Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 50 (1995)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

El. Math. *50* (1995)

0013-6018/95/010031-12$1.50 + 0.20/0
© 1995 Birkhäuser Verlag, Basel

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. August 1995 an:

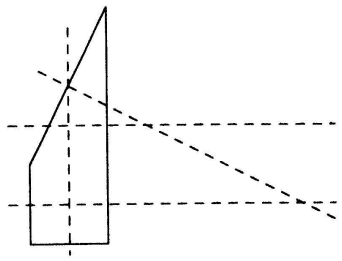
- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma

  oder

- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1093: Bei welchen Vierecken ist das von den Mittelsenkrechten der vier Seiten gebildete Vierseit kongruent zum Ausgangsviereck?

Beispiel:



Hans Walser, Frauenfeld, CH

Aufgabe 1094: Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\left(\frac{\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}}{2}\right)^4} < \mathrm{e} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\left(\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}}{2}\right)^3}$$

(Mit e wird wie üblich die Eulersche Zahl bezeichnet.)

R. Bil, Kiel, D

Aufgabe 1095 (Die einfache dritte Aufgabe): Wie lässt sich die gewichtete arithmetisch-geometrische Ungleichung

$$x^p y^{1-p} < px + (1-p)y\,, \quad 0 < p < 1\,, \quad x > 0\,, \quad y > 0\,, \quad x \neq y$$

zum Beweis der Ungleichung

$$a + b < \left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}}\,, \quad a > 0\,, \quad b > 0\,, \quad a \neq b$$

heranziehen? (Vgl. Aufgabe Nr. 987 in der Lösung von Nr. 1081 in diesem Heft.)

H.-J. Seiffert, Berlin, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 1994

Aufgabe 1081. Es seien a und b zwei verschiedene positive reelle Zahlen, aus denen elementare Mittelwerte gebildet werden. Mit den Bezeichnungen

$$G(a,b) = \sqrt{ab}\,, \qquad A(a,b) = \frac{a+b}{2}\,,$$

$$L(a,b) = \frac{a-b}{\log a - \log b}\,, \qquad I(a,b) = e^{-1}\left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}}$$

beweise man folgende Gleichungen

$$G(a,b) \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2k}\right) = A(a,b)\,, \tag{1}$$

$$G(a,b) \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2k}\right) = I(a,b)\,, \tag{2}$$

$$G(a,b) \cdot \exp\left(\frac{A(a,b) - L(a,b)}{L(a,b)}\right) = I(a,b)\,. \tag{3}$$

H.-J. Seiffert, Berlin, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 10 Lösungen eingetroffen: Francisco Bellot (Valladolid, E), G. Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Kappus (Rodersdorf, CH), Dieter Koller (Zürich, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Johannes Waldmann (Jena, D) und ein unbekannter Absender aus A-4600 Wels.

Alle Einsender verwenden die Reihenentwicklungen für $\ln(1+x^2)$ und $\operatorname{artanh}(x)$, welche sich in (1) und (2) bereits ankündigen. Die verschiedenen Lösungen unterscheiden sich nur in ihrer Ausführlichkeit und Übersichtlichkeit. Wir folgen hier im wesentlichen der Lösung von Friedhelm Götze:

Lösung. Zum Beweis von (1) und (2) benutze man die Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} = -\log(1-x^2)\,, \quad x^2 < 1\,, \tag{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\log\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)\,, \quad -1 < x < 1\,. \tag{5}$$

Ausserdem wird im folgenden bei allen Umformungen $a > 0, b > 0, a \neq b$ vorausgesetzt. Setzt man $x = \frac{a-b}{a+b}$, so gilt $|x| < 1$ und die Konvergenz der beiden Potenzreihen ist gesichert. Aus (4) ergibt sich zunächst mit $x^2 = (\frac{a-b}{a+b})^2$ und $1 - x^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}\Big(\frac{a-b}{a+b}\Big)^{2k} = -\frac{1}{2}\log\frac{4ab}{(a+b)^2} = \log\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \log\frac{A(a,b)}{G(a,b)}\,,$$

woraus die Gleichung (1) durch Exponentieren folgt.

Für die Reihe aus (2) findet man mit Hilfe von (5) und $\frac{1+x}{1-x} = \frac{a}{b}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\Big(\frac{a-b}{a+b}\Big)^{2k} &= -1 + \frac{a+b}{a-b}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\Big(\frac{a-b}{a+b}\Big)^{2k+1} \\ &= -1 + \frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{1}{2}\log\frac{a}{b} \\ &= -1 + \frac{1}{2}\log\Big(\frac{a}{b}\Big)^{\frac{a+b}{a-b}} = -1 + \frac{1}{2}\log\frac{a^{\frac{2a}{a-b}-1}}{b^{\frac{2b}{a-b}+1}} \\ &= -1 + \log\Big(\frac{a^{\frac{a}{a-b}}}{b^{\frac{b}{a-b}}}\cdot\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\Big) = \log\frac{I(a,b)}{G(a,b)}\,,\end{aligned} \tag{6}$$

woraus die Gleichung (2) wiederum durch Exponentieren folgt.

Ausgehend von (6) gilt andererseits

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\Big(\frac{a-b}{a+b}\Big)^{2k} &= \frac{a+b}{2}\cdot\frac{\log a - \log b}{a-b} - 1 \\ &= A(a,b)\cdot\frac{1}{L(a,b)} - 1 = \frac{A(a,b)-L(a,b)}{L(a,b)}\,.\end{aligned}$$

Wegen dieses Zusammenhangs kann man die Gleichung (2) auch in Gestalt von (3) angeben, womit alles bewiesen ist.

Anmerkungen. Der Verfasser der Aufgabe möchte darauf hinweisen, dass mit Hilfe von (1), (2) und (3) die folgenden drei Ungleichungen rund um das sogenannte "identic mean" $I(a,b)$ einfach zu beweisen sind:

$$G\cdot A < L\cdot I \quad \text{(H. Alzer, 1986)}\,,$$

$$\frac{G}{I} + \frac{A}{L} > 2\,,$$

$$\Big(\frac{I}{G}\Big)^{L} < \Big(\frac{A}{L}\Big)^{A}\,.$$

Ausserdem ist mit (1) und (2) die Aufgabe Nr. 987 (von H. Alzer (Waldbröl, D) in El. Math. 44 (1989), p. 83) in folgender Weise sehr elegant zu lösen.

Aufgabe 987. Es sind beste Schranken r und s zu finden, so dass gilt

$$\left(\frac{a+b}{r}\right)^{b-a} < \left(\frac{e}{a}\right)^a \left(\frac{b}{e}\right)^b < \left(\frac{a+b}{s}\right)^{b-a} \quad . \tag{7}$$

Lösung. Man betrachte die Abschätzung

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-1}\right)\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-1}\right) = 1 - \log 2 \quad ,$$

woraus durch Exponentieren und mit Einbezug von (1) und (2) die Ungleichung

$$1 \leq \frac{A}{I} \leq \frac{e}{2}$$

folgt. Dabei sind 1 und $\frac{e}{2}$ die bestmöglichen Schranken, was im Vergleich mit (7) auf $r = e$ und $s = 2$ führt.

Aufgabe 1082. Es sei $p \geq 2$ eine natürliche Zahl. Man beweise oder widerlege die folgende Aussage über den ganzen Teil zweier Terme: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lfloor n^{\frac{1}{p}} + (n+1)^{\frac{1}{p}} \rfloor = \lfloor (2^p n + 2^{p-1} - 1)^{\frac{1}{p}} \rfloor.$$

Hans Kappus, Rodersdorf, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Zu dieser Aufgabe ist keine Lösung eingegangen. Joachim Klose (Bonn, D) kommt in einer umfangreichen Untersuchung zum Schluss, dass die Zahlen p, für welche die Aussage der Aufgabe nicht zutrifft, höchstens "spärlich" und "isoliert" auftreten können. Ein Gegenbeispiel wurde allerdings nicht gefunden, so dass die Aufgabe immer noch offen ist.

Aufgabe 1083 (Die einfache dritte Aufgabe). Um die Höhe h eines Ballons über dem Boden zu bestimmen, werden von den Eckpunkten A, B und C eines bekannten, horizontalen Dreiecks aus die drei Höhenwinkel α, β und γ gemessen, unter denen man den Ballon von diesen Punkten aus sichtet. Man bestimme h nicht nur rechnerisch, sondern auch konstruktiv aus folgenden Daten: $\overline{BC} = a = 13$ km; $\overline{CA} = b = 15$ km; $\overline{AB} = c = 14$ km; $\alpha = 54.74°$; $\beta = 39.23°$; $\gamma = 32.31°$.

Rolf Rose, Magglingen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind sechs Lösungen zu dieser Aufgabe eingetroffen: Hans Irminger (Wetzikon, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Kappus (Rodersdorf, CH), Dieter Koller (Zürich, CH), Georg Unger (Dornach, CH), Michael Vowe (Therwil, CH). Im folgenden die Lösung nach Michael Vowe:

Konstruktive Lösung: Wir bezeichnen den Fusspunkt des Ballons in der Dreiecksebene mit F und die Strecken $\overline{AF}$, $\overline{BF}$ und $\overline{CF}$ mit u, v resp. w. Wegen $\tan\alpha = h/u$, $\tan\beta = h/v$ und $\tan\gamma = h/w$ ergibt sich $u : v = \tan\beta : \tan\alpha$ und $u : w = \tan\gamma : \tan\alpha$. Der Punkt F kann also mit Apolloniuskreisen konstruiert werden. Aus u und α ist dann auch h konstruierbar.

Rechnerische Lösung: Von Euler stammt eine Formel für die Berechnung des Volumens V eines Tetraeders, dessen sechs Kanten a, b, c, p, q und r gegeben sind [1]:

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & p^2 & q^2 & r^2 & 1 \\ p^2 & 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ r^2 & b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Mit $a = 13$, $b = 15$, $c = 14$, $p = h/\sin\alpha = h\sqrt{3/2}$, $q = h/\sin\beta = h\sqrt{5/2}$, $r = h/\sin\gamma = h\sqrt{7/2}$ und

$$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\sqrt{21\cdot 8\cdot 6\cdot 7}\cdot h = 28h$$

ergibt sich die biquadratische Gleichung für h:

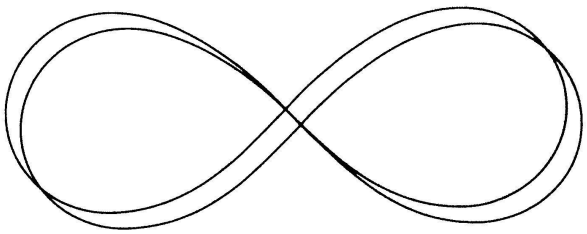
$$505h^4 - 165564h^2 + (13\cdot 14\cdot 15)^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen für h: $h_1 = 7.3392\ldots$ km und $h_2 = 16.5524\ldots$ km.

[1] R. Stärk: Beispiele zur Anwendung eines Computeralgebrasystems in der Geometrie. El. Math. 48 (1993), 108.

Ergänzungen zu den Aufgaben 1070 und 1074

Aufgabe 1070. Ein Freund bringt mir einen achterförmigen Papierstreifen, gefertigt aus einem um 360° verdrehten geschlossenen Band mit Einschnitten an gegenüberliegenden Stellen, so dass die Ränder zwei in parallelen Ebenen liegende Kurven sind.



Die Randkurven sehen der Bernoullischen Lemniskate sehr ähnlich. Man bestimme den Unterschied zwischen Lemniskate und der elastischen Achterschleife praktisch und prinzipiell.

Georg Unger, Dornach, CH

Auswertung der Zuschriften. Nach einer Verlängerung der Einsendefrist von August 1993 auf August 1994 sind einige Beiträge eingetroffen. Allen voran weist Rolfdieter Frank (Darmstadt, D) darauf hin, dass bereits Leonhard Euler vor genau 250 Jahren das Problem der elastischen Kurven gelöst hat [1]. Sodann war der Aufgabensteller Georg Unger (Dornach, CH) auf seiner Suche nach einer geschlossenen Parameterdarstellung erfolgreich. Schliesslich hat sich Anne Drangeid (Zürich, CH) zur Eulerschen Differentialgleichung geäussert.

Auszug aus Eulers Schrift nach Rolfdieter Frank. In einem Brief an Euler wies 1742 Daniel Bernoulli darauf hin, dass die Energie, die ein gekrümmtes elastisches Band enthält, proportional ist zu $\int_0^L \frac{1}{R^2} ds$ (R = Krümmungsradius, s = Bogenlänge, L = Länge des Bandes) und dass dieser Ausdruck bei der elastischen Kurve ein Minimum werden muss. Bernoulli fügte hinzu: "Da niemand die isoperimetrische Methode (d.h. die Variationsrechnung, die Euler begründet hat) so vollkommen beherrscht wie Sie, werden Sie dieses Problem ... gar leicht solvieren." Euler löste das Problem wie folgt:

Ist die Kurve durch $y = y(x)$ gegeben, so gilt $R = \frac{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ und $ds = \sqrt{1+(y')^2}dx$. Daher ist

$$\int_0^L \frac{1}{R^2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \frac{(y'')^2}{(1+(y')^2)^{\frac{5}{2}}} dx\,, \tag{1}$$

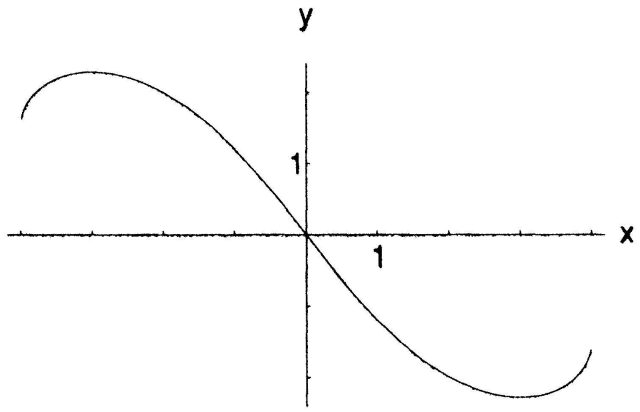
und dieser Ausdruck muss ein Minimum werden unter der Nebenbedingung

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}dx = L\,. \tag{2}$$

Mit den Methoden der Variationsrechnung, die im nächsten Abschnitt genauer dargelegt werden, folgt hieraus bei geeigneter Wahl des Koordinatenursprungs die Differentialgleichung

$$y' = \frac{a^2 - c^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}\,, \tag{3}$$

welche nicht elementar integrierbar ist. Jede ihrer Lösungskurven ist nur für $-c \leq x \leq c$ definiert und hat an den Randstellen $x = \pm c$ senkrechte Tangenten. Wegen $y'(x) = y'(-x)$ ist sie punktsymmetrisch zu ihrem Schnittpunkt mit der y-Achse. Die folgende Figur zeigt das Ergebnis einer numerischen Integration mit $c = 4$, $a = 3$ und $y(0) = 0$.



Indem Euler die rechte Seite der Differentialgleichung (3) in eine Potenzreihe in $\sqrt{c^2 - x^2}$ entwickelt und dann gliedweise integriert, erhält er

$$y(c) = \int_0^c y' dx = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{c^2}{2a^2} - \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{c^4}{4a^4} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{c^6}{8a^6} - \cdots\right)$$

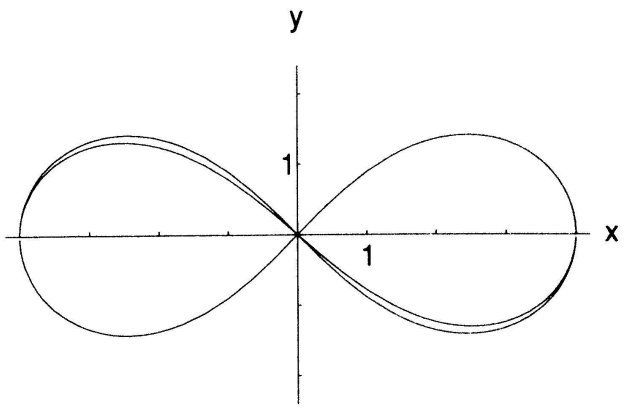
für jede Lösungskurve durch den Koordinatenursprung. Ist diese nun die Hälfte einer geschlossenen Acht, so gilt $y(c) = 0$, d. h. $v := \frac{c^2}{2a^2}$ muss die Gleichung

$$1 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}v + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}v^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}v^3 + \cdots$$

erfüllen. Hieraus berechnet Euler $v \approx 0.835934$. Für den Winkel ϕ zwischen den beiden Tangenten im Kreuzungspunkt gilt

$$\tan\frac{\phi}{2} = y'(0) = \frac{a^2 - c^2}{c\sqrt{2a^2 - c^2}} = \frac{1 - 2v}{2\sqrt{v - v^2}}.$$

Dies ergibt $\phi \approx 81.365°$. Die folgende Figur zeigt die zu diesem Wert von v und $c = 4$ gehörige Lösungskurve als halbe Acht im Innern der in der Aufgabenstellung angesprochenen vollständigen Bernoullischen Lemniskate $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-2x^2 - c^2 + \sqrt{8c^2x^2 + c^4}}$, welche einen Kreuzungswinkel von 90° aufweist.



Eulersche Differentialgleichung nach Anne Drangeid. Das vorgegebene Problem ist eine Extremalaufgabe mit Nebenbedingung: Das Integral (1) $\int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y', y'')dx$ soll unter der Nebenbedingung (2) $\int_{x_1}^{x_2} N(x, y, y', y'')dx = L$ extremal werden. Nach einem Satz von Euler [2] lässt sich die Nebenbedingung durch Einführung eines Lagrange-Multiplikators λ so einbauen, dass nur noch das Integral $\int_{x_1}^{x_2} H(x, y, y', y'')dx$ mit $H = G + \lambda N$ extremal gemacht werden muss. Durch Betrachten von Nachbarfunktionen von $y = y(x)$ erhält man daraus die Eulersche Differentialgleichung

$$H_y - \frac{d}{dx}H_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}H_{y''} = 0.$$

Dabei wird jeweils nach den im Index angegebenen Variablen partiell abgeleitet. Da hier H nur nur von y' und y'' abhängt, ist zunächst einmal $H_y = 0$, was eine erste Integration über x erlaubt und eine Konstante C_1 zur Folge hat:

$$H_{y'} - \frac{d}{dx} H_{y''} = C_1 . \tag{4}$$

Da $H(y', y'')$ auch von x nicht abhängt, ist es von Vorteil, in (4) die totale Ableitung nach x auszuführen:

$$H_{y'} - H_{y''y'} y'' - H_{y''y''} y''' = C_1 .$$

Multipliziert man diese Gleichung mit y'' und addiert links $0 = H_{y''} y''' - H_{y''} y'''$, ergibt sich $H_{y'} y'' + H_{y''} y''' - H_{y''} y''' - y'' H_{y''y'} y'' - y'' H_{y''y''} y''' = C_1 y''$, was ein totales Differential

$$\frac{d}{dx}\left(H - y'' H_{y''}\right) = C_1 y''$$

darstellt und eine erneute Integration erlaubt:

$$H - y'' H_{y''} = C_1 y' + C_2 .$$

Jetzt werden die konkreten Integranden

$$G(y', y'') = \frac{(y'')^2}{(1 + (y')^2)^{\frac{5}{2}}} \quad \text{und} \quad N(y') = \sqrt{1 + (y')^2}$$

aus (1) und (2) in $H = G + \lambda N$ eingesetzt, was die Differentialgleichung

$$\frac{(y'')^2}{(1 + (y')^2)^{\frac{5}{2}}} + \lambda \sqrt{1 + (y')^2} - y'' \frac{2y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{5}{2}}} = C_1 y' + C_2$$

liefert, die noch etwas übersichtlicher dargestellt werden kann:

$$(y'')^2 = \left(1 + (y')^2\right)^3 \left(\lambda - \frac{C_1 y' + C_2}{\sqrt{1 + (y')^2}}\right) .$$

Diese Differentialgleichung wird für $C_2 = 0$ von y' aus (3) erfüllt, wobei C_1 und λ durch a und c festgelegt werden.

Die Bernoullische Methode nach Georg Unger. Jakob Bernoulli hat vor genau 300 Jahren [3] einen ganz anderen Weg zur Lösung des Problems der Elastica gewählt. Während Euler die Biegeenergie zu einem Minimum macht, verwendet Bernoulli die Proportionalität von Krümmung und Biegemoment. Unger verwendet diese Methode und kommt so sehr rasch auf eine Differentialgleichung für die gesuchte Kurve: Das elastische Band sei im Punkt $P(x/y)$ so eingespannt, dass die Tangente an das Band mit der x-Achse den Winkel τ einschliesst. Das Band gehe durch den Ursprung. Dort greife die zur x-Achse parallele Kraft K an. Dann ist das Biegemoment bezüglich P einerseits $-K \cdot y$ und andererseits $f \cdot \frac{d\tau}{ds}$, wobei s die Bogenlänge des Bandes und f eine Materialkonstante

bedeuten. Um auf eine Differentialgleichung für $\tau(s)$ zu kommen, differenziert man $-K \cdot y = f \cdot \frac{d\tau}{ds}$ nach s und verwendet $\frac{dy}{ds} = \sin\tau$:

$$-K \cdot \sin\tau = f\frac{d^2\tau}{ds^2}. \tag{5}$$

Diese Differentialgleichung ist strukturgleich mit derjenigen für das mathematische Pendel mit dem Auslenkungswinkel ψ, der Pendellänge l, der Gravitationskonstanten g und der Zeit t:

$$-g \cdot \sin\psi = l\frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

Nun multipliziert man die Gleichung (5) mit $\frac{d\tau}{ds}$ und kann sie dann nach s integrieren:

$$K \cdot \cos\tau + C = \frac{f}{2}\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2.$$

Setzt man $C = -K\cos\alpha$ so ergibt sich

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 = \frac{K}{f}(\cos\tau - \cos\alpha) \quad \text{oder} \quad ds = \frac{d\tau}{\sqrt{\frac{2K}{f}(\cos\tau - \cos\alpha)}}.$$

Weil für $\tau = \alpha$ die Ableitung $\frac{d\tau}{ds} = 0$ wird, bedeutet α den Steigungswinkel der Wendetangente. Verwendet man jetzt $dx = ds\cos\tau$ und $dy = ds\sin\tau$ und setzt den Grössenfaktor $\frac{2K}{f} = 1$, so erhält man eine Parameterdarstellung der gesuchten Kurve:

$$x(t) = \int_0^t \frac{\cos\tau d\tau}{\sqrt{\cos\tau - \cos\alpha}} \quad \text{und} \quad y(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau d\tau}{\sqrt{\cos\tau - \cos\alpha}}. \tag{6}$$

Mit Hilfe der Elliptischen Integrale erster und zweiter Art

$$F(\Phi, m) = \int_0^\Phi (1 - m\sin^2\nu)^{-\frac{1}{2}} d\nu \quad \text{und} \quad E(\Phi, m) = \int_0^\Phi (1 - m\sin^2\nu)^{\frac{1}{2}} d\nu$$

kann man diese Parameterdarstellung geschlossen schreiben. Dazu wird in (6) die Substitution

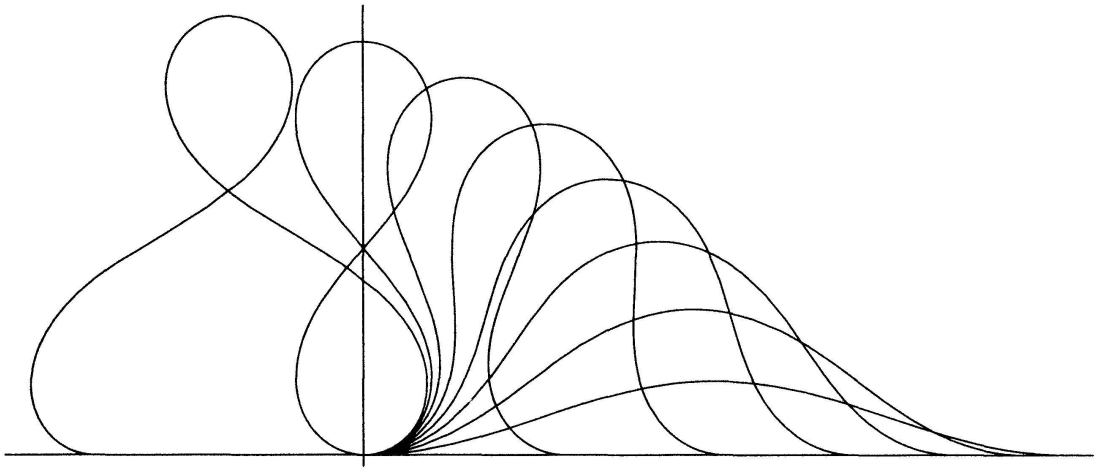
$$\sin\nu = \frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

ausgeführt. Damit erhält man nach längerer Rechnung

$$x(\nu) = \sqrt{2}\left(2E\left(\nu, \sin\frac{\alpha}{2}\right) - F\left(\nu, \sin\frac{\alpha}{2}\right)\right) \quad \text{und} \quad y(\nu) = 2\sqrt{2}(1 - \cos\nu)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Die folgende Figur zeigt die Lösungskurven für die Wendetangentenwinkel $\alpha = i \cdot \frac{130.7°}{7}$, wobei $i \in \{1, \cdots, 8\}$. Den Steigungswinkel 130.7° hat man numerisch so bestimmt,

dass der erste Wendepunkt gerade auf die y-Achse fällt. Daraus berechnet sich durch $2(130.7° - 90°) = 81.4°$ der bekannte Kreuzungswinkel der geschlossenen Acht.



[1] J. Bernoulli u. L. Euler: *Abhandlungen über das Gleichgewicht und die Schwingungen der ebenen elastischen Kurven*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Leipzig 1910.

[2] W.I. Smirnow: *Lehrgang der höheren Mathematik*, Teil IV, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968.

[3] C. Truesdell in Euler: *Opera Omnia 2*.

Entgegnung zur Lösung von Aufgabe 1074 von Klaus-Dieter Drews, Rostock, D.

In der Aufgabe 1074 (El. Math. 48 (1993), p. 80) wurden den ersten beiden Potenzgesetzen Logarithmengesetze als Partner gegenübergestellt. Für das dritte Potenzgesetz sollte ein entsprechender Partner noch gefunden werden. Angeregt durch die Schlussbemerkung in der Lösung zur Aufgabe 1074 (El. Math. 49 (1994), p. 83) analysiere ich hier die Herleitbarkeit des dritten Potenzgesetzes und die vermeintliche Unnötigkeit seines Partners.

Wir vermeiden weitgehend die Schreibweise a^n und betrachten Funktionen $F(a,n)$ mit positiven reellen Zahlen a und n sowie die sogenannten Potenzgesetze

$$F(a,n) \cdot F(a,m) = F(a,n+m)\,, \tag{1}$$

$$F(F(a,n),m) = F(a,n \cdot m)\,, \tag{2}$$

$$F(a,n) \cdot F(b,n) = F(a \cdot b,n)\,. \tag{3}$$

1. Gleichung (1) ist die Funktionalgleichung der **Exponentialfunktionen.** Wählt man die positive reelle Zahl $F(a,1)$, so besitzt (1) die einzige in n stetige Lösung

$$F(a,n) = (F(a,1))^n\,.$$

Für $F(a,1) \neq 1$ besitzt $u = F(a,n)$ in n eine Umkehrfunktion $n = \phi(a,u)$, und aus (1) folgt äquivalent das dem Potenzgesetz (1) gegenüberstehende Logarithmengesetz:

$$\begin{aligned}\phi(a,u \cdot v) &= \phi(a,F(a,\phi(a,u)) \cdot F(a,\phi(a,v)))\\ &= \phi(a,F(a,\phi(a,u)+\phi(a,v)))\\ &= \phi(a,u)+\phi(a,v)\,.\end{aligned}$$

Wegen der freien Wahl von $F(a,1)$ und $F(b,1)$ haben die Funktionen $F(a,n)$ und $F(b,n)$ zunächst keine Beziehung zueinander. Sämtliche stetigen Lösungen von (1) können jedoch auf eine einzige, z. B. auf $F(\mathrm{e},n)$ (e ist die Eulersche Zahl) zurückgeführt werden durch

$$F(a,n) := F(\mathrm{e}, n \cdot \phi(\mathrm{e}, \frac{F(\mathrm{e},1)}{\mathrm{e}} \cdot a)),$$

wobei man $F(a,1) = \frac{F(\mathrm{e},1)}{\mathrm{e}} \cdot a$ gewählt hat.

Anmerkung 1a: Mit

$$F(a,n) = (2a)^n$$

haben wir Beispiele von Funktionen, die zwar Gleichung (1), **nicht aber** Gleichung (3) erfüllen.

Anmerkung 1b: Fordert man $F(\mathrm{e},1) = \mathrm{e}$ und damit allgemein $F(a,1) = a$, so stellt dies einen Zusammmenhang zwischen den Anfangswerten der Exponentialfunktionen $F(a,n)$ und den Werten der linearen Potenzfunktion her. Dann gilt für die $F(a,n)$ auch die Gleichung (3):

$$\begin{aligned} F(a,n) \cdot F(b,n) &= F(\mathrm{e}, n \cdot \phi(\mathrm{e},a)) \cdot F(\mathrm{e}, n \cdot \phi(\mathrm{e},b)) \\ &= F(\mathrm{e}, n \cdot (\phi(\mathrm{e},a) + \phi(\mathrm{e},b))) \\ &= F(\mathrm{e}, n \cdot \phi(\mathrm{e}, a \cdot b)) \\ &= F(a \cdot b, n). \end{aligned}$$

2. Die Gleichung (3) ist die Funktionalgleichung der **Potenzfunktionen**. Durch die Festlegung

$$F(a,n) := a^{\ln F(\mathrm{e},n)}$$

konstruieren wir Lösungen von (3). Dabei schränken wir uns auf rationale Exponenten $\ln F(\mathrm{e},n)$ ein, damit die üblichen Wurzelgesetze zur Verifikation von (3) herangezogen werden können.

Anmerkung 2a: Mit

$$F(a,n) = a^{2 \cdot n^2}$$

haben wir Beispiele von Funktionen, die zwar Gleichung (3), **nicht aber** Gleichung (1) und auch nicht Gleichung (2) erfüllen.

Anmerkung 2b: Fordert man $F(\mathrm{e},n) = \mathrm{e}^n$, so stellt dies einen Zusammenhang zwischen den Anfangswerten der Potenzfunktionen $F(a,n)$ und den Werten der Exponentialfunktion e^n her. Dann lassen sich für die $F(a,n)$ auch die Gleichungen (1) und (2) mit Hilfe der Wurzelgesetze beweisen.

3. Die Ausführungen zeigen, dass (1) und (3) unabhängige Axiome sind, andererseits jedoch bei entsprechendem Aufbau gegenseitig beweisbar werden. Beides scheint mir somit kein Grund für das Fehlen eines Partners von (3) zu sein. Wie den Gleichungen (1) und (2) äquivalente Gesetze der Umkehrfunktion entsprechen, könnte dies auch bei

(3) sein. Ist nun $a = \psi(u,n)$ die Umkehrfunktion von $u = F(a,n)$, so folgt aus (3) äquivalent

$$\begin{aligned}\psi(u,n)\cdot\psi(v,n) &= \psi(F\big(\psi(u,n)\cdot\psi(v,n),n\big),n)\\ &= \psi(F\big(\psi(u,n),n\big)\cdot F\big(\psi(v,n),n\big),n)\\ &= \psi(u\cdot v,n)\,.\end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion genügt demnach derselben Funktionalgleichung!

Partner der Gleichung (3) ist also die Gleichung selbst; die Umkehrfunktion einer Potenzfunktion $u = F(a,n) = a^n$ ist wieder eine Potenzfunktion. Man nutzt dies schon in der Bezeichung $a = \psi(u,n) = u^{\frac{1}{n}}$. Damit folgt, dass der Partner zu $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$ das Gesetz $u^{\frac{1}{n}} \cdot v^{\frac{1}{n}} = (u\cdot v)^{\frac{1}{n}}$ ist, was bei beliebigem n nur eine geänderte Schreibweise für das gleiche Gesetz bedeutet.