

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 49 (1994)  
  
**Artikel:** Optimale Steuerungen : eine Einführung  
**Autor:** Walden, Rainer  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45415>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

# Optimale Steuerungen. Eine Einführung.

---

Rainer Walden

Rainer Walden wurde 1943 geboren. Er studierte Mathematik und Physik an der Technischen Universität Berlin und promovierte 1973 dort über ein Thema aus der Differentialgeometrie. Nach einigen Jahren Tätigkeit als Industriemathematiker wurde er Fachhochschullehrer an der Gesamthochschule Paderborn. Seit dieser Zeit gilt sein Interesse den Anwendungen der Mathematik im Bereich des Operations Research und der Luft- und Raumfahrt.

## 1 Einleitung

Mathematische Techniken werden immer mehr Bestandteil der Ingenieurtechnologie. Wir finden sie bei der Signalverarbeitung in der Nachrichtentechnik, in der medizinischen Meßtechnik, bei der Auslegung der Aerodynamik von Flugzeugen, bei Strukturberechnungen und in Crashsimulationen von Fahrzeugen, in der chemischen Verfahrenstechnik und natürlich in der Luft- und Raumfahrt, kurz in allen Bereichen der Hochtechnologie. Das Zusammenwirken von technischer und mathematischer Forschung und Entwicklung, gekoppelt mit dem rasanten Fortschritt der Computertechnologie, ist intensiv und bringt stets neue Zweige der wissenschaftlich-technischen Betätigung hervor.

Hier soll von der mathematischen Technik der Optimalen Steuerung (*Optimal Control*) die Rede sein, die ihre Entstehung hauptsächlich der in der Mitte unseres Jahrhunderts aufkommenden Luft- und Raumfahrt zu verdanken hat. Wie bei vielen anderen Entwicklungen auch, traten zunächst die Militärs als Geldgeber auf, mit entsprechenden Zielvorstellungen über Forschungsrichtungen und Anwendbarkeit. Inzwischen gibt es darüber hinaus viele zivile Anwendungsbereiche.

Steuerungs- und Regelungsprobleme sind in der Technik allgegenwärtig; sie reichen von der Regelung eines chemischen Reaktors über die automatische Steuerung eines Grossflugzeuges beim Landeanflug bis zur Berechnung der Bahn eines künstlichen Satelliten beim Eintritt in die Erdatmosphäre. Angesichts der Komplexität solcher Probleme ist es nicht verwunderlich, dass ihre mathematische Behandlung einen erheblichen Aufwand erfordert. — In seinem Beitrag geht Rainer Walden vom klassischen Problem der Brachistochrone aus, indem er dieses als Steuerungsproblem auffasst. Überblicksmässig beschreibt er das in der modernen Technik so wichtig gewordene Gebiet der "Optimalen Steuerung" und die mathematischen Methoden, die hier entwickelt worden sind. *usr*

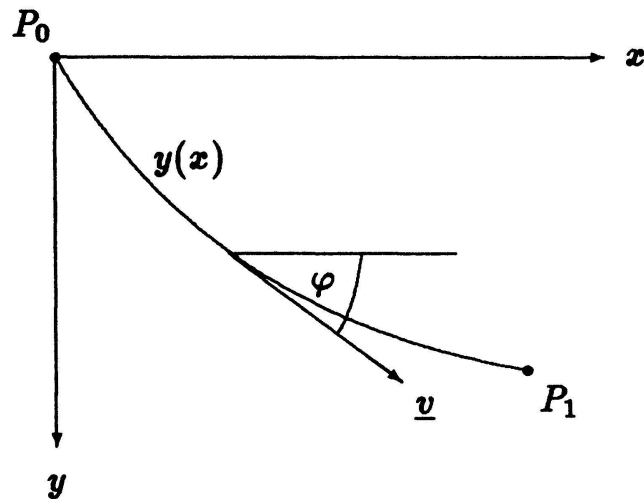


Fig. 1 Das Problem der Brachistochrone

Den Beginn der Entwicklung der theoretischen Grundlagen kann man Mitte des 17. und Anfang des 18. Jahrhunderts sehen, mit der systematischen Untersuchung von Optimierungsproblemen. Schon Pierre Fermat (1601-1665) stellte Untersuchungen über die Optimierung von Funktionen auf endlichdimensionalen Räumen an. Heute bezeichnen wir ein derartiges Problem als *Parameteroptimierungsproblem*, üblicherweise geschrieben in Form einer Minimierungsaufgabe,

$$f(\underline{x}) \rightarrow \text{Min}, \quad \underline{x} \in B \subset \mathbb{R}^n.$$

$B$  bezeichnet den zulässigen Bereich, in dem das Minimum gesucht wird.

Bald ging man mit den sich entwickelnden Methoden der Analysis auch die Optimierung von Funktionalen an, also von Funktionen, die auf (unendlichdimensionalen) Funktionenräumen definiert sind. Am Anfang stand das berühmte *Problem der Brachistochrone* von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1696.

Wir wollen dieses klassische Beispiel genauer betrachten und im folgenden als Steuerungsproblem formulieren. Im Griechischen bedeutet *brachys* kurz und *chronos* Zeit. Es handelt sich also um eine Minimalzeitaufgabe.

Gegeben sind zwei Punkte  $P_0$  und  $P_1$  in der vertikalen Ebene. Eine Kugel rollt unter dem Einfluß der Schwerkraft reibungsfrei längs einer Verbindungskurve  $y(x)$  vom oberen Punkt  $P_0$  zum unteren Punkt  $P_1$ . Dazu benötigt sie eine gewisse Zeit  $T$ , die von der geometrischen Gestalt der Kurve abhängig ist. Gesucht wird die Kurve mit der kürzesten Rollzeit  $T$ .

Die Lösungskurve ist bekanntlich ein Stück einer Zykloide (siehe z.B. [1], S. 11). Die Rollzeit berechnet sich gemäß

$$J = \int_0^T dt = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx$$

wobei  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $P_1 = (x_1, y_1)$  gesetzt wurde,  $g$  die Erdbeschleunigung bedeutet und  $y(x)$  eine  $P_0$  und  $P_1$  verbindende Kurve ist, d.h.  $y(x_0) = y_0$ ,  $y(x_1) = y_1$ .  $J$  ist also

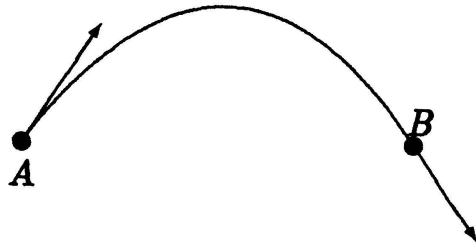


Fig. 2 Zur Nichtexistenz von Lösungen

ein Funktional, definiert auf dem Funktionenraum der stetig differenzierbaren Funktionen  $y(x)$ , die die Randbedingungen erfüllen. Wir wollen  $J$  auf diesem Funktionenraum minimieren.

Die Entwicklung notwendiger und hinreichender Kriterien für die Optimalität von  $J$  ist Gegenstand der Variationsrechnung, die u.a. mit den Namen der Brüder Jakob (1654–1705) und Johann (1667–1748) Bernoulli, Leonhard Euler (1707–1783), Joseph Louis Lagrange (1736–1813), Carl Jacobi (1804–1851) und Karl Weierstrass (1815–1897) verbunden ist. Als schwierig, in der Variationsrechnung und der Theorie der Optimalen Steuerungen, hat sich das Existenzproblem erwiesen. Erst in unserem Jahrhundert und mit den Hilfsmitteln der Funktionalanalysis konnte der Sachverhalt befriedigend geklärt werden. Die intuitiv gewählten Funktionenräume, auf denen  $J$  minimiert werden soll, sind oft zu klein, um die Lösung zu enthalten. Sie müssen vervollständigt und mit der richtigen Topologie versehen werden. Beispielsweise hat das Problem, die kürzeste Verbindungskurve von  $A$  nach  $B$  mit den angegebenen Tangenten in Abbildung 2 zu finden, keine Lösung in der Klasse der stetig differenzierbaren Funktionen.

Eine deutliche Weiterentwicklung der Optimierungsmethoden setzte mit der Technisierung in unserem Jahrhundert ein und natürlich mit der Verfügbarkeit von elektronischen Rechenanlagen. Die bisher üblichen rein analytischen Betrachtungen wurden durch Untersuchungen von algorithmischen Lösungsmethoden ergänzt. Der Komplexitätsgrad der zur numerischen Lösung anstehenden Probleme stieg ständig. Dies wiederum hat die Forschung angeregt. Etwa 1950 fanden Kuhn und Tucker die bekannten Optimalitätsbedingungen der Parameteroptimierung im Zusammenhang mit der Geometrie des zulässigen Bereichs  $B$  (siehe z.B. [8]). Es folgten Jahre des intensiven Bemühens um effektive numerische Verfahren zur Lösung nichtlinearer Parameteroptimierungsprobleme.

Parallel dazu stand die Weiterentwicklung der Variationsrechnung, in theoretischer und praktischer Hinsicht, zur Theorie der *Optimalen Steuerungen*. Treibende Kraft war wieder die Anwendbarkeit, zunächst im Zusammenhang mit der rasanten Entwicklung der Luft- und Raumfahrt. Die Theorien entwickelten sich zunächst gleichzeitig, aber unabhängig und in verschiedene Richtungen in den USA und der UdSSR zu Beginn der sechziger Jahre. In der UdSSR arbeiteten Ingenieure und Mathematiker am Steklow-Institut in Moskau zusammen. Dort entdeckte Pontryagin 1961 das Maximumprinzip. In den USA entwickelte Bellman die Methode der Dynamischen Programmierung. Die einschlägige Literatur spiegelt das Ost-West-Wettrennen um diese mathematischen Techniken und ihre Anwendbarkeit wieder. Während die Dynamische Programmierung nur geringe praktische Bedeutung erlangte, hat sich aus dem Maximumprinzip die auch prak-



tisch bedeutsame Theorie der Optimalen Steuerungen entwickelt. Heute kann man von einer weitgehenden theoretischen Klärung sprechen. Die praktische Berechnung optimaler Steuerungen ist aber auch heute noch ein Forschungs- und Experimentierfeld. Darüber hinaus tun sich ständig neue Anwendungsbereiche auf.

## 2 Optimale Steuerungen

Die allen Steuerungsproblemen zugrunde liegende Situation ist die folgende. Wir haben ein *dynamisches System*, d.h. ein System von  $n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen<sup>1)</sup>

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}, \underline{u}) \quad (1)$$

gegeben. Eine Lösungsfunktion  $\underline{x}$ , die den Verlauf des Zustands des Systems beschreibt, kann man als eine parametrisierte Kurve im  $\mathbb{R}^n$  ansehen. Die unabhängige Variable  $t$  stelle man sich als die Zeit vor, die ein Zeitintervall  $[0, t_f]$  durchläuft. Die Ableitung  $\dot{\underline{x}}$  ist der Tangentenvektor der Kurve. Die rechte Seite von (1) hängt nicht nur von  $t$  und  $\underline{x}$  ab, wie bei Differentialgleichungen üblich, sondern zusätzlich von einer *Steuerfunktion*  $\underline{u}$ . Das Steuerungsproblem besteht darin,  $\underline{u}$  zu wählen und dadurch die Richtung der Kurve  $\underline{x}$  zu beeinflussen, so daß die durch Integration entstehende Bahnkurve  $\underline{x}$  "optimal" wird. Dabei wird i.a.  $\underline{u}$  Beschränkungen unterliegen, die im einfachsten Fall in der Form  $\underline{u}(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$  gegeben sind.

Was "optimal" heißen soll, legen wir durch eine Zielfunktion  $J$  fest. Zwei typische Formen sind

$$J = \int_0^{t_f} f_0(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) dt$$

und

$$J = \Phi(\underline{x}(t_f)). \quad (2)$$

Im ersten Fall bewertet man eine Funktion  $f_0$  längs der Bahn, im zweiten nur den Endpunkt der Bahn. Die Zielfunktion soll üblicherweise minimiert werden.

Natürlich müssen zu der Differentialgleichung (1) auch Anfangs- und/oder Randwerte gegeben sein. Sie spielen bei Steuerungsproblemen die zentrale Rolle. Während sich das Differentialgleichungssystem nicht ändert, weil sich z. B. bei einem Raumfahrtproblem stets ein und dieselbe Raumsonde im Schwerfeld der Sonne bewegt, ist man an Lösungen unter den verschiedensten Randbedingungen interessiert. Bei einem System von  $n$  Differentialgleichungen hat man  $n$  Bedingungen vorzugeben. Dies kann in Form eines reinen Anfangswertproblems geschehen,

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0.$$

Man stelle sich etwa eine Rakete vor, deren Anfangszustand eindeutig festgelegt ist. Häufiger tritt ein separiertes Randwertproblem auf. Dabei ist nur ein Teil der Komponenten des Anfangsvektors  $\underline{x}(0)$  vorgegeben. Die am Anfang unbekannten Komponenten

---

1) unterstrichene Größen bezeichnen Vektoren

sind aber zum Endzeitpunkt  $t_f$  bekannt, so daß der komplementäre Teil der Komponenten des Endvektors  $\underline{x}(t_f)$  vorgegeben ist. Man denke sich also  $\underline{x} = (\underline{x}_a, \underline{x}_e)$  in zwei Teilvektoren zerlegt. Der Teilvektor  $\underline{x}_a$  sei zur Anfangszeit und sein Komplement  $\underline{x}_e$  zur Endzeit vorgegeben. Unser folgendes Beispiel ist von diesem Typ. Für praktische Zwecke ist dies jedoch nicht ausreichend. Es müssen auch Randbedingungen möglich sein, die Anfangs- und Endzustand verknüpfen. Denkbar ist beispielsweise eine Bedingung, die die Entfernung zwischen Anfangs- und Endpunkt festlegt. Die allgemeine Form der Randbedingungen ist

$$\underline{r}(\underline{x}(0), \underline{x}(t_f)) = \underline{0}, \quad (3)$$

wobei  $\underline{r}$  eine Funktion von  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$  ist.

Bevor wir uns der Frage zuwenden, wie man nun die Steuerungsfunktion  $\underline{u}$  zu wählen hat, um  $J$  zu minimieren, wollen wir das Beispiel der Brachistochrone als Steuerungsproblem formulieren, allerdings mit einer etwas abgewandelten Randbedingung.

Das Newtonsche Bewegungsgesetz, das die Bahnkurve  $\underline{w}$  eines Massenpunkts als Funktion der Zeit  $t$  in einem Kraftfeld  $\underline{F}$  beschreibt, besagt, daß

$$m\ddot{\underline{w}} = \underline{F},$$

wobei  $m$  die Masse und  $\underline{F}$  der Vektor der auf den Massenpunkt wirkenden Kraft ist. In unserem Fall ist die Kraft die Schwerkraft  $mg$ . Die Masse spielt im folgenden keine Rolle mehr. Da unsere Formulierung des Steuerungsproblems Differentialgleichungen erster Ordnung verlangt, setzen wir  $\dot{\underline{w}} = \underline{v}$  und haben das System

$$\begin{aligned} \dot{\underline{w}} &= \underline{v} \\ \dot{\underline{v}} &= \underline{g} \end{aligned}$$

das wir im Zeitintervall  $[0, t_f]$  betrachten. Weil wir ein ebenes Problem haben, sind das vier skalare Differentialgleichungen. Die unschöne Tatsache, daß die Zielfunktion  $J = t_f$  als rechte Intervallgrenze auftritt, werden wir sogleich durch einen formalen Trick beseitigen. Als Steuergröße könnten wir die Richtung von  $\underline{v}$ , d.h. den Winkel  $\varphi$  in Abbildung 1 wählen. Wir wollen aber lieber die Änderung von  $\varphi$ , also  $\dot{\varphi}$ , als Steuergröße nehmen. Dies entspricht mehr der technischen Vorstellung einer Steuerung als der Änderung von Systemkomponenten. Die zu minimierende Zielfunktion ist in der ersten Formulierung

$$J = t_f = \int_0^{t_f} dt.$$

In der Theorie und in der Praxis zieht man jedoch die zweite Form vor, weil sie eine einheitlichere Behandlung erlaubt. Beide Formen sind äquivalent. Wir können in unserem Beispiel die erste in die zweite umschreiben, indem wir zu unserem System als fünfte die triviale Differentialgleichung

$$\dot{t}_f = 0$$

hinzufügen. Jetzt haben wir einen Zustandsvektor mit fünf Komponenten  $\underline{x} = (x, y, v, \varphi, t_f)^T$ .  $x$  und  $y$  bezeichnen die kartesischen Koordinaten des Ortsvektors  $\underline{w}$ . Den

Geschwindigkeitsvektor  $\underline{v}$  stellen wir durch seine beiden Komponenten  $v$  und  $\varphi$  dar, d.h. wir benutzen ein Polarkoordinatensystem. Der Wert der Zielfunktion ist die letzte Komponente des Zustandsvektors  $\underline{x}$  im Bahnendpunkt. D.h. wir haben in (2) einfach  $\Phi(\underline{x}) = x_5$  zu nehmen.

Wir schließen die Modellierung des Brachistochronenproblems mit dem oben erwähnten formalen Trick ab, indem wir durch eine lineare Transformation von  $t \in [0, t_f]$  auf  $\tau \in [0, 1]$  die Zeitabhängigkeit des Integrationsintervalls beseitigen. Dann hat das dynamische System die Form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v t_f \cos \varphi \\ \dot{y} &= v t_f \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= u t_f \\ \dot{v} &= -g t_f \sin \varphi \\ \dot{t}_f &= 0\end{aligned}$$

Zu diesen 5 Differentialgleichungen müssen wir entsprechend viele Randbedingungen vorgeben. Wir wählen, in leichter Abwandlung des klassischen Brachistochronenproblems, die Vorgabe des Anfangspunkts  $P_0$ , der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , der  $x$ -Koordinate des Endpunkts  $P_1$  und die Richtung der Bahntangente im Endpunkt, d.h.

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \\ v(0) &= v_0 \\ x(1) &= x_f \\ \varphi(1) &= \varphi_f.\end{aligned}\tag{4}$$

Wir lesen ab, daß in diesem Fall die Funktion (3) wie folgt aussieht:

$$\underline{r}(\underline{x}(0), \underline{x}(1)) = (x(0) - x_0, y(0) - y_0, v(0) - v_0, x(1) - x_f, \varphi(1) - \varphi_f)^T = \underline{0}.$$

Die Randbedingungen liegen in separierter Form vor. Wir wenden uns jetzt der Frage zu, wie man die zeitoptimale Steuerung  $\underline{u}^*$  berechnen kann.

### 3 Optimalitätsbedingungen

Die Situation ist nicht zufällig ähnlich wie bei endlichdimensionalen Minimierungsproblemen mit Nebenbedingungen. Man löst ein Problem

$$f(\underline{x}) \rightarrow \text{Min mit Nebenbedingungen } h_1(\underline{x}) = 0, \dots, h_m(\underline{x}) = 0,$$

indem man die Lagrangefunktion<sup>2)</sup>

$$L(\underline{x}, \underline{\lambda}) = f(\underline{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(\underline{x})$$

---

2) nicht zu verwechseln mit der physikalischen Lagrangefunktion

betrachtet. Die richtigen Lagrangemultiplikatoren  $\lambda_i^*$  sorgen dafür, daß  $L$  an der gesuchten Minimalstelle  $\underline{x}^*$  eine stationäre Stelle hat, d.h.

$$\nabla L(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*) = 0.$$

Dies und die Bedingungen

$$h_1(\underline{x}) = \dots = h_m(\underline{x}) = 0$$

sind  $n + m$  Bedingungen zur Berechnung von  $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$  und  $\underline{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$ . Die Lösungsmenge dieser Gleichungen enthält die gesuchte Lösung des Problems, d.h. man hat nur notwendige Bedingungen. Aber typischerweise sind es gerade diese, und nicht die hinreichenden Bedingungen, die zu einer Berechnungsmöglichkeit führen. Scheinlösungen müssen i.a. durch zusätzliche Überlegungen ausgeschlossen werden.

Wenn wir analog in unserem Beispiel der Brachistochrone vorgehen, haben wir als Nebenbedingungen zunächst die Randbedingungen für die Rollkurve. Aber auch die Tatsache, daß die gesuchte Kurve Lösung einer Differentialgleichung ist, ist eine Nebenbedingung. Zu *jedem* Zeitpunkt  $t$  muß

$$f(t, \underline{x}(t), \underline{u}(t)) - \dot{\underline{x}}(t) = 0 \quad (5)$$

gelten. Wenn wir zu *jedem* Zeitpunkt einen Lagrangemultiplikator ansetzen, erhalten wir eine *Lagrangemultiplikatorfunktion*  $\underline{\Lambda}(t)$ . Die Lagrangefunktion ist dann so anzusetzen:

$$L = \Phi(\underline{x}(1)) + \int_0^1 \underline{\Lambda}(\tau) \cdot (f(\tau, \underline{x}(\tau), \underline{u}(\tau)) - \dot{\underline{x}}(\tau)) d\tau. \quad (6)$$

Die Nebenbedingung (5) wird bei der Integration des Systems automatisch erfüllt. Es bleibt die Frage, wie man  $\underline{\Lambda}(t)$  berechnen kann. Dies ist eng mit der Frage nach der optimalen Steuerung  $\underline{u}^*$  verknüpft. Wenn wir  $\underline{u}^*$  mit Hilfe einer Variationsfunktion  $\underline{\eta}$  durch

$$\underline{u}(t) = \underline{u}^*(t) + \epsilon \underline{\eta}(t)$$

variieren, können wir  $\epsilon$  als unabhängige Variable von  $L$  ansehen:

$$L = L(\epsilon).$$

Optimalität von  $\underline{u}^*$  bedeutet dann, daß für alle Variationsfunktionen  $\underline{\eta}$

$$\delta L = \left. \frac{d}{d\epsilon} L(\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = 0$$

ist. Wie in der Variationsrechnung üblich wollen wir die Bezeichnung  $\delta = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}$  benutzen. Mit  $\epsilon$  ändert sich natürlich auch die Lösung  $\underline{x}$  des Systems (1). Allerdings ist die Abhängigkeit von  $\delta \underline{x}$  von  $\delta \underline{u}$  recht kompliziert. Zulässige Variationen sind solche, die die Randbedingungen  $\underline{r} = \underline{0}$  einhalten, für die also  $\delta \underline{r} = \underline{0}$ .

Durch partielle Integration eines Teils der Lagrangefunktion (6) erhalten wir zunächst

$$L = \Phi(\underline{x}(1)) - \underline{\Lambda}(\tau)\underline{x}(\tau)|_0^1 + \int_0^1 (\underline{\Lambda}\underline{f} + \underline{\Lambda}\underline{x})d\tau.$$

$H = \underline{\Lambda} \cdot \underline{f}$  wird als *Hamiltonfunktion* des Systems bezeichnet. Mit dieser Bezeichnung erhalten wir

$$\delta L = \underline{\Lambda}(0)\delta\underline{x}(0) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\underline{x}} - \underline{\Lambda}(1)\right)\delta\underline{x}(1) + \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial H}{\partial\underline{x}} + \underline{\Lambda}\right)\delta\underline{x} + \frac{\partial H}{\partial\underline{u}}\delta\underline{u}\right]d\tau \quad (7)$$

Die Annahme, daß

$$\delta L = 0$$

für jede zulässige Wahl der Variationsfunktion  $\eta(t)$ , liefert die notwendigen Optimalitätsbedingungen: Zunächst müssen die Koeffizienten von  $\delta\underline{x}$  und  $\delta\underline{u}$  unter dem Integral verschwinden. Diese Schlußfolgerung beruht auf dem *Fundamentallemma der Variationsrechnung* (siehe etwa [2], S. 159). Wir sehen aus (7), daß zu der Systemdifferentialgleichung (1) noch eine Differentialgleichung für  $\underline{\Lambda}$  hinzukommt, die *adjungierte Differentialgleichung*. Damit haben wir insgesamt ein System von  $2n$  Differentialgleichungen für  $(\underline{x}, \underline{\Lambda})$ .

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \underline{\Lambda}} = \underline{f}(t, \underline{x}, \underline{u}) \\ \dot{\underline{\Lambda}} &= -\frac{\partial H}{\partial \underline{x}} = -\underline{\Lambda}(t) \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}(t, \underline{x}, \underline{u}). \end{aligned} \quad (8)$$

Dazu müssen  $2n$  Randbedingungen gegeben sein. (3) liefert die ersten  $n$  Bedingungen. Das Verschwinden der integralfreien Terme in (7) liefert die weiteren  $n$  Bedingungen, so daß wir insgesamt haben

$$\begin{aligned} \underline{r}(\underline{x}(0), \underline{x}(t_f)) &= \underline{0} \\ \underline{\Lambda}(0)\delta\underline{x}(0) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\underline{x}} - \underline{\Lambda}(1)\right)\delta\underline{x}(1) &= \underline{0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Dabei sind  $\delta\underline{x}(0)$  und  $\delta\underline{x}(1)$  nicht unabhängig, sondern durch die  $n$  Gleichungen

$$\delta\underline{r}(\underline{x}(0), \underline{x}(1)) = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{x}(0)}\delta\underline{x}(0) + \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{x}(1)}\delta\underline{x}(1) = \underline{0}$$

verknüpft.

Außerdem sehen wir an (7), daß die Bedingung

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = \underline{0} \quad (10)$$

erfüllt sein muß. Sie ist ein Spezialfall des *Pontryagin'schen Maximumprinzips*, das besagt, daß die optimale Steuerung  $\underline{u}^*$  stets die Hamiltonfunktion maximiert, d.h. es gilt

$$H(t, \underline{x}(t), \underline{\Lambda}(t), \underline{u}^*(t)) \geq H(t, \underline{x}(t), \underline{\Lambda}(t), \underline{u}(t)) \quad (11)$$

für alle zulässigen Steuerungen  $\underline{u}$ .

Die Berechnung des Maximums von  $H$  bezüglich  $\underline{u}$  ist zumindest theoretisch einfach, wenn  $H$  eine *nichtlineare* Funktion ist und die Maximalstelle im *Inneren* des Definitionsbereichs  $\Omega$  liegt. Die Formel (10) ist dann gerade die notwendige Bedingung für die optimale Steuerung  $\underline{u}^*$ . Dies sind  $m$  implizite Gleichungen für die  $m$  Komponenten des Steuervektors  $\underline{u}$ . In der Praxis kann man sie analytisch oder numerisch lösen. Diese Situation findet man häufig bei Problemen der Luft- und Raumfahrt, bei der die Differentialgleichungen Aerodynamik- und Antriebsdaten enthalten, die naturgemäß alles andere als linear sind. Die gefundenen Werte für  $\underline{u}^*$  muß man in die Differentialgleichungen (8) einsetzen und dann das Randwertproblem mit den Randbedingungen (9) lösen.

Die Situation wird komplizierter, wenn  $H$  in  $\underline{u}$  linear ist. Wir wollen uns mit dem Fall  $m = 1$  begnügen. Es gibt dann nur eine Steuervariable, und  $H$  hat die Form  $H = \dots + a(t)u(t) + \dots$ .

Im einfachsten Fall ist  $a(t) \neq 0$ . Wenn die Menge der zulässigen Werte  $\Omega$  für  $u$  nicht beschränkt ist, gibt es möglicherweise keinen Maximalpunkt  $u^*$ . Daher sollte der Bereich der zulässigen Werte auf alle Fälle ein kompakter Bereich sein. Es ist sinnvoll, diesen als zusammenhängend, und somit als Intervall anzunehmen, etwa  $[-1, 1]$ . Die optimale Steuerung ist  $+1$ , wenn  $a(t) > 0$  und  $-1$ , wenn  $a(t) < 0$  und kann zwischen diesen beiden Werten springen, wenn  $a(t)$  das Vorzeichen wechselt. Solche "Bang-Bang-Steuerungen" sind in der Praxis weit verbreitet. Denn oft sind nur zwei Steuerzustände möglich, z.B. ein/aus oder vorwärts/rückwärts usw. Es ist aber klar, daß die zugehörige Theorie einigen Aufwand erfordert. Wir müssten die elementare Ebene der Betrachtung verlassen, denn  $u$  kann offensichtlich im allgemeinen nicht als stetige Funktion vorausgesetzt werden. Ein für technische Zwecke wohl ausreichendes mathematisches Abstraktionsniveau ergibt sich, wenn man  $u$  als stückweise stetig voraussetzt, so daß endlich viele Umschaltunkte möglich sind. Woher aber wissen wir, daß sich Schaltunkte nicht auch häufen können? Dann hätten wir unendlich viele Schaltunkte. Dies kann nur geklärt werden, wenn wir eine noch größere Klasse von Steuerfunktionen zulassen, die der meßbaren Funktionen. Dann aber müssen wir auch die entsprechend aufwendige Theorie der Differentialgleichungen heranziehen. Diesen Sachverhalt zu klären, war Gegenstand der Forschung bis in die 70er Jahre.

Anders kann die Situation aussehen, wenn  $a(t) = 0$  für alle  $t$  ist. In diesem Fall spricht man von einer *singulären Steuerung*. Dann bringt das Maximumprinzip zunächst keine Entscheidung. Die Information über die optimale Steuerung ist aber in dieser Gleichung versteckt. Es ist ja  $\frac{d^l}{dt^l}a(t) = 0$  für alle  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Wir differenzieren also so oft nach  $t$ , bis die Steuerung  $u$  zum Vorschein kommt. Dies wird im folgenden Beispiel demonstriert.

Wir wollen noch folgenden interessanten Sachverhalt erwähnen. Für den Fall, daß  $H$  nicht explizit von der Zeit  $t$  (oder der normierten Zeit  $\tau$ ) abhängt, ist  $H$  ein *erstes Integral der Bewegung*. Das soll heißen, daß  $H$  längs der optimalen Bahn  $\underline{x}^*$ , die von der optimalen Steuerung  $\underline{u}^*$  erzeugt wird, konstant ist. Dies folgt aus

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} + \frac{\partial H}{\partial \underline{\Lambda}} \dot{\underline{\Lambda}} + \frac{\partial H}{\partial \underline{u}} \dot{\underline{u}} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

#### 4 Die Lösung eines Brachistochronen-Problems

Wir wenden jetzt die Theorie auf das abgewandelte Brachistochronen-Problem an. Wir müssen die Differentialgleichungen (8) für die Zustandsfunktion  $\underline{x} = (x, y, \varphi, v, t_f)^T$  und die adjungierte Funktion  $\underline{\lambda} = (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_\varphi, \lambda_v, \lambda_{t_f})$  aufstellen. Dabei ist die unabhängige Variable jetzt stets die normierte Zeit  $\tau$ . Wir bilden die Hamiltonfunktion

$$H = [(\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi)v + \lambda_\varphi u - \lambda_v g \sin \varphi] t_f \quad (12)$$

und die adjungierten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= 0 \\ \dot{\lambda}_y &= 0 \\ \dot{\lambda}_\varphi &= -[(-\lambda_x \sin \varphi + \lambda_y \cos \varphi)v - \lambda_v g \cos \varphi] t_f \\ \dot{\lambda}_v &= -(\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) t_f \\ \dot{\lambda}_{t_f} &= -[(\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi)v + \lambda_\varphi u - \lambda_v g \sin \varphi] . \end{aligned} \quad (13)$$

Die Randbedingungen (9) sind separiert:

am Anfangspunkt	am Endpunkt
$x(0) = x_0$	$x(1) = x_f$
$y(0) = y_0$	$y(1)$ frei
$\varphi(0)$ frei	$\varphi(1) = \varphi_f$
$v(0) = v_0$	$v(1)$ frei
$t_f(0)$ frei	$t_f(1)$ frei
$\lambda_x(0)$ frei	$\lambda_x(1)$ frei
$\lambda_y(0)$ frei	$\lambda_y(1) = 0$
$\lambda_\varphi(0) = 0$	$\lambda_\varphi(1)$ frei
$\lambda_v(0) = \text{frei}$	$\lambda_v(1) = 0$
$\lambda_{t_f}(0) = 0$	$\lambda_{t_f}(1) = 1$

Dabei bedeutet "frei", daß die Werte zunächst nicht bekannt sind und erst durch das Lösen des Randwertproblems bestimmt werden. Beispielsweise ist  $y(0)$  fest vorgegeben und daher  $\delta y(0) = 0$ . Die adjungierte Variable  $\lambda_y$  kann somit zunächst beliebige Werte haben, ist also "frei". Da aber nach (13)  $\lambda_y$  konstant und  $\lambda_y(1) = 0$  ist, ist natürlich auch  $\lambda_y(0) = 0$ . Umgekehrt ist  $\varphi(0)$  nicht vorgegeben, also "frei", und somit müssen wir  $\delta \varphi(0) \neq 0$  zulassen. Das hat  $\lambda_\varphi(0) = 0$  zur Folge.

Die Variable  $\lambda_{t_f}$  wächst von 0 auf 1, und zwar linear, denn es ist  $\dot{\lambda}_{t_f} = -\frac{H}{t_f}$  konstant, weil  $H$  konstant ist, und somit  $H = -t_f$ . Bei numerischen Rechnungen ist dies eine willkommene Möglichkeit, die Genauigkeit des Algorithmus zu überprüfen. Man berechnet  $H$  nach (12) numerisch und vergleicht mit dem bekannten Wert.

Obwohl wir jetzt die Randbedingungen festgelegt haben, können wir das Randwertproblem noch nicht lösen. Wir müssen erst eine Steuerfunktion  $u$  in die Differentialgleichungen eintragen.

Anschaulich ist klar, daß die optimale Steuerung  $u^*$  keinen Beschränkungen unterliegt, d.h.  $u(\tau) \in \Omega = (-\infty, +\infty)$ . Wir versuchen zunächst,  $u^*$  nach dem Maximumprinzip zu bestimmen:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_\varphi.$$

Über  $u^*$  sagt uns das zunächst nichts. Wir bilden die Ableitungen nach  $t$ . Die erste Ableitung  $\dot{\lambda}_\varphi$  ist aus (13) bekannt und bringt ebenfalls keine Information über  $u^*$ . Aber schon die zweite Ableitung führt zum Erfolg. Nach kurzer Rechnung erhalten wir

$$0 = \ddot{\lambda}_\varphi = t_f(g \sin \varphi \lambda_v + v \dot{\lambda}_v) \left( \frac{g}{v} \cos \varphi - u \right).$$

Zu unserem Glück ist die erste Klammer stets  $\neq 0$ . Es ist nämlich  $\lambda_v(1) = 0$  und wenn die Differentialgleichung  $(g \sin \varphi \lambda_v + v \dot{\lambda}_v) = 0$  gilt, wäre  $\lambda_v$  für alle Zeiten null. Das kann aber nicht sein, denn ein Blick auf die Hamiltonfunktion zeigt, daß dann  $\cos \varphi$  konstant sein müßte, was sicher unsinnig ist, wenn man von einem vertikalen Fall unseres Massenpunkts absieht.

Also ist der zweite Faktor null und wir haben die optimale Steuerung

$$u^*(\tau) = \frac{g}{v(\tau)} \cos \varphi(\tau). \quad (14)$$

Jetzt können wir das Randwertproblem mit einem numerischen Verfahren lösen. Als besonders geeignet haben sich Schießverfahren erwiesen.

Die Steuerung (14) zeigt eine erwähnenswerte Besonderheit. Sie hängt weder von den adjungierten Variablen  $\underline{\lambda}$  noch explizit von der Zeit  $\tau$  ab. Allein aus der Kenntnis des Zustandsvektors  $\underline{x}$  kann man die zeitoptimale Drehrate berechnen. Solch eine Steuerung nennt man eine *closed-loop-* oder *Feedback-Steuerung*. Für viele technische Probleme ist genau diese Art der Steuerung gesucht, da sie aus den Meßwerten über den augenblicklichen Zustand eines Systems gewonnen werden kann. Daran ist man besonders in der Regelungstechnik interessiert, bei der allerdings weniger ein Optimierungskriterium im Vordergrund steht, als der Wunsch, eine Feedbacksteuerung zu finden, die bei zu erwartenden Störungen des Zustandsvektors  $\underline{x}$  auf stabile Weise in einen Sollzustand (zurück) führt.

Im Gegensatz dazu stehen die *open-loop-Steuerungen*, bei denen  $\underline{u}$  als Funktion der Zeit gegeben ist oder synchron mit der Integration des Systems (8) entsteht. Bei Steuerungsproblemen ist dies der Normalfall.

Als numerisches Beispiel wählen wir die Randbedingungen

am Anfangspunkt	am Endpunkt
$x(0) = 0$	$x(1) = 1000$
$y(0) = -1$	$y(1) = \text{frei}$
$v(0) = 10$	$\varphi(1) = 0$

Es ergeben sich eine minimale Rollzeit von  $t_f = 16.9$  und die noch fehlenden Randwerte

am Anfangspunkt	am Endpunkt
$\varphi(0) = -1.48$	$y(1) = -633$
	$v(1) = 112$



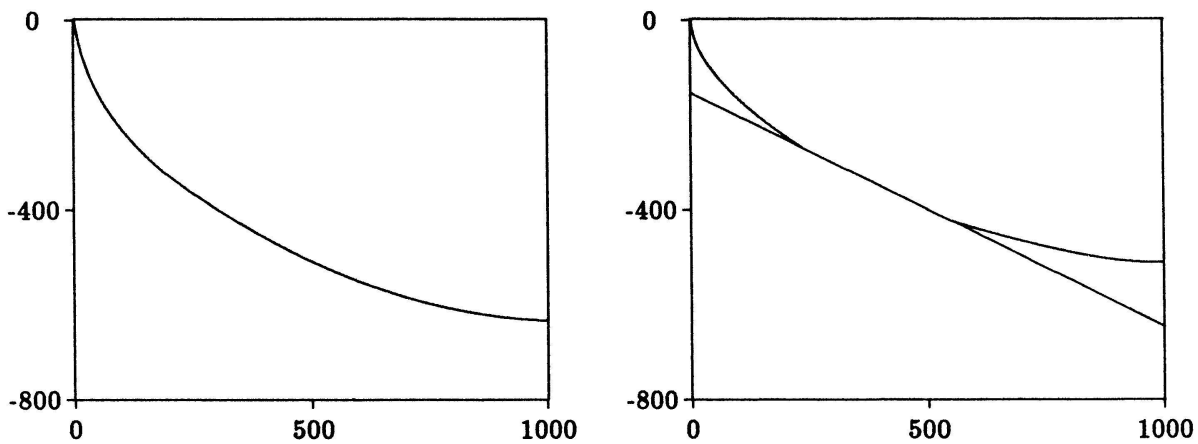


Fig. 3 Das Problem der Brachistochrone ohne und mit Nebenbedingung

## 5 Nebenbedingungen

Für realistische Anwendungen sind die bisherigen Betrachtungen nicht ausreichend. In der Praxis treten im Normalfall eine Vielzahl von Nebenbedingungen für die Zustandsvariablen  $x_1, \dots, x_n$  und die Steuervariablen  $u_1, \dots, u_m$  auf. Diese können in Gleichungs- oder Ungleichungsform gegeben sein. Während sich vom theoretischen Standpunkt aus die Situation dadurch nicht grundlegend ändert, steigt der Aufwand für die numerischen Rechnungen erheblich. Theoretisch ist es so, daß man alle Nebenbedingungen mit Lagrangemultiplikatoren an die Lagrangefunktion (6) "ankoppelt". Will man etwa erreichen, daß der Bahnendpunkt  $\underline{x}(t_f)$  auf einer "Zielfläche"

$$\Psi(\underline{x}) = 0$$

liegt, hat man die Lagrangefunktion (6) durch den Summanden

$$\nu \Psi(\underline{x}(t_f))$$

zu ergänzen. Die Zahl der Unbekannten wird durch  $\nu$  um eins erhöht, aber auch die Zahl der Bestimmungsgleichungen ist durch  $\Psi(\underline{x}) = 0$  um eins gestiegen.

Ähnlich sieht die Situation bei zeitabhängigen Beschränkungen aus, die meist in Ungleichungsform vorliegen. Durch sie können z. B. Kräfte-, Temperatur- oder Abstandsbeschränkungen beschrieben werden.

Angenommen, wir haben eine Zustandsbeschränkung der Form

$$L(t, \underline{x}, \underline{u}) \leq 0.$$

Dann wird diese in einem Zeitintervall  $[t_1, t_2]$  aktiv sein, d.h. für  $t \in [t_1, t_2]$  gilt

$$L(t, \underline{x}, \underline{u}) = 0.$$

Wir koppeln die Nebenbedingung mit einem Lagrangemultiplikator  $\rho(t)$  an. Außerhalb  $[t_1, t_2]$  ist  $\rho = 0$ . Die Addition des Terms

$$\rho(t)L(t, \underline{x}(t), \underline{u}(t))$$

zur Lagrangefunktion hat zur Folge, daß man jetzt als Hamiltonfunktion

$$H = \underline{\Lambda} \cdot \underline{f}(t, \underline{x}, \underline{u}) + \rho L(t, \underline{x}, \underline{u})$$

nimmt. Es gelten mit dieser Hamiltonfunktion weiterhin die drei Gleichungen

$$\dot{\underline{x}} = \frac{\partial H}{\partial \underline{\Lambda}}, \quad \dot{\underline{\Lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{x}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = 0.$$

Neben der Funktion  $\rho$  sind noch zwei weitere Unbekannte hinzugekommen, nämlich die Intervallgrenzen  $t_1$  und  $t_2$ , die zu ihrer Bestimmung zwei weitere Gleichungen erfordern. Es sind dies die Forderungen nach der Stetigkeit der Hamiltonfunktion in diesen Zeitpunkten:

$$\begin{aligned} H(t_1^-) &= H(t_1^+) \\ H(t_2^-) &= H(t_2^+). \end{aligned}$$

Eine vollständige Darstellung, wie Nebenbedingungen von allerlei Form zu behandeln sind, ist recht umfangreich. Eine Zusammenfassung aller notwendigen Bedingungen für praktische Zwecke findet man in [5]. Das Buch ist eine beeindruckende Sammlung von nichttrivialen Anwendungsbeispielen. Auch unser Beispiel findet sich dort, allerdings in einer anderen mathematischen Modellierung. Theoretische Herleitungen oder Beweise findet man in dem Buch nicht. Diese sind in der Literatur verstreut. Eine geschlossene Darstellung des Grundprinzips, die zum Verständnis allerdings Vorkenntnisse aus der Funktionalanalysis bedarf, ist [6]. Eine ausführliche Einführung ist [7].

Bereits die einfache Nebenbedingung, daß die Fallkurve die Gerade  $y = 0.5x - 150$  nicht unterschreiten darf, kompliziert das Problem erheblich. Das graphische Resultat ist in Abbildung 3 rechts zu sehen. Die Fallzeit hat sich jetzt auf  $t_f = 17.2$  erhöht. Es ist  $t_1 = 8.28$  und  $t_2 = 12.34$ . Die fehlenden Randwerte sind

am Anfangspunkt	am Endpunkt
$\varphi(0) = -1.45$	$y(1) = -527$
	$v(1) = 102$

## 6 Numerische Lösungsverfahren

Hier sollen zum Abschluß nur einige allgemeine Bemerkungen gemacht werden. Der numerischen Lösung liegt stets das mathematische Modell des betrachteten physikalischen Problems zugrunde, d.h. die Differentialgleichungen mit den Rand- und Nebenbedingungen. Die Modellierung soll die physikalischen Gegebenheiten möglichst genau beschreiben. Dies ist ein zentraler Vorgang, der oft Kompromisse erfordert, z.B. um das Modell nicht zu kompliziert zu machen oder weil nicht genügend verlässliche Daten zur Verfügung stehen. Die Aufbereitung der Daten, die in der Praxis meist nur in Tabellenform vorliegen, ist ein eigener Problemkreis, der eigene mathematische Werkzeuge zur Interpolation und zum Datenzugriff erfordert. Er kann aber nicht für sich alleine

betrachtet werden, denn der numerische Integrator für die Differentialgleichungen muß Rücksicht auf die Differenzierbarkeitsstruktur der Daten nehmen.

Die numerischen Lösungsmethoden des Steuerungsproblems sind zahlreich und oft speziell auf die Aufgabenstellung zugeschnitten. Zwei Lösungsmethoden, die ihre Brauchbarkeit auch bei komplizierten praktischen Problemen aus der Luft- und Raumfahrt bewiesen haben, seien kurz vorgestellt.

Zum einen kann man versuchen, das Problem im Rahmen des gegebenen mathematischen Modells und der numerischen Rechengenauigkeit *exakt* zu lösen. Dazu muß man, wie oben beschrieben, alle exakten notwendigen Bedingungen aufstellen. Im konkreten Fall kann dies mit einem nicht zu unterschätzenden Arbeitsaufwand verbunden sein, der ingenieurmäßigen und mathematischen Sachverstand gleichermaßen erfordert. Die Berechnung der adjungierten Gleichungen ist unter Umständen mühselig und fehleranfällig. Die richtige Formulierung aller Nebenbedingungen erfordert Erfahrung. Die Zahl der Variablen und Gleichungen kann einen erheblichen Umfang annehmen. Wenn man das System der notwendigen Bedingungen richtig angesetzt und programmiert hat, kann man daran gehen, das Randwertproblem zu lösen. Damit steht man vor einem weiteren, eigenständigen Problem der Numerik. Hier eignen sich erfahrungsgemäß Schießverfahren besonders gut. Die Idee ist, das Randwertproblem durch ein Anfangswertproblem zu ersetzen. Die unbekannten Anfangswerte werden geschätzt und dann mit newtonartigen Verfahren verbessert, bis alle Randbedingungen mit hinreichender Genauigkeit erfüllt sind. In der Praxis ergeben sich oft Konvergenzprobleme, wenn kleine Änderungen der Anfangswerte große Änderungen des Zustands zu späteren Zeiten bewirken. Solche Stabilitätsprobleme liegen aber gerade in der Raumfahrt oft in der Natur der Sache. Eine bekannte Aufgabe ist die, eine um die Erde kreisende Raumkapsel durch Bremsung und Änderung des Bahnwinkels sicher zur Erde zurückzubringen (Re-entry-Problem). Das "Fenster" des richtigen Winkels ist klein. Macht man den Winkel zu steil, verglüht die Kapsel in der Erdatmosphäre. Macht man den Winkel zu flach, wird die Kapsel wie ein von einer Wasseroberfläche zurückprallender Stein in den Weltraum geschleudert. In dieser Situation eine Abstiegsbahn auch noch optimal gestalten zu wollen, ist sicher eine schwierige Aufgabe. Man kann diese Schwierigkeiten bewältigen, indem man das Schießverfahren über mehrere hinreichend kleine Zeitintervalle durchführt und dann die dortigen Resultate zur globalen Lösung zusammensetzt. Das ist die Grundidee des *Mehrfachschießverfahrens*, das von Professor Bulirsch an der TU München entwickelt wurde. Näheres, auch zum Beispiel des Re-entry-Problems, ist in [3], S. 193 ff. nachzulesen.

Die zweite, auch für mathematisch weniger versierte und erfahrene Anwender brauchbare Methode hat mit der oben dargestellten Theorie nicht mehr viel gemeinsam. Das Problem wird nur *näherungsweise* gelöst. Die Idee ist, das Problem völlig zu diskretisieren. Die Berechnung einer Bahn wird auf die Berechnung an einzelnen, wenn auch zahlreichen, Zeitpunkten zurückgeführt. Dazwischen wird mit einer geeigneten Methode interpoliert. Auch Nebenbedingungen müssen nur an einzelnen Punkten erfüllt sein. Die Berechnung der adjungierten Differentialgleichung und damit der optimalen Steuerung entfällt. Auf diese Weise bleibt ein Parameteroptimierungsproblem übrig, wenn auch mit sehr vielen Parametern. Dieses Verfahren wurde in der Abteilung von Prof. Well bei der Deutschen Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DLR) in Wessling

bei München entwickelt [4]. Die Erfahrungen dort zeigen, daß auf diese Weise Resultate erzielt werden können, deren Abweichungen von der exakten Lösung nur wenige Prozent betragen, was für viele Untersuchungen ausreicht.

An diesen beiden Verfahren wird deutlich, daß es von der theoretischen Lösung eines Problems zu dessen praktischer Lösung ein weiter Weg sein kann, der über den oft steinigten Weg der Entwicklung von wissenschaftlicher Software führt.

## Literatur

- [1] J. Lawrynowicz: Variationsrechnung und Anwendungen. Springer, Berlin 1986.
- [2] U. Brechtken-Manderscheid: Einführung in die Variationsrechnung. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1983.
- [3] J. Stoer und R. Bulirsch: Numerische Mathematik 2. Springer, Berlin 3. Auflage 1990.
- [4] Programmpaket TROPIC. Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt. Institut für Dynamik der Flugsysteme. 1990.
- [5] A.E. Bryson und Y-C. Ho: Applied Optimal Control. Halsted Press, New York 1975.
- [6] I.V. Girsanov: Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 67. Springer, Berlin 1972.
- [7] E.B. Lee und L. Markus: Foundations of Optimal Control Theory. Wiley, New York 1967.
- [8] R. Fletcher: Practical Methods of Optimization 2. Constrained Optimization. Wiley, New York 1981.

Rainer Walden  
Fachbereich Mathematik/Informatik  
Universität-GH Paderborn  
Warburger Str. 100  
D-33095 Paderborn