{n-1}| > \dots > |\lambda_{[n/2]}| = |\lambda_{n-[n/2]}|$
- Die Eigenvektoren e_j repräsentieren *reguläre Stern- n -Ecke*. Die Stern- n -Ecke e_j und e_{n-j} unterscheiden sich für $j = 1, \dots, n-1$ nur in der Orientierung der Ecken.

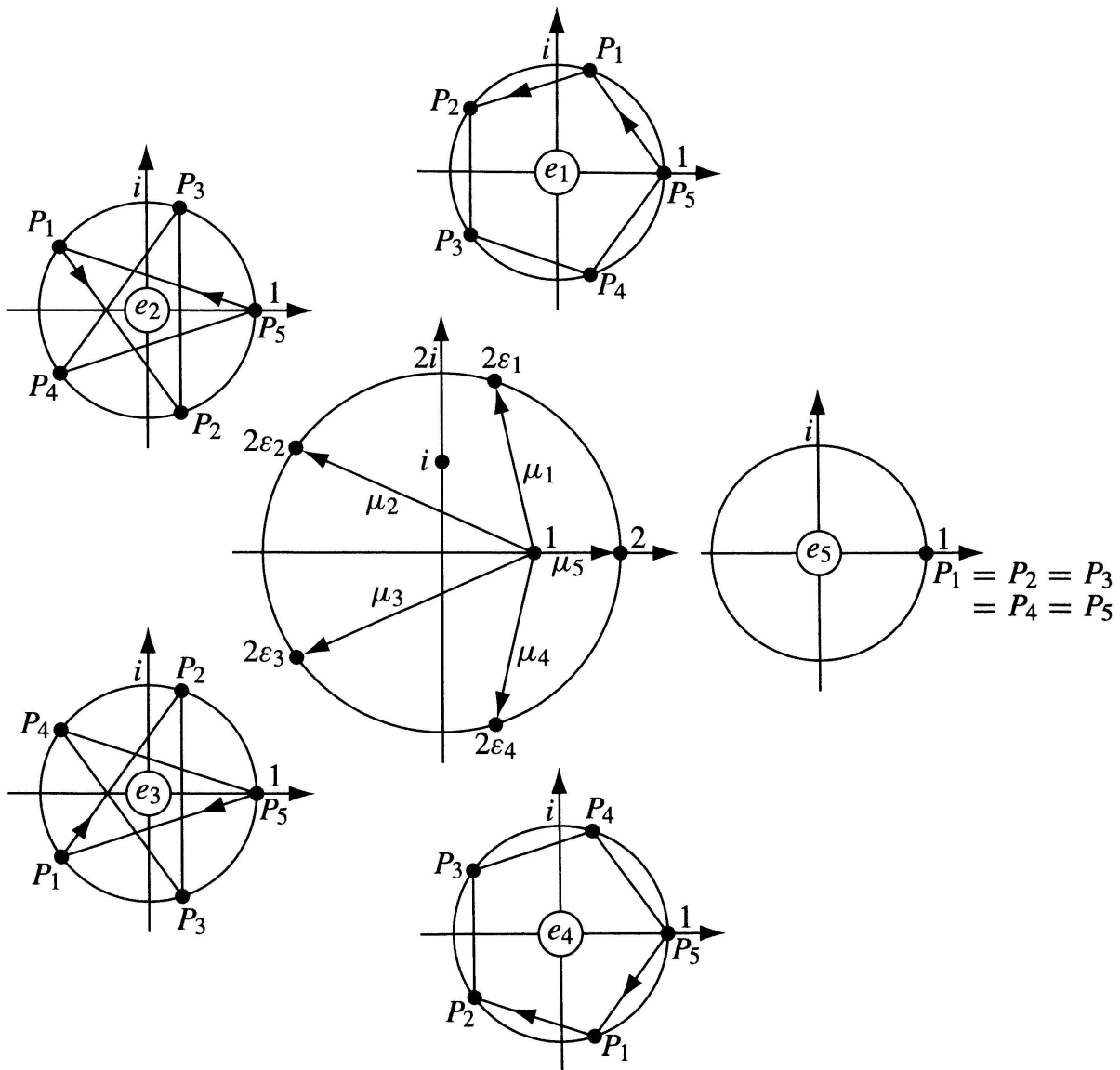


Abb. 6

Lösung von Problem II.1

Weil die Eigenvektoren e_j ($j = 1, \dots, n$) eine Basis von C^n bilden, lässt sich jedes n -Eck $z \in C^n$ als Linearkombination von regulären Stern- n -Ecken schreiben,

$$z = \sum_{j=1}^n \gamma_j e_j,$$

wobei $\gamma_j \in C$. Jedes n -Eck $\gamma_j e_j$ geht durch eine Drehstreckung aus dem n -Eck e_j hervor und ist somit selbst ein reguläres Stern- n -Eck. Also ist z sogar die Summe von regulären Stern- n -Ecken. Die Koeffizienten γ_j können konstruktiv bestimmt werden. Wie das gemacht wird, zeigen wir weiter unten.

Das Start- n -Eck $P_1 \dots P_n$ sei durch $z \in C^n$ gegeben. Die k -te Iterierte von $P_1 \dots P_n$ unter der Abbildung Φ ist dann durch $A^k z$ repräsentiert. Aus der Linearität der Abbildung A

und aus $|\lambda_n| = 1$, $|\lambda_j| < 1$ für $j = 1, \dots, n-1$ folgt

$$A^k z = A^k \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n \gamma_j A^k e_j = \sum_{j=1}^n \gamma_j \lambda_j^k e_j \rightarrow \gamma_n e_n \quad (k \rightarrow \infty).$$

Dabei ist $\gamma_n e_n = (\gamma_n, \dots, \gamma_n)$ dasjenige n -Eck, welches alle seine Ecken im Punkt γ_n hat. Welche Rolle spielt der Punkt γ_n im n -Eck z ?

Es sei $M : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ die *Mittelpunktsabbildung*, definiert für $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ durch

$$M(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j.$$

Es gilt speziell (vgl. Abb. 6)

$$M(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 1, \dots, n-1, \\ 1 & \text{für } j = n. \end{cases}$$

Somit gilt für jedes $z = \sum_{j=1}^n \gamma_j e_j \in \mathbb{C}^n$

$$M(z) = \gamma_n.$$

Das heisst: Der Punkt γ_n ist der *Mittelpunkt* der n Ecken z_1, \dots, z_n .

Zusammenfassend haben wir folgendes gezeigt:

Satz 1 Die *n-Ecksfolge*

$$P_1 \dots P_n, P'_1 \dots P'_n = \Phi(P_1 \dots P_n), P''_1 \dots P''_n = \Phi^2(P_1 \dots P_n), \dots$$

konvergiert gegen das n -Eck $P^* \dots P^*$, wobei P^* der *Mittelpunkt* der Ecken P_1, \dots, P_n ist.

Konstruktive Zerlegung eines n -Ecks in reguläre Stern- n -Ecke

Es sei

$$R_k = \begin{pmatrix} \varepsilon_k^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_k^{-2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_k^{-n} \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Die Abbildung $z \mapsto R_k z$ dreht jede Ecke z_j eines n -Ecks $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ um den Winkel $-j2\pi k/n$ um 0. Es gilt speziell (vgl. Abb. 6)

$$R_k e_j = e_{j-k} \quad (j, k = 1, \dots, n),$$

wobei der Index $j - k \bmod n$ zu lesen ist. Für ein allgemeines n -Eck $z = \sum_{j=1}^n \gamma_j e_j$ ist also

$$M \circ R_k(z) = M \circ R_k \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j e_j \right) = M \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j e_{j-k} \right) = \sum_{j=1}^n \gamma_j M(e_{j-k}) = \gamma_k.$$

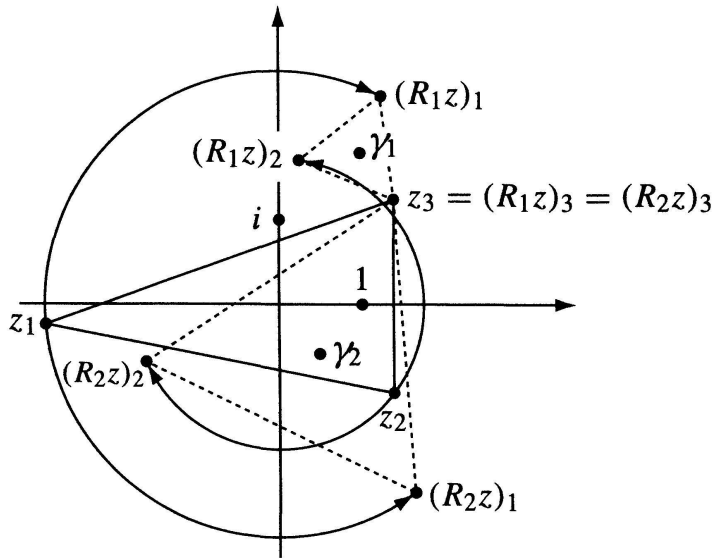


Abb. 7

Aufgrund dieser Beziehung können die γ_j konstruktiv bestimmt werden. Für den Fall $n = 3$ ist dies in Abb. 7 illustriert. Der Übersicht halber wählen wir ein Dreieck mit Mittelpunkt in 0. γ_1 wird wie folgt konstruiert: Die Ecke z_1 wird um 120° im Uhrzeigersinn um 0 gedreht und geht in den Punkt $(R_1 z)_1$ über. z_2 wird um 120° im Gegenuhrzeigersinn um 0 gedreht und geht in $(R_1 z)_2$ über. z_3 ist invariant unter R_1 , das heisst $z_3 = (R_1 z)_3$. γ_1 ist der Mittelpunkt des (notabene gleichseitigen!) Dreiecks $R_1 z$. γ_2 wird via R_2 analog konstruiert wie γ_1 . γ_3 ist null, da das Dreieck z (a priori) Mittelpunkt 0 hat.

5 Die Abbildung Φ unter der Lupe

In diesem Abschnitt lösen wir das Iterationsproblem II.2, also die Frage nach dem Formverhalten der n -Ecke $P_1 \dots P_n, P'_1 \dots P'_n = \Phi(P_1 \dots P_n), P''_1 \dots P''_n = \Phi^2(P_1 \dots P_n), \dots$

Die Lupe

Da der Mittelpunkt unter der Iteration in Ruhe bleibt, können wir uns in diesem ganzen Abschnitt auf n -Ecke mit Mittelpunkt 0 einschränken. Für $z \in \mathbb{C}^n$ mit $M(z) = 0$ ist

$$z = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j e_j, \text{ das heisst } \gamma_n = 0.$$

Wir wollen vorerst voraussetzen, dass $\gamma_1 \neq 0$ oder $\gamma_{n-1} \neq 0$.

Um die Form der iterierten n -Ecke sichtbar zu machen, strecken wir die n -Ecke nach jedem Iterationsschritt, und zwar um den Faktor

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \frac{1}{|2\varepsilon_1 - 1|} > 1.$$

Das heisst: Wir ersetzen die Abbildung A durch die skalierte Abbildung

$$\hat{A} = \frac{1}{|\lambda_1|} A,$$

welche uns sozusagen als Lupe dient.

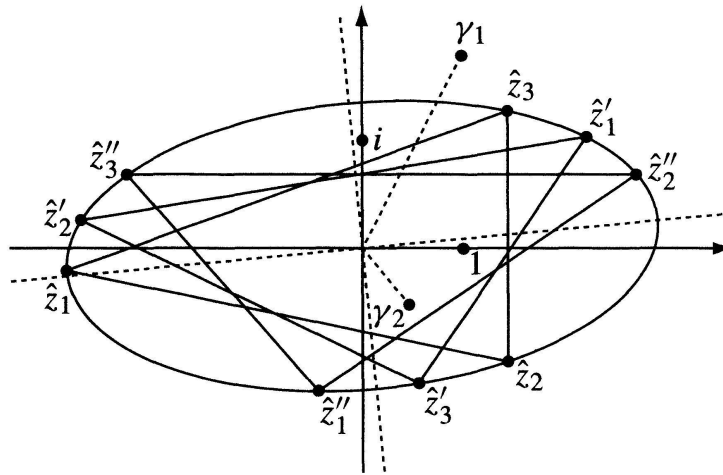


Abb. 8

Asymptotisches Verhalten unter Iteration von \hat{A}

Für die k -te Iterierte $\hat{A}^k z$ von z unter \hat{A} gilt

$$\hat{A}^k z = \hat{A}^k \left(\sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j \hat{A}^k e_j = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j \left(\frac{\lambda_j}{|\lambda_1|} \right)^k e_j.$$

Wegen $|\lambda_j| < |\lambda_1|$ für $j = 2, \dots, n-2$ und $|\lambda_{n-1}| = |\lambda_1|$ ist $\hat{A}^k z$ asymptotisch gleich

$$\gamma_1 \hat{\lambda}_1^k e_1 + \gamma_{n-1} \hat{\lambda}_{n-1}^k e_{n-1},$$

wobei $\hat{\lambda}_1 = \lambda_1/|\lambda_1|$ und $\hat{\lambda}_{n-1} = \lambda_{n-1}/|\lambda_{n-1}|$. Anders formuliert:

- Für $\hat{z} = \gamma_1 e_1 + \gamma_{n-1} e_{n-1}$ gilt

$$|\hat{A}^k z - \hat{A}^k \hat{z}| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

\hat{z} ist ein n -Eck, welches sich als *Summe eines positiv und eines negativ orientierten regulären n -Ecks* schreiben lässt. Solche n -Ecke wollen wir hier *affin-reguläre n -Ecke* nennen.

Affin-reguläre n -Ecke unter der Lupe

Wir zeigen nun die folgende, etwas überraschende Tatsache:

- Alle Eckpunkte der n -Ecke $\hat{A}^k \hat{z}$ liegen auf ein und derselben Ellipse!

Genauer gilt: Ist $\hat{z} = \gamma_1 e_1 + \gamma_{n-1} e_{n-1}$, so hat die grosse Halbachse der Ellipse die Länge $|\gamma_1| + |\gamma_{n-1}|$ und zeigt in Richtung der Winkelhalbierenden von γ_1 und γ_{n-1} . Die kleine Halbachse hat die Länge $||\gamma_1| - |\gamma_{n-1}||$ und zeigt in Richtung der Winkelhalbierenden von γ_1 und $-\gamma_{n-1}$ (Abb. 8).

Dies lässt sich analytisch wie folgt zeigen: Wir schreiben $\widehat{\lambda}_1, \gamma_1$ und γ_{n-1} in Polarform:

$$\widehat{\lambda}_1 = e^{i\omega}, \quad \gamma_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad \gamma_{n-1} = r_{n-1} e^{i\varphi_{n-1}}.$$

Mit $\widehat{\lambda}_{n-1} = e^{-i\omega}$ folgt

$$\widehat{A}^k \widehat{z} = \begin{pmatrix} r_1 e^{i(\varphi_1 + 2\pi/n + k\omega)} + r_{n-1} e^{i(\varphi_{n-1} - 2\pi/n - k\omega)} \\ \vdots \\ r_1 e^{i(\varphi_1 + j2\pi/n + k\omega)} + r_{n-1} e^{i(\varphi_{n-1} - j2\pi/n - k\omega)} \\ \vdots \\ r_1 e^{i(\varphi_1 + k\omega)} + r_{n-1} e^{i(\varphi_{n-1} - k\omega)} \end{pmatrix}.$$

Alle Eckpunkte von $\widehat{A}^k \widehat{z}$ liegen auf der Kurve

$$\zeta(t) = r_1 e^{i(\varphi_1 + t)} + r_{n-1} e^{i(\varphi_{n-1} - t)} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

Durch die Transformation $t = \tau + (\varphi_{n-1} - \varphi_1)/2$ erhält die Kurvengleichung die Gestalt

$$\begin{aligned} \zeta(\tau) &= e^{i(\varphi_1 + \varphi_{n-1})/2} (r_1 e^{i\tau} + r_{n-1} e^{-i\tau}) \\ &= e^{i(\varphi_1 + \varphi_{n-1})/2} ((r_1 + r_{n-1}) \cos \tau + i(r_1 - r_{n-1}) \sin \tau) \quad (\tau \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Hieraus können die Ellipsenparameter abgelesen werden.

Konjugation mit Rotation auf Kreis

Jedem affin-regulären n -Eck $\widehat{z} = \gamma_1 e_1 + \gamma_{n-1} e_{n-1}$ mit $\gamma_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \gamma_{n-1} = r_{n-1} e^{i\varphi_{n-1}}$ wird eine affine Abbildung $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ zugeordnet, welche aus den folgenden zwei Teilabbildungen zusammengesetzt ist:

- Streckung in Richtung der imaginären Achse mit dem Faktor $\rho = \frac{r_1 - r_{n-1}}{r_1 + r_{n-1}}$
- Drehung um den Winkel $\psi = (\varphi_1 + \varphi_{n-1})/2$

T bildet den Kreis vom Radius $r_1 + r_{n-1}$ um 0 auf die Ellipse ab, auf der die Eckpunkte von \widehat{z} liegen. Mehr noch: Die affine Abbildung T bildet jeden Eckpunkt des regulären n -Ecks $\widehat{w} = (r_1 + r_{n-1})e_1$ auf den entsprechenden Eckpunkt des affin-regulären n -Ecks \widehat{z} ab (Abb. 9). Daher stammt die Bezeichnung affin-reguläre n -Ecke.

Das reguläre n -Eck \widehat{w} wird unter \widehat{A} um den Winkel ω gedreht und auf das reguläre n -Eck \widehat{w}' abgebildet. \widehat{w}' wird mittels T auf ein affin-reguläres n -Eck \widehat{z}' auf der Ellipse abgebildet.

Das Diagramm aus Abb. 9 ist kommutativ. Das heisst:

- \widehat{z}' ist das Bild von \widehat{z} unter \widehat{A} .

Die Kommutativität folgt aus der Tatsache, dass die Abbildung T \mathbf{R} -linear ist, das heisst

$$\begin{aligned} T(z_1 + z_2) &= T(z_1) + T(z_2) && \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbf{C}, \\ T(az) &= aT(z) && \text{für alle } z \in \mathbf{C} \text{ und } a \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

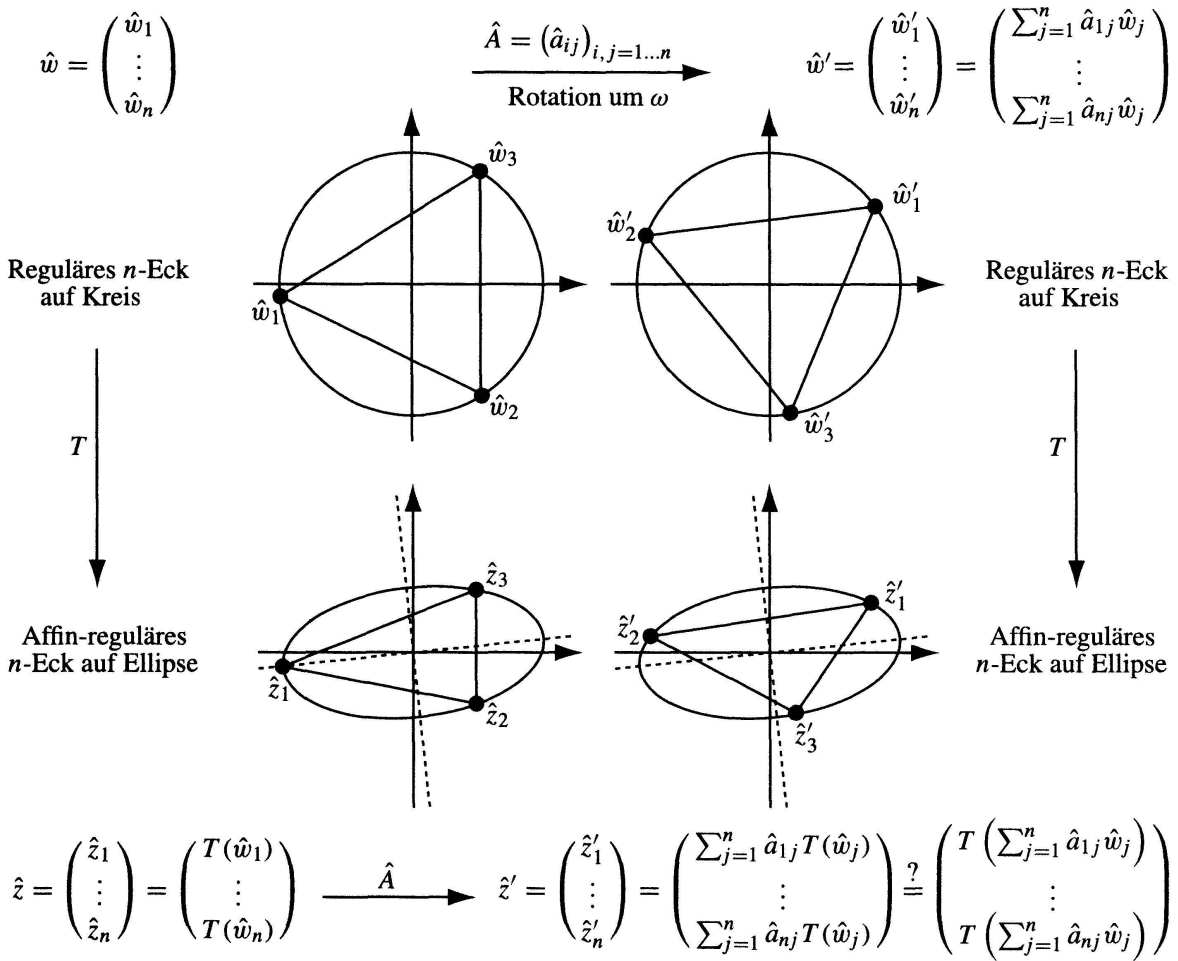


Abb. 9

Tatsächlich ist T von der Form

$$\begin{aligned}
 T(z) &= e^{i\psi} (\operatorname{Re} z + i\rho \operatorname{Im} z) \\
 &= e^{i\psi} ((z + \bar{z}) + i\rho(z - \bar{z})) / 2 \\
 &= \alpha z + \beta \bar{z}
 \end{aligned}$$

mit (von z unabhängigen) Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Atypische Situationen

Wir haben in diesem Abschnitt unser Augenmerk ganz auf den *typischen* oder, etwas mathematischer ausgedrückt, *generischen* Fall gerichtet, bei dem $\gamma_1 \neq 0$ oder $\gamma_{n-1} \neq 0$ ist. Wir deuten nun an, wie man im *atypischen* Fall $\gamma_1 = \gamma_{n-1} = 0$ vorgeht. Ist $\gamma_2 \neq 0$ oder $\gamma_{n-2} \neq 0$, so untersuche man anstelle der Abbildung \hat{A} die Abbildung

$$\hat{\hat{A}} = \frac{1}{|\lambda_2|} A.$$

Es gilt dann für $z = \sum_{j=2}^{n-2} \gamma_j e_j$ und $\hat{z} = \gamma_2 e_2 + \gamma_{n-2} e_{n-2}$:

$$|\hat{\hat{A}}^k z - \hat{\hat{A}}^k \hat{z}| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Die n -Ecke $\widehat{A} \widehat{z}$ haben alle Eckpunkte auf ein und derselben Ellipse und können affin auf reguläre Stern- n -Ecke vom Typ e_2 abgebildet werden. Die Dynamik unter \widehat{A} ist konjugiert zu einer Rotation, wobei der Drehwinkel gleich dem Argument des Eigenwertes λ_2 ist. Analog behandelt man auch die Fälle $\gamma_1 = \gamma_{n-1} = \gamma_2 = \gamma_{n-2} = 0, \gamma_3 \neq 0$ oder $\gamma_{n-3} \neq 0$, usw.

Lösung von Problem II.2

Zusammenfassend haben wir gezeigt:

Satz 2 Die n -Ecksfolge

$$P_1 \dots P_n, P'_1 \dots P'_n = \Phi(P_1 \dots P_n), P''_1 \dots P''_n = \Phi^2(P_1 \dots P_n), \dots$$

zeigt im typischen Fall $\gamma_1 \neq 0$ oder $\gamma_{n-1} \neq 0$ folgendes Verhalten in der Form:

- Ist $P_1 \dots P_n$ ein reguläres n -Eck, so sind auch die n -Ecke $P'_1 \dots P'_n, P''_1 \dots P''_n, \dots$ regulär und haben also die gleiche Form wie $P_1 \dots P_n$.
- Ist $P_1 \dots P_n$ ein affin-reguläres n -Eck, so variiert die Form der n -Ecke $P'_1 \dots P'_n, P''_1 \dots P''_n, \dots$ periodisch oder quasiperiodisch, je nachdem, ob ω ein rationales Vielfaches von 2π ist oder nicht. Dabei ist ω das Argument der komplexen Zahl $1/(2e^{i2\pi/n} - 1)$.
- Ist $P_1 \dots P_n$ ein allgemeines n -Eck, so existiert ein affin-reguläres n -Eck $\widehat{P}_1 \dots \widehat{P}_n$, derart dass die beiden Folgen $P_1 \dots P_n, P'_1 \dots P'_n, P''_1 \dots P''_n, \dots$ und $\widehat{P}_1 \dots \widehat{P}_n, \widehat{P}'_1 \dots \widehat{P}'_n, \widehat{P}''_1 \dots \widehat{P}''_n, \dots$ asymptotisch das gleiche Formverhalten zeigen.

6 Der Winkel ω und elementare Zahlentheorie

Für welche natürlichen Zahlen n variiert die Form periodisch, für welche quasiperiodisch? Das heisst: Für welche n ist das Argument ω der komplexen Zahl

$$\frac{1}{2\varepsilon_1 - 1} \text{ mit } \varepsilon_1 = e^{i2\pi/n}$$

ein rationales Vielfaches von 2π , für welche nicht?

Im Falle $n = 6$ ist $\varepsilon_1 = 1/2 + i\sqrt{3}/2, 2\varepsilon_1 - 1 = i\sqrt{3}$ und somit $\omega = -\pi/2$. Die asymptotische Konstellation für 6-Ecke ändert *periodisch* in der Form.

Wir stellen nun eine Methode vor, mit der wir für $n = 3, 4, 5, 8, 10$ zeigen können, dass die asymptotische n -Eckskonstellation *quasiperiodisch* in der Form ändert.

Die Frage, ob ω ein rationales Vielfaches von 2π ist oder nicht, ist äquivalent zu folgender Frage:

- Gibt es eine natürliche Zahl k , so dass $(2\varepsilon_1 - 1)^k$ reell ist oder nicht?

Wir erläutern die Beweismethode detailliert für den Fall $n = 3$ und deuten an, wie diese auf die Fälle $n = 4, 5, 8, 10$ übertragen werden kann.

Für $n = 3$ ist $\varepsilon_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ und somit $2\varepsilon_1 - 1 = -2 + i\sqrt{3}$. Die Potenzen $(-2 + i\sqrt{3})^k$ lassen sich rekursiv berechnen. Sie sind von der Form

$$(-2 + i\sqrt{3})^k = a_k + ib_k\sqrt{3} \quad \text{mit ganzzahligen } a_k, b_k.$$

Die Zahlen a_k, b_k genügen der Rekursionsgleichung

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \quad (k \geq 1), \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Rekursionsmatrix hat die Determinante 7. Nun kommt der entscheidende Schritt: *Wir führen fortan alle Berechnungen mod 7 durch.* Damit wird die Rekursionsmatrix singulär. Ihre Spalten sind linear abhängig:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \equiv 5 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \pmod{7}.$$

Es ist jetzt

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv -2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \equiv 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \pmod{7}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} \equiv 3^k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \pmod{7}$$

für alle k . Da $3^k \not\equiv 0 \pmod{7}$ für alle k , ist $b_k \not\equiv 0 \pmod{7}$ und somit $b_k \neq 0$ für alle k .

Im Falle $n = 4$ ist $\varepsilon_1 = i$ und $2\varepsilon_1 - 1 = -1 + 2i$. Die Potenzen sind von der Form

$$(-1 + 2i)^k = a_k + b_k i \quad \text{mit ganzzahligen } a_k, b_k$$

und lassen sich rekursiv berechnen aus

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \quad (k \geq 1), \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Rekursionsmatrix hat die Determinante 5. Berechnungen mod 5 ergeben

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} \equiv 3^k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \pmod{5}$$

für alle k , woraus $b_k \neq 0$ für alle k folgt.

Im Falle $n = 5$ ist

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Die k -ten Potenzen von

$$2(2\varepsilon_1 - 1) = -3 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

haben die Form

$$a_k + b_k\sqrt{5} + i(c_k + d_k\sqrt{5})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

mit ganzzahligen a_k, b_k, c_k, d_k und genügen der Beziehung

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \\ d_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -10 & -10 \\ 1 & -3 & -2 & -10 \\ 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix} \quad (k \geq 1), \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Rekursionsmatrix hat die Determinante $496 = 2^4 \cdot 31$. Berechnungen mod 31 zeigen, dass für kein k zugleich $c_k = 0$ und $d_k = 0$ ist. Man muss dazu lediglich die ersten 31 Iterierten explizit auflisten. Die 31. Iterierte $(a_{31}, b_{31}, c_{31}, d_{31})$ ist mod 31 gleich der 1. Iterierten (a_1, b_1, c_1, d_1) .

Für $n = 8$ ist $2\varepsilon_1 - 1 = -1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Die k -ten Potenzen sind von der Form $a_k + b_k\sqrt{2} + i(c_k + d_k\sqrt{2})$ mit ganzzahligen a_k, b_k, c_k, d_k , und es gilt

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \\ d_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix} \quad (k \geq 1), \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der Rekursionsmatrix beträgt 17. Analog zum Fall $n = 5$ zeigen Berechnungen mod 17, dass für kein k $c_k = d_k = 0$ ist. Hier ist die 17. Iterierte mod 17 gleich der 1. Iterierten mod 17.

Im Falle $n = 10$ ist

$$\varepsilon_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}.$$

Die k -ten Potenzen von

$$2(2\varepsilon_1 - 1) = -1 + \sqrt{5} + 2i\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

haben die Form

$$a_k + b_k\sqrt{5} + i(c_k + d_k\sqrt{5})\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

mit ganzzahligen a_k, b_k, c_k, d_k und lassen sich rekursiv berechnen über die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -5 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat die Determinante $176 = 2^4 \cdot 11$. Berechnungen mod 11 zeigen, dass für kein k $c_k = d_k = 0$ ist.

Schlusswort

Haben Sie sich daran gestört, dass wir nur ebene n -Ecke untersucht haben? Kein Problem, wir können die n -Ecke ohne weiteres auch im dreidimensionalen oder gar m -dimensionalen Raum ansiedeln. Die Methoden sind sehr ähnlich wie im Fall $m = 2$. Man untersucht im Fall $m > 2$ zweckmässigerweise jede räumliche Koordinate für sich. In jeder Koordinate gilt die gleiche Abbildungsvorschrift wie in diesem Artikel. Die Sätze 1 und 2 behalten ihre Gültigkeit. Insbesondere wird die asymptotische n -Eckskonstellation auch im m -dimensionalen Falle eben!

H. Maennel (Eichstätt, Deutschland) hat mit etwas anspruchsvolleren algebraischen Methoden gezeigt, dass der Winkel ω *nur* für 6-Ecke ein rationales Vielfaches von 2π ist [3].

Referenzen

- [1] Bundeswettbewerb Mathematik, Aufgaben und Lösungen 1972–1982, Klett Verlag, Stuttgart 1987.
- [2] Kopien des vollständigen Aufgabentextes und der prämierten Lösungen von den Autoren erhältlich.
- [3] Schriftliche Mitteilung, Juni 1994, Kopie erhältlich von den Autoren.

Moritz Adelmeyer
Kantonsschule Baden
Mathematik
Seminarstrasse 3
CH-5400 Baden

Daniel Stoffer
ETH Zürich
Mathematik
ETH Zentrum
CH-8092 Zürich