Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 49 (1994)

Artikel: Zwischenwerte und Fixpunkte für reelle Funktionen

Autor: Simon, Alice / Volkmann, Peter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45423

El. Math. *49* (1994) 0013-6018/94/020077-03$1.50 + 0.20/0

Zwischenwerte und Fixpunkte für reelle Funktionen

Alice Simon und Peter Volkmann

Alice Simon wurde 1939 in Paris geboren. Sie ist Schülerin von Yvonne Choquet-Bruhat. Seit 1970 ist sie Professorin an der Universität Orléans. Ihr Hauptinteresse gilt den partiellen Differentialgleichungen mit Anwendungen in Physik und Geometrie.

Peter Volkmann wurde 1940 in Berlin geboren. Er ist Schüler von Alexander Dinghas. Seit 1977 ist er Professor an der Universität Karlsruhe. Seine Hauptarbeitsgebiete sind gewöhnliche Differentialgleichungen in Banachräumen und Funktionalgleichungen.

Es bezeichne $\mathbb{R}$ den Bereich der reellen Zahlen, und es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Jede stetige Funktion

$$f : [a,b] \to [a,b] \tag{1}$$

hat einen Fixpunkt; üblicherweise wird das durch Anwendung des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen auf $F(x) = f(x) - x$ bewiesen. Andererseits ist $[a,b]$ ein vollständiger Verband, und daher besitzt nach dem Tarskischen Fixpunktsatz (vgl. [1]) auch jede (schwach monoton) wachsende Funktion (1) einen Fixpunkt.

Der Hauptzweck dieser Note ist der Nachweis eines Fixpunktes für (1) im Falle $f = f_1 + f_2$ mit stetigem $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ und wachsendem $f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$. Das Hilfsmittel ist ein geeigneter Zwischenwertsatz.

Eine Funktion

$$F : [a,b] \to \mathbb{R} \tag{2}$$

Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen und der daraus unmittelbar folgende Fixpunktsatz für stetige Selbstabbildungen eines Intervalls bilden im Aufbau der elementaren Analysis ein zentrales Hilfsmittel. Der vorliegende Beitrag von Alice Simon und Peter Volkmann verbindet diese wohlbekannten Resultate mit dem weit weniger bekannten Tarskischen Fixpunktsatz für monoton wachsende Funktionen. Die Autoren erhalten auf diese Weise eine Reihe von Verallgemeinerungen grundlegender klassischer Sätze der elementaren Analysis. ***ust***

habe die Eigenschaft ($\underline{\mathrm{M}}$), falls gilt:

$$\underline{\lim}_{x\uparrow t} F(x) \le F(t) \qquad (a < t \le b), \qquad F(t) \le \underline{\lim}_{x\downarrow t} F(x) \qquad (a \le t < b)\,. \tag{3}$$

Analog definieren wir ($\overline{\mathrm{M}}$) mit $\overline{\lim}$ an Stelle von $\underline{\lim}$ in (3). Man beachte, dass die Funktion (2) stets die Eigenschaften ($\underline{\mathrm{M}}$), ($\overline{\mathrm{M}}$) besitzt, falls sie die Summe einer stetigen und einer wachsenden Funktion ist.

Satz 1 *Für $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ gelte $F(b) \le 0 \le F(a)$.*

(a) *Hat die Funktion F die Eigenschaft ($\underline{\mathrm{M}}$), so besitzt sie eine kleinste Nullstelle.*

(b) *Hat die Funktion F die Eigenschaft ($\overline{\mathrm{M}}$), so besitzt sie eine grösste Nullstelle.*

Beweis. Um (a) zu beweisen, werde ($\underline{\mathrm{M}}$) für F vorausgesetzt. Wegen $F(b) \le 0$ existiert

$$t = \inf\{x \mid a \le x \le b,\ F(x) \le 0\}\,, \tag{4}$$

und es genügt,

$$F(t) = 0 \tag{5}$$

zu zeigen. Ist $F(a) = 0$, so folgt $t = a$, und (5) gilt. Andernfalls ist

$$0 < F(a) \le \underline{\lim}_{x\downarrow a} F(x)\,,$$

also ist F in einem Intervall $[a, a+\epsilon)$ (mit $\epsilon > 0$) positiv, und es folgt $t > a$. Dann ist F positiv in $[a,t)$, also

$$0 \le \underline{\lim}_{x\uparrow t} F(x) \le F(t)\,.$$

Um (5) zu beweisen, genügt es somit, die Ungleichung

$$0 < F(t) \tag{6}$$

zum Widerspruch zu führen: Gilt (6), so ist t in (4) kein Minimum, also existieren in jedem Intervall $(t, t+\epsilon)$ Punkte x mit $F(x) \le 0$. Damit wird

$$F(t) \le \underline{\lim}_{x\downarrow t} F(x) \le 0\,,$$

das heisst, (6) ist unmöglich.

Im Falle (b) kann ähnlich gezeigt werden, dass

$$t = \sup\{x \mid a \le x \le b,\ F(x) \ge 0\}$$

die grösste Nullstelle von F ist, falls ($\overline{\mathrm{M}}$) gilt. Ein anderer Beweis besteht in der Zurückführung von (b) auf (a) mittels der Funktion $\hat{F}(x) = -F(-x) \quad (-b \le x \le -a)$: Eigenschaft ($\overline{\mathrm{M}}$) für F hat ($\underline{\mathrm{M}}$) für $\hat{F}$ zur Folge.

Bemerkung 1. Im Falle (a) des Satzes 1 hat F nicht notwendig eine grösste Nullstelle und im Falle (b) nicht notwendig eine kleinste Nullstelle. Ein Beispiel für Fall (b) ist das folgende: $F : [0, 1/4] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $F(0) = 1$, $F(x) = \sin(1/x)$ $(0 < x \le 1/4)$.

Satz 2 *Für* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *gelte* ($\underline{\mathrm{M}}$) *oder* ($\overline{\mathrm{M}}$), *und es sei* $f(b) \leq f(a)$. *Dann gibt es zu jedem* $c \in [f(b), f(a)]$ *ein* $t \in [a,b]$ *mit* $f(t) = c$.

Beweis. Anwendung von Satz 1 auf $F(x) = f(x) - c \quad (a \leq x \leq b)$.

Satz 3 *Für* $f : [a,b] \to [a,b]$ *gelte* ($\underline{\mathrm{M}}$) *oder* ($\overline{\mathrm{M}}$). *Dann besitzt* f *einen Fixpunkt.*

Beweis. Anwendung von Satz 1 auf $F(x) = f(x) - x \quad (a \leq x \leq b)$.

Satz 4 *Es sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion, und es gelte*

$$\underline{\lim}_{x \uparrow t} f(x) \leq f(t) \leq \underline{\lim}_{x \downarrow t} f(x) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

(oder die entsprechende Bedingung mit $\overline{\lim}$ *an Stelle von* $\underline{\lim}$*). Dann besitzt* f *einen Fixpunkt.*

Beweis. Man wähle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, so dass $f : \mathbb{R} \to [a,b]$ gilt, und man wende Satz 3 auf die Einschränkung $f|_{[a,b]}$ an.

Bemerkung 2. Entsprechend dem unmittelbar vor Satz 1 Gesagten liefern die Sätze 3, 4 Fixpunkte für Funktionen $f = f_1 + f_2$ mit stetigem f_1 und wachsendem f_2. In Satz 3 wird $f_1 + f_2 : [a,b] \to [a,b]$ gefordert, und in Satz 4 wird $f_1 + f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt vorausgesetzt (f_1, f_2 selbst können in diesem Falle unbeschränkt sein).

Literatur

[1] Birkhoff, G.: *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence RI, 3. Auflage, 1967.

Alice Simon und Peter Volkmann
52, rue principale
F-67440 Reinhardsmunster