El. Math. 50 (1995) 0013-6018/95/030122-12\$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Februar 1996 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma

  oder

- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1099: Es seien P_1, P_2, P_3 drei nichtkollineare Punkte und M ein Punkt in ihrer Ebene. Für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ seien die sechs Punkte S_{ij} als Schnittpunkte von P_iP_j mit der Parallelen zu P_jP_k durch M festgelegt. Die sechs Punkte S'_{ij} sind sodann durch

$$\overrightarrow{P_jS'_{ij}} = 2 \cdot \overrightarrow{P_jS_{ij}}$$

und die sechs Geraden p_{ij} durch $S'_{ij} \in p_{ij} \parallel P_iP_k$ bestimmt. Man beweise: Es existieren eindeutig bestimmte Punkte M_1, M_2 mit $M_1 \in p_{12}, p_{23}, p_{31}$ und $M_2 \in p_{21}, p_{13}, p_{32}$. Ausserdem ist M der Mittelpunkt von M_1M_2.

Herbert Gülicher, Münster, D

Aufgabe 1100: Inverse von rekursiv aufgebauten Dreiecksmatrizen.
Die beiden Pascalmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +3 & -3 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & -4 & +6 & -4 & +1 \end{pmatrix}$$

sind zueinander invers. Das gleiche gilt auch für die beiden Stirlingmatrizen erster und zweiter Art:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & -3 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & +11 & -6 & +1 & 0 \\ 0 & +24 & -50 & +35 & -10 & +1 \end{pmatrix}.$$

Man beweise die folgende Verallgemeinerung:

Es sei n eine natürliche Zahl und $f(j)$ eine reelle Folge mit $0 \leq j \leq n$. Ist die untere Dreiecksmatrix A durch die Rekursion

$$A_{i+1,j} := A_{i,j-1} + f(j) \cdot A_{i,j} \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq i \leq n$$

mit den Randbedingungen $A_{i,0} := 0$ für $1 \leq i \leq n$ und $A_{i,i} := 1$ für $0 \leq i \leq n$ gegeben, so ist deren Inverse U durch die Rekursion

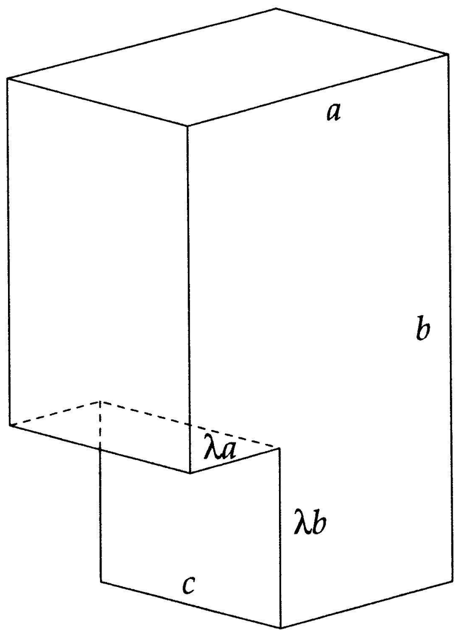
$$U_{i+1,j} := U_{i,j-1} - f(i) \cdot U_{i,j} \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq i \leq n$$

mit den Randbedingungen $U_{i,0} := 0$ für $1 \leq i \leq n$ und $U_{i,i} := 1$ für $0 \leq i \leq n$ bestimmt.

Hinweis: Für $f(j) = 1$ ergeben sich die Pascal- und für $f(j) = j$ die Stirlingmatrizen.

Robert Brawer, Solothurn, CH

Aufgabe 1101 (Die einfache dritte Aufgabe): Ein homogener Quader mit den Kantenlängen a, b und c liegt mit dem Rechteck aus den Seiten a und c auf einer horizontalen Ebene. Von der einen aufliegenden Kante c aus wird ein Quader mit den Kantenlängen λa, λb und c herausgeschnitten. Wie gross darf λ $(0 < \lambda < 1)$ höchstens sein, damit der Restkörper nicht umkippt?



Rolf Rose, Magglingen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 1994

Aufgabe 1087. Der Inkreismittelpunkt des Seitenmittendreieckes eines Dreiecks ABC ist das Potenzzentrum der drei Ankreise des Dreiecks ABC. Man beweise folgende bemerkenswerte Verallgemeinerung: Es seien k_1, k_2 und k_3 drei Kreise, die aus den Seitengeraden eines Dreiecks ABC Strecken vorgegebener Länge herausschneiden: Aus BC eine Strecke der Länge u, aus CA eine Strecke der Länge v und aus AB eine Strecke der Länge w. Dann ist das Potenzzentrum von k_1, k_2 und k_3 der Mittelpunkt eines Kreises, der aus den Seitengeraden des Seitenmittendreiecks von ABC Strecken der Längen $\frac{u}{2}$, $\frac{v}{2}$ und $\frac{w}{2}$ herausschneidet.

Roland Stärk, Schaffhausen, CH

Auswertung. Da keine Lösung eingegangen ist, bringen wir die Lösung des Aufgabenstellers, zu deren Verständnis die Anfertigung einer Skizze unerlässlich ist: Nach [1] bilden die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 der vier Kreise k_1, k_2, k_3, k_4, welche aus den Seitengeraden BC, CA, AB eines Dreiecks ABC Strecken der Längen u, v, w herausschneiden, ein orthozentrisches Viereck, dessen Feuerbachkreis der Umkreis des Dreiecks ABC ist. Wir nennen diese Kreise die uvw-Kreise des Dreiecks ABC. Es sei P die Mitte der Strecke M_1,M_2, und P_1,P_2, P_3 seien die Fusspunkte der Lote von P auf die Geraden BC, CA, AB. P liegt auf dem Feuerbachkreis des Dreiecks $M_1M_2M_3$, also auf dem Umkreis des Dreiecks ABC. Fällt man von einem Umkreispunkt eines Dreiecks die Lote auf die Seiten, so sind die Fusspunkte kollinear. Die Gerade w durch P_1, P_2, P_3 ist die zu P gehörende Wallacegerade des Dreiecks ABC. Da die Kreise k_1 und k_2 die Gerade BC in gleich langen Sehnen schneiden und P_1 von den Mitten dieser Sehnen gleich weit entfernt ist, hat P_1 gleiche Potenz bezüglich k_1 und k_2. Ebenso haben P_2 und P_3 gleiche Potenz bezüglich dieser Kreise. w ist die Potenzgerade von k_1 und k_2, steht senkrecht auf M_1M_2 und ist parallel zu M_3M_4, da das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ orthozentrisch ist. Es seien U der Umkreismittelpunkt, S der Schwerpunkt und H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Wir zeigen, dass die Parallele zu w durch S von der Geraden M_3M_4 doppelt so grossen Abstand hat wie von w: Wenn U', S', H' die Fusspunkte der Lote von U, S, H auf die Gerade M_1M_2 sind, W der Schnittpunkt von w mit M_1M_2 und F der auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegende Schnittpunkt von M_3M_4 mit M_1M_2, dann gilt $\overline{FU'} = \overline{U'P}$ und $\overline{H'S'} = 2\,\overline{S'U'}$. Dazu kommt, nach einem Satz über Wallacegeraden, $\overline{H'W} = \overline{WP}$. Daraus folgt $\overline{FS'} = 2\,\overline{S'W}$. Die Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor $-\frac{1}{2}$ (die Abbildung der Ebene, welche den Punkt Q in den Punkt Q^*, mit $\overrightarrow{SQ^*} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SQ}$, abbildet) bildet somit M_4 in einen Punkt von w ab. Gleiches gilt auch für die Potenzgerade von k_1 und k_3. M_4 wird auch in einen Punkt dieser Geraden abgebildet, somit in den Schnittpunkt der beiden Potenzgeraden, in das Potenzzentrum von k_1, k_2, k_3. Das Dreieck ABC geht dabei in das Seitenmittendreieck über, und k_4 in einen der $\frac{u}{2}\frac{v}{2}\frac{w}{2}$-Kreise des Seitenmittendreiecks.

Man beachte speziell den Fall, wo u, v, w gerade die Seitenlängen des Dreiecks ABC sind. Dann ist das Potenzzentrum der drei vom Umkreis verschiedenen uvw-Kreise der Feuerbachpunkt des Dreiecks ABC.

[1] Stärk, R: *Über die Kreise, welche aus drei Geraden Strecken vorgegebener Länge herausschneiden.* El.Math., Vol. 49 (1994), 118–119

Aufgabe 1088. Summen mit Quadraten von Binomialkoeffizienten.
Summiert man die Zahlen der n-ten Zeile im Pascaldreieck, erhält man 2^n. Versieht man diese Zahlen der Reihe nach mit den Gewichten $0, 1, 2, \ldots, n$, so erhält man $n \cdot 2^{n-1}$. Wählt man die Quadratzahlen $0, 1, 4, \ldots, n^2$ als Gewichte, so erhält man $n(n+1) \cdot 2^{n-2}$. Allgemein gilt

$$\sum_{j=1}^{n} j^r \binom{n}{j} = \frac{\partial^r}{\partial t^r}(1+e^t)^n \bigg|_{t=0}, \quad r = 1, 2, \ldots \quad .$$

Nun kennt man aber auch die Summe der Quadrate aller Binomialkoeffizienten einer Zeile im Pascaldreieck. Es stellt sich also die Frage, ob man das obige Spiel mit Gewichten auch mit den Quadraten der Binomialkoeffizienten treiben kann. Es sei

$$Q(n,r) = \sum_{j=1}^{n} j^r \binom{n}{j}^2, \quad r = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

Man beweise, dass

$$\begin{aligned} Q(n,0) &= \binom{2n}{n} - 1 \\ Q(n,1) &= n \cdot \binom{2n-1}{n} \\ Q(n,2) &= n^2 \cdot \binom{2n-2}{n-1} \\ Q(n,3) &= n^2(n+1) \cdot \binom{2n-3}{n-1} \quad . \end{aligned}$$

(Für den Druckfehler bei $Q(n,3)$ in der Aufgabenstellung bitten wir um Entschuldigung.)

Renate Golombek, Marburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 19 Lösungen eingetroffen, und zwar von Ulrich Abel (Friedberg, D), E. Sparre Andersen und Mogens Esrom Larsen (Kopenhagen, DK), Šefket Arslanagić (Berlin, D), Jany Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Friedhelm Götze (Jena, D), F. Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Kappus (Rodersdorf, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Kee-Wai Lau (Hong Kong), István Nemes und Peter Paule (Linz, A), Werner Raffke (Vechta, D), H.-J. Seiffert (Berlin, D), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Rieden, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH) und einem unbekannten Absender aus A-4600 Wels.

Das grosse Echo und die reiche Vielfalt der eingesandten Lösungen verdienten es, im Detail gewürdigt zu werden. Leider müssen wir uns auf die Darstellung von zwei Lösungen beschränken und tragen anschliessend zentrale Gedanken, Ergebnisse und Literaturangaben der verschiedenen Autoren zusammen. Die erste Lösung stellt auf elementare Weise eine nicht nur auf Quadrate von Binomialkoeffizienten beschränkte Rekursionsformel her.

Lösung von Walther Janous.

Wir betrachten zuerst die verallgemeinerten Summen

$$Z(n,r,p) := \sum_{j=1}^{n} j^r \binom{n}{j}^p \qquad r,p = 0,1,2,\ldots \quad .$$

Dann gilt für $r \geq p$ folgende Rekursionsbeziehung:

$$Z(n,r,p) = n^p \Big[1 + \sum_{k=0}^{r-p} \binom{r-p}{k} Z(n-1,k,p) \Big] \tag{$*$}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
Z(n,r,p) &= \sum_{j=1}^{n} j^r \binom{n}{j}^p = \sum_{j=1}^{n} j^r \frac{n^p}{j^p} \binom{n-1}{j-1}^p = n^p \sum_{j=1}^{n} j^{r-p} \binom{n-1}{j-1}^p \\
&= n^p + n^p \sum_{j=2}^{n} j^{r-p} \binom{n-1}{j-1}^p = n^p + n^p \sum_{j'=1}^{n-1} (j'+1)^{r-p} \binom{n-1}{j'}^p \\
&= n^p + n^p \sum_{j'=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{r-p} \binom{r-p}{k} j'^k \binom{n-1}{j'}^p \\
&= n^p + n^p \sum_{k=0}^{r-p} \binom{r-p}{k} \sum_{j'=1}^{n-1} j'^k \binom{n-1}{j'}^p \\
&= n^p \Big[1 + \sum_{k=0}^{r-p} \binom{r-p}{k} Z(n-1,k,p) \Big] .
\end{aligned}$$

Das bedeutet also, dass man für festes p nur die Startwerte $Z(n,0,p),\ldots,Z(n,p-1,p)$ bestimmen muss; für $r \geq p$ kann man dann die Rekursionsbeziehung $(*)$ benützen. Hier gilt nun speziell $p = 2: \quad Z(n,r,2) = Q(n,r)$.

$$Q(n,0) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}^2 = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \binom{n}{n-j} = \binom{2n}{n} - 1 \tag{$**$}$$

[Die Gleichung $(**)$ kann wie folgt eingesehen werden: Der Koeffizient von x^n in $(1+x)^{2n}$ ist $\binom{2n}{n}$. Nun ist aber $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$. Somit ist derselbe Koeffizient auch

$$\sum_{k+l=n} \binom{n}{k} \binom{n}{l} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n}{n-j} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \binom{n}{n-j} + 1 .]$$

$$Q(n,1)=\sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}^2=\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}^2=\sum_{j=0}^{n}(n-j)\binom{n}{n-j}^2=\sum_{j=0}^{n}(n-j)\binom{n}{j}^2$$
$$=n(Q(n,0)+1)-Q(n,1)$$

Also ist $2Q(n,1)=n(Q(n,0)+1)$ und damit

$$Q(n,1)=\frac{n}{2}\binom{2n}{n}=\frac{n}{2}\cdot\frac{2n}{n}\binom{2n-1}{n-1}=n\binom{2n-1}{n}\,.$$

Mit der Rekursionsbeziehung $(*)$ fährt man weiter:

$$Q(n,2)=n^2\Big[1+Q(n-1,0)\Big]=n^2\binom{2n-2}{n-1}\;;$$

$$Q(n,3)=n^2\Big[1+Q(n-1,0)+Q(n-1,1)\Big]=n^2\left[\binom{2n-2}{n-1}+(n-1)\binom{2n-3}{n-1}\right]$$
$$=n^2\left[\frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}+\frac{(n-1)(2n-3)!}{(n-1)!(n-2)!}\right]=n^2\frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}\left[1+\frac{n-1}{2}\right]$$
$$=\frac{n^2(n+1)}{2}\binom{2n-2}{n-1}=n^2(n+1)\binom{2n-3}{n-1}\,.$$

Die zweitletzte Formel ist für alle n, die letzte nur für $n\geq 2$ gültig.

Die zweite hier vorgestellte Lösung hebt sich vollständig von allen anderen ab. Sie verzichtet fast ganz auf algebraische Umformungen und verwendet nur ein kombinatorisches Modell (siehe [2]):

Lösung von Werner Raffke.

(1) Aus einer Versammlung von n Frauen und n Männern soll eine Kommission von n Personen gewählt werden. Die Anzahl der möglichen Wahlergebnisse lässt sich auf zweifache Weise bestimmen:

a) Nach Geschlechtern getrennte Abzählung: Es gibt $\binom{n}{j}$ Möglichkeiten, j Frauen aus den n anwesenden Frauen zu wählen und durch $n-j$ Männer zu einer Kommission zu ergänzen. Jede j-Frauen-Auswahl lässt sich mit jeder $(n-j)$-Männer-Auswahl zu einer n-Kommission kombinieren. Also gibt es

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}^2+1$$

Kommissionen.

b) Ganzheitliche Abzählung: Es gibt $\binom{2n}{n}$ Möglichkeiten aus den $2n$ Personen eine Kommission von n Personen auszuwählen. Aus dem Vergleich mit a) ergibt sich

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}^2=\binom{2n}{n}-1\,.$$

(2) Zusätzlich zur Bildung einer n-Kommission wie unter (1) soll ein weibliches Mitglied dieser Kommission zur Vorsitzenden gewählt werden.

a) Getrennte Abzählung: Es gibt bei den j weiblichen Mitgliedern der Kommission $(j = 1, \ldots, n)$ j Wahlmöglichkeiten für den Vorsitz. In der Summe erhält damit der erste Binomialkoeffizient einen Faktor j.

b) Ganzheitliche Abzählung: Es wird eine Vorsitzende aus n Frauen bestimmt, aus der restlichen Versammlung von $2n-1$ Personen werden $n-1$ Kommissionsmitglieder dazu gewählt. Im Vergleich mit a) ergibt sich damit

$$\sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}^2 = n\binom{2n-1}{n-1} = n\binom{2n-1}{n} .$$

(3) Nun wird zusätzlich zu (2) ein Sekretär aus denjenigen männlichen Personen gewählt, die der Kommission nicht angehören.

a) Getrennte Abzählung: Es gibt $\binom{n}{j}$ Möglichkeiten, j Frauen aus n Frauen in die Kommission zu wählen. Nun hat man noch j Möglichkeiten für die Wahl der Vorsitzenden. Dann hat man $\binom{n}{n-j}$ Möglichkeiten, die restlichen $n-j$ Kommissionsmitglieder aus den n Männern auszuwählen. Aus den verbleibenden j Männern wird ein Sekretär bestimmt. Dazu hat man j Möglichkeiten. Zusammen also:

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} j \binom{n}{n-j} j = \sum_{j=1}^{n} j^2 \binom{n}{j}^2 .$$

b) Ganzheitliche Abzählung: Aus n Frauen wird eine Person zur Vorsitzenden bestimmt: n Möglichkeiten. Ebenso wird aus n Männern ein Sekretär ermittelt: n Möglichkeiten. Aus dem Rest von $2n-2$ Personen werden nur noch $n-1$ Mitglieder für die Kommission bestimmt, da ja die Vorsitzende schon gewählt ist: $\binom{2n-2}{n-1}$ Möglichkeiten. Der Vergleich mit a) liefert:

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 \binom{n}{j}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n-1} .$$

(4) Zusätzlich zu den Vorgängen in (3) wird ein Pressesprecher bestimmt, der nicht Kommissionsmitglied sein darf. Personalunion von Sekretär und Sprecher ist zulässig.

a) Getrennte Abzählung: In Analogie zu (3) ergibt sich ein zusätzlicher j-Faktor.

b) Ganzheitliche Abzählung: Hier müssen zwei disjunkte Fälle unterschieden werden. Sind Sekretär und Pressesprecher zwei verschiedene Personen, ergeben sich n Möglichkeiten für die Vorsitzende, n Möglichkeiten für den Sekretär und $n-1$ Möglichkeiten für den Sprecher. Aus den restlichen $2n-3$ Personen werden noch $n-1$ für die Kommission benötigt. Zusammen sind dies $n^2(n-1)\binom{2n-3}{n-1}$ Möglichkeiten. Falls aber der Sekretär zugleich Pressesprecher ist, ergeben sich $n^2\binom{2n-2}{n-1}$ Wahlmöglichkeiten. Insgesamt hat man also

$$n^2(n-1)\binom{2n-3}{n-1}+n^2\binom{2n-2}{n-1}=(n^3+n^2)\binom{2n-3}{n-1}$$

Möglichkeiten. Der Vergleich mit a) liefert wieder die behauptete Formel

$$\sum_{j=1}^{n} j^3\binom{n}{j}^2=n^2(n+1)\binom{2n-3}{n-1}.$$

Sieben Autoren verwenden die Stirlingzahlen zweiter Art $S(n,k)$, die sich mit der gewichteten Rekursionsformel $S(r,k)=S(r-1,k-1)+k\cdot S(r-1,k)$ in der Art der Binomialkoeffizienten berechnen lassen. Als Matrix aufgefasst führen die Stirlingzahlen zweiter Art den Vektor der "Faktoriellen" (*Andersen/Larsen*)

$$[j]_k=j\cdot(j-1)\cdot\ldots\cdot(j-k+1)$$

in den Vektor der Potenzen j^k über:

$$\begin{pmatrix} j^1\\ j^2\\ j^3\\ j^4\\ j^5\\ j^6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&3&1&0&0&0\\1&7&6&1&0&0\\1&15&25&10&1&0\\1&31&90&65&15&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}[j]_1\\ [j]_2\\ [j]_3\\ [j]_4\\ [j]_5\\ [j]_6\end{pmatrix}$$

Verwendet man also $j^r=\sum_{k=1}^{r}S(r,k)[j]_k$, ergibt sich für $Q(n,r)$ eine Doppelsumme, die sich dank der "Faltungsformel" (*Binz*)

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{i\geq 0}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

für $r\geq 1$ in die kürzere Summendarstellung

$$Q(n,r)=\sum_{k=1}^{r}S(r,k)[n]_k\binom{2n-k}{n} \qquad (***)$$

umformen lässt, mit der die verlangten Terme explizit berechnet werden können.

Sechs Autoren haben mit Ableitungen verschiedener Funktionen gearbeitet: *Ulrich Abel* und *F. Grupp* machen einen Koeffizientenvergleich in der Gleichung

$$\left[\frac{\partial^r}{\partial t^r}(1+e^t)^n\right](1+e^t)^n=\sum_{j=1}^{2n}Q(j,r)e^{jt} \quad (r\geq 1)$$

und erhalten so die Darstellung $(***)$ von $Q(n,r)$ mit den Stirlingzahlen. *Hans Kappus* verwendet für $r \geq 1$

$$Q(n,r) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial^r}{\partial t^r}(1+xe^t)^n(1+x)^n\Big|_{t=0}\Big|_{x=0} .$$

Friedhelm Götze stellt die Stirlingzahlen folgendermassen dar:

$$S(r,k) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^r}{\partial t^r}(e^t-1)^k\Big|_{t=0} .$$

Michael Vowe setzt das Polynom

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2 x^j$$

an und erhält

$$Q(n,1) = xP_n'(x)|_{x=1} \; ; Q(n,2) = x(xP_n'(x))'|_{x=1} \; ; Q(n,3) = x(x(xP_n'(x))')'|_{x=1} \; ,$$

und *Roland Wyss* definiert

$$g(n,t) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2 e^{jt} ,$$

leitet zweimal nach t ab und erhält so eine Differentialgleichung, die $g(n,t)$ mit $g(n-1,t)$ in Beziehung bringt. Fortlaufendes Ableiten liefert unter Berücksichtigung von

$$Q(n,r) = \frac{\partial^r}{\partial t^r}g(n,t)\Big|_{t=0} \qquad (r \geq 1)$$

die obige Rekursionsformel $(*)$.

Schliesslich seien noch einzelne Ergebnisse für $r \geq 4$ zusammengetragen. (Die Varianten für $Q(n,4)$ und $Q(n,5)$ gelten nur für $n \geq 2$ oder $n \geq 3$.)

$$\begin{aligned}
Q(n,4) &= \frac{n^2(n^3+n^2-3n-1)}{2(2n-3)}\binom{2n-2}{n-1} && \textit{(Götze/Seiffert/Wyss)}\\
&= \frac{n^2(n^3+n^2-3n-1)}{n-1}\binom{2n-4}{n-2} && \textit{(Abel)}\\
&= \frac{n^2(n^3+n^2-3n-1)}{n-2}\binom{2n-4}{n-1} && \textit{(Widmer)}\\
Q(n,5) &= \frac{n^3(n+1)(n^2+2n-5)}{4(2n-3)}\binom{2n-2}{n-1} && \textit{(Götze/Seiffert/Wyss)}\\
&= \frac{n^3(n+1)(n^2+2n-5)}{n-1}\binom{2n-5}{n-2} && \textit{(Widmer)}\\
Q(n,6) &= \frac{n^2(n^6+3n^5-13n^4-15n^3+30n^2+8n-2)}{4(2n-3)(2n-5)}\binom{2n-2}{n-1} && \textit{(Götze/Wyss)}\\
Q(n,7) &= \frac{n^3(n+1)(n^5+5n^4-15n^3-35n^2+70n-14)}{8(2n-3)(2n-5)}\binom{2n-2}{n-1} && \textit{(Götze)}
\end{aligned}$$

Zusammenstellung der Literaturangaben in den eingesandten Lösungen

[1] L. Comtet: *Advanced Combinatorics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston 1974, S. 221, S. 225.

[2] A. Engel: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 1*. Klett, Stuttgart 1978, S. 42, Aufg. 38 und S. 43, Aufg. 40.

[3] M. Abramowitz and I. A. Stegun (Eds.): *Pocketbook of Mathematical Functions*. Harri Deutsch, Thun/ Frankfurt 1984,

[4] C. Jordan: *Calculus of Finite Differences*. Chelsea/New York 1965.

[5] H. W. Gould: *Combinatorial Identities*. Morgantown 1959, S. 28.

[6] E. R. Hansen: *A Table of Series and Products*. Englewood Cliffs 1975, S. 138.

[7] G. Pólya und G. Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Springer, Berlin et al. 1970, S. 5, S. 158.

Aufgabe 1089 (Die einfache dritte Aufgabe). Gesucht ist ein möglichst einfacher und kurzer Konstruktionsweg der elementargeometrischen Aufgabe, ein regelmässiges Fünfeck in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln.

Franz Mayer, München, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 6 Lösungen eingetroffen: Klaus-Dieter Drews (Rostock, D) Walther Janous (Innsbruck, A), Werner Raffke (Vechta, D), Georg Unger (Dornach, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Rieden, CH).

Die Lösungen von *Klaus-Dieter Drews* und *Werner Raffke* basieren darauf, dass für die Fläche Φ eines regelmässigen n-Eckes $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ gilt:

$$\Phi = \frac{n}{2}\,\overline{A_0A_1}\,\rho \qquad \text{Inkreisradius } \rho$$

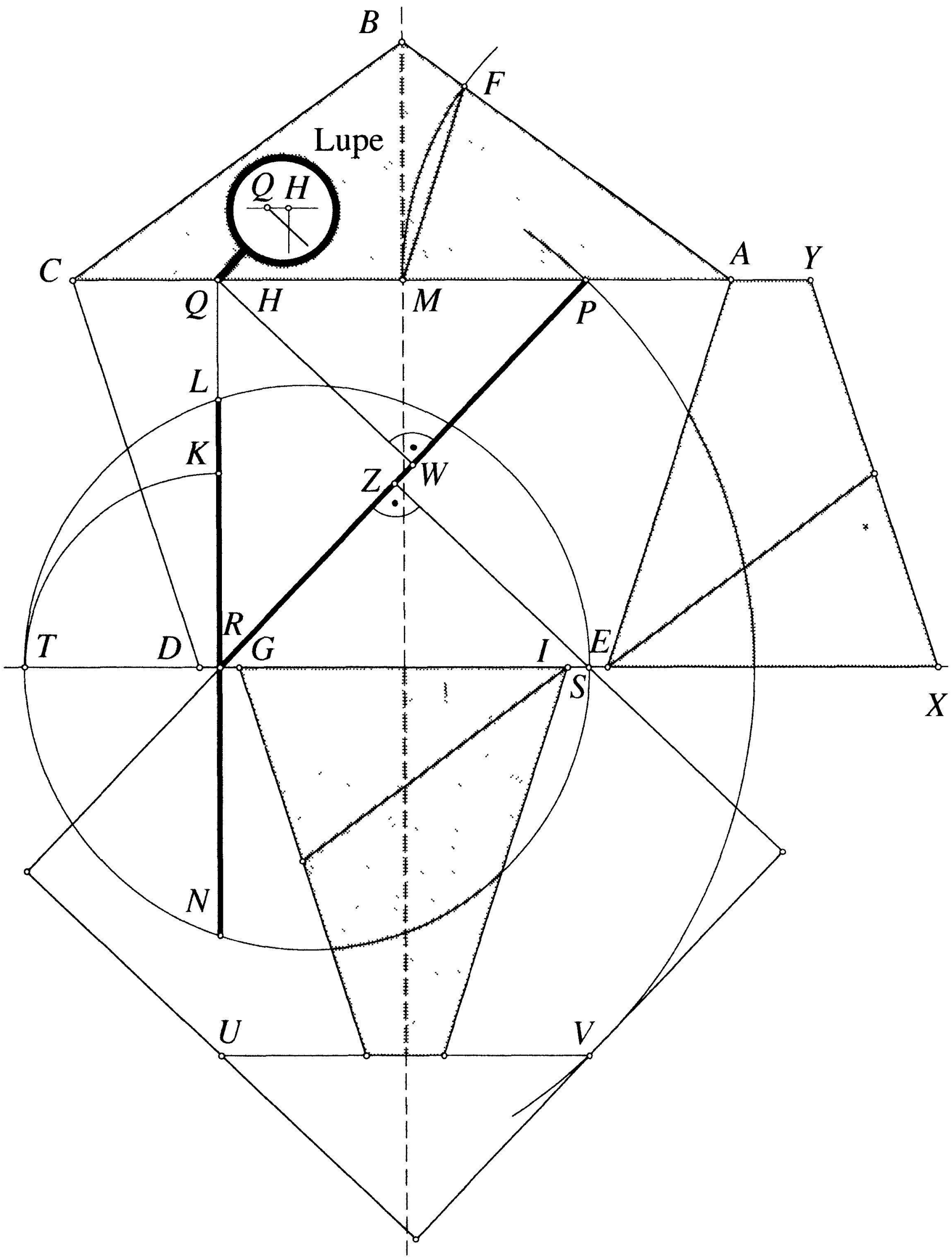
$$\Phi = \frac{n}{4}\,\overline{A_0A_2}\,r \qquad \text{Umkreisradius } r \quad .$$

Entsprechend wird ein Rechteck konstruiert und dieses mit dem Höhensatz in ein flächengleiches Quadrat verwandelt.

Eine spezifische Fünfeckslösung geben *Georg Unger* und *Hansruedi Widmer*: Das durch eine Symmetrieachse halbierte Fünfeck wird mit der üblichen "Eckenverminderungsmethode" in ein flächengleiches rechtwinkliges Dreieck verwandelt, anschliessend wird mit dem Höhensatz weitergearbeitet.

Michael Vowe verwandelt das Fünfeck durch Zerlegen und Neuzusammenfügen in ein Parallelogramm; dieses verwandelt er dann mit den üblichen Methoden in ein Quadrat.

Dieser Ansatz kann zur Konstruktion eines sechsteiligen Puzzles zur Verwandlung eines regelmässigen Fünfeckes in ein Quadrat ausgebaut werden (Figur):



1. Das regelmässige Fünfeck $ABCDE$ wird zuerst mit der Diagonalen AC unterteilt. Durch Abtragen der halben Diagonalen AM an der Seite AB entsteht der Punkt F. Das gleichschenklige Dreieck AMF kann zusammen mit dem Viereck $CMFB$ zu einem gleichschenkligen Trapez zusammengelegt werden. Dieses Trapez mit der Grundseite $AF = GI$ wird schliesslich das Herzstück des gesuchten Quadrates bilden. Dasselbe Trapez kann aber auch als $AEXY$ an das Trapez $ACDE$ gelegt werden. So entsteht ein Parallelogramm $CDXY$, das die gleiche Fläche wie das Fünfeck aufweist. Die Quadratseite ist also das geometrische Mittel der Grundseite DX und der Höhe des Parallelogramms.

2. Zunächst bestimmt man die Mittelpunkte R bzw. S der Reststrecken DG resp. IE, welche entstehen, wenn man die Strecke AF zentrisch auf die Seite DE legt. Da DG und IE zusammen gleich lang sind wie $BF = AY$, ist die Strecke RS gerade die Hälfte der oben erwähnten Parallelogrammseite DX. Fällt man von R aus das Lot auf die Fünfecksdiagonale AC, entsteht der Fusspunkt H. K ist der Mittelpunkt von RH. Ein Kreis mit Mittelpunkt R und Radius RK verlängert die halbe Parallelogrammseite RS um die halbe Trapezhöhe. Ein Thaleskreis über der Gesamtstrecke ST liefert die Strecke RL, die nach dem Höhensatz das geometrische Mittel der halben Parallelogrammseite und der halben Trapezhöhe ist. Die ganze Sehne NL im Thaleskreis ist demnach gerade die gesuchte Quadratseite.

3. Nun bestimmt man P auf AC derart, dass $RP = NL$. Ferner wird Q auf AC so festgelegt, dass $PQ = RS$. (Zufälligerweise scheinen H und Q zusammenzufallen. Dies ist jedoch ein Irrtum, wie die 32-fache Vergrösserung in der beigefügten Lupe zeigt.) Jetzt müssen noch von S resp. Q aus die Lote auf RP gefällt werden. Sie liefern Z resp. W. Punktspiegelungen an S resp. R führen die Fünfecke $SZPAE$ resp. $RWQCD$ satt an das bereits plazierte Trapez im Zentrum des gesuchten Quadrates über. Ausserdem entsteht eine Strecke UV, die wegen $RS = PQ$ gleich lang ist wie PQ und auf die das rechtwinklige Dreieck PQW satt aufgesetzt werden kann. Damit ist die Verwandlung in ein Quadrat abgeschlossen.

Dieses Puzzle wird in [2] abgebildet, dort allerdings ohne Angaben über den geometrischen Hintergrund. Ein anderes sechsteiliges Puzzle hat H.E. Dudeney bereits im 19. Jahrhundert vorgeschlagen ([3]).

W. Moldenhauer (Arnstadt, D) weist darauf hin, dass in [1] die Aufgabe besprochen wird, ein reguläres Fünfeck in sieben Stücke zu zerlegen, aus denen sich ein Quadrat zusammensetzen lässt; die dort beschriebene Zerlegung ist verwandt mit dem hier beschriebenen sechsteiligen Puzzle.

[1] Dörrie, Heinrich: *Mathematische Miniaturen*. Breslau 1943, S. 10, Aufg. 5

[2] van Delft, Pieter/Botermans, Jack: *Denkspiele der Welt*. München 1977, S. 30

[3] Dudeney, H.E.: *Amusements in Mathematics*. Dover Publications, New York 1970, S. 173