

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 49 (1994)

**Artikel:** Die Euler-Poincaré-Charakteristik und ihre topologische Weiterentwicklung  
**Autor:** Hilton, Peter J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45422>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

---

# Die Euler-Poincaré-Charakteristik und ihre topologische Weiterentwicklung

---

---

Peter J. Hilton

Peter J. Hilton studierte in Oxford. Nach einigen Jahren Tätigkeit an Universitäten in England verlegte er seinen Wohnsitz in die Vereinigten Staaten und arbeitete seither an verschiedenen amerikanischen Universitäten. Seit 1982 ist er Distinguished Professor of Mathematics an der State University of New York in Binghamton. Er hat zahlreiche Bücher und Forschungsartikel geschrieben, die vor allem die Gebiete algebraische Topologie, homologische Algebra und Gruppentheorie betreffen. Neben der Forschung war ihm immer schon die Verbesserung des mathematischen Unterrichts ein besonderes Anliegen. Viele Publikationen und eine rege Vortragstätigkeit zeugen von seinen Bemühungen in dieser Richtung.

## 1 Einführung

Neulich wurde mir ein Artikel zur Begutachtung zugesandt. Es ging darum, eine Variante der Euler-Charakteristik für 2-dimensionale Polyeder zu definieren, welche auch für eine grössere Klasse von (zweidimensionalen) Räumen anwendbar war. Bei den Autoren handelte es sich um zwei Geometer von verdientermassen gutem Ruf, und der Artikel war erwartungsgemäss klar und interessant. Ebenfalls den Erwartungen entsprechend war er mit ausgezeichneten Zeichnungen ausgestattet, die dem Leser das Verständnis erleichterten.

**Der klassische Polyedersatz von Euler-Poincaré ist unbestritten einer der schönsten Sätze der elementaren Geometrie. Aber nicht nur schön ist dieser Satz, er hat sich im Laufe der Entwicklung der Mathematik auch als ausserordentlich fruchtbar erwiesen. Seine Verallgemeinerungen haben Anwendungen in Gebieten gefunden, die weit über die klassische Geometrie und die Topologie hinausgehen und zum Beispiel die Analysis und die Differentialgeometrie betreffen. Heinz Hopf sagte einmal: "Der Satz steht immer wieder im Zentrum, wie ein Familiengründer, der selbst immer wieder als Oberhaupt wirkt." — In seiner Arbeit geht Peter Hilton zuerst auf einige Verallgemeinerungen des Polyedersatzes ein, die auf Arbeiten von Heinz Hopf und Solomon Lefschetz aus den zwanziger und dreissiger Jahren zurückgehen. Im letzten Abschnitt berichtet er dann über einige Beispiele von sehr neuen Anwendungen aus der algebraischen Topologie, an denen Peter Hilton selbst beteiligt war. *ust***

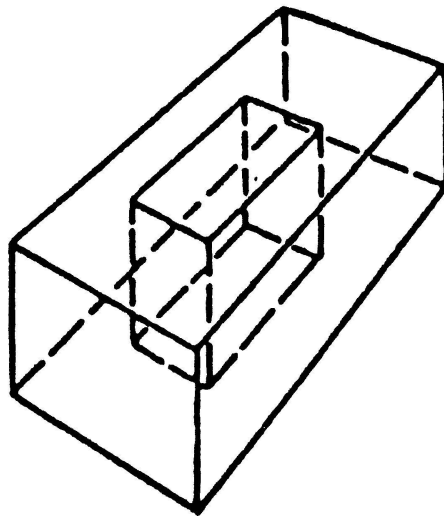


Fig. 1

Der Artikel enthielt ferner eine ziemlich ausführliche Geschichte der Entwicklung der Euler-Charakteristik, welche insofern sehr bemerkenswert war, als sie keinerlei Hinweis auf irgendeine Arbeit eines Topologen gab, die nach der Pionier-Arbeit um die Jahrhundertwende von Poincaré erschienen war. Dabei handelte es sich keinesfalls nur um eine Unterlassungssünde gegenüber der Topologie: Vielmehr liessen sich die Autoren in ihrer Voreingenommenheit hinreissen, die Verallgemeinerungen der Euler-Charakteristik, wie sie sich die Topologie im Verlauf der Entwicklung angeeignet hatte, geradezu zu verunglimpfen. So wurde ausdrücklich gesagt, diese Verallgemeinerungen liefen der Intuition zuwider und entfernten sich wesentlich und ohne Rechtfertigung von Eulers ursprünglicher Idee. Ich behaupte, dass diese Feststellungen vollkommener Unsinn sind!

Ein weiterer Punkt hat mich schliesslich dazu bewogen, etwas zu unternehmen, um das Gleichgewicht wiederherzustellen. Der zur Diskussion stehende Artikel enthielt nämlich an prominenter Stelle als Beispiel den in Figur 1 dargestellten Würfel mit Loch, zusammen mit einer Rechnung, welche den Anschein erweckte, die Euler-Charakteristik dieser Fläche sei 2. Daraus wurde die Schlussfolgerung gezogen, dass die Euler-Charakteristik  $\chi$  manchmal versage! Natürlich ist der wahre Wert für  $\chi$  in diesem Fall 0, und das Versagen liegt nicht bei  $\chi$ , sondern bei der Art und Weise der Berechnung. Denn diese liess die entscheidende Forderung ausser acht, dass für die Euler-Charakteristik von einer *Zellenzerlegung* auszugehen ist und dass Zellen definitionsgemäss keine Löcher haben dürfen. Wie kann man erwarten, dass eine Rechnung, welche das Vorhandensein von Löchern ignoriert, das Vorhandensein von Löchern widerspiegelt? Dies war für mich ein klarer Aufruf zur Tat!

Im 2. Abschnitt beschreibe ich die Euler-Poincaré-Charakteristik vom homologischen Standpunkt aus. Im 3. Abschnitt zeige ich, wie dieser Standpunkt von einem wunderschönen Satz von Heinz Hopf abgeleitet werden kann und wie aus diesem Satz ein wirkungsvoller Fixpunktsatz folgt, den wir Solomon Lefschetz verdanken. Ich gebe auch einige wichtige Anwendungen dieses Satzes an, welche natürlich allesamt topologische Weiterentwicklungen des 20. Jahrhunderts von Eulers ursprünglicher Idee sind und sich auf natürliche, wenn auch subtile Weise von dieser Idee ableiten lassen. Im 4. Abschnitt

gehe ich auf einige sehr neue Entwicklungen ein, von denen einige noch unveröffentlicht sind.

Natürlich mache ich hier keinen Versuch, alle neueren topologischen Entwicklungen in dieser Richtung aufzuzeigen. Dennoch hoffe ich, mit diesem Artikel einen kleinen Beitrag zur Überbrückung des Grabens zwischen Geometrie und Topologie zu leisten. Dies war auch mein Ziel, als ich die Einladung angenommen habe, an der 6. Internationalen Geometrie-Konferenz in Haifa, Israel, im März/April 1991 einen Vortrag zu halten<sup>1)</sup>. Ich glaube, dass das Programm-Komitee dieser Konferenz dasselbe Ziel vor Augen hatte, als es mich einlud.

## 2 Die Euler-Poincaré-Charakteristik

Von nun an wird  $X$  ein kompaktes, zusammenhängendes Polyeder bezeichnen. Wir nehmen an, das Polyeder  $X$  sei in Zellen unterteilt, wobei wir unter einer Zelle das homöomorphe Bild eines offenen Simplex verstehen. Der Fall, wo die Zellen selbst Simplexe sind, ist natürlich eingeschlossen. Dann bezeichnen wir  $X$  als simplizialen Komplex. Da das Polyeder  $X$  kompakt ist, enthält es nur endlich viele Zellen.

Wir nehmen an, die Dimension  $\dim X$  von  $X$  sei  $n$  und  $X$  enthalte genau  $c_i$  Zellen der Dimension  $i$ , oder  $i$ -Zellen. Dann ist die *Euler-Poincaré-Charakteristik*  $\chi(X)$  von  $X$  gegeben durch

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i. \quad (1)$$

Nimmt man die  $i$ -Zellen als Basis einer freien abelschen Gruppe  $C_i(X)$ , so heisst diese Gruppe die  $i$ -te *Kettengruppe* von  $X$  (mit ganzzahligen Koeffizienten). Jede  $i$ -Zelle besitzt einen Rand, welcher eine Linearkombination von  $(i-1)$ -Zellen ist. Sind die Zellen zum Beispiel selbst Simplexe, so kann ein orientiertes  $i$ -Simplex  $\sigma$  mit Hilfe einer Folge von  $i+1$  Ecken beschrieben werden,

$$\sigma = (a_0 a_1 \dots a_i).$$

Der Rand  $\partial\sigma$  von  $\sigma$  ist dann gegeben durch die wohlbekanntete Formel (siehe Figur 2)

$$\partial\sigma = \sum_{j=0}^i (-1)^j (a_0 a_1 \dots \hat{a}_j \dots a_i), \quad (2)$$

wobei  $\hat{a}_j$  anzeigt, dass die Ecke  $a_j$  weggelassen werden soll.

Der auf diese Weise definierte Rand lässt sich eindeutig fortsetzen zu einem Homomorphismus von abelschen Gruppen

$$\partial : C_i(X) \rightarrow C_{i-1}(X). \quad (3)$$

---

1) Dieser Artikel ist eine erweiterte Version des Vortrags, den ich an dieser Konferenz hielt.



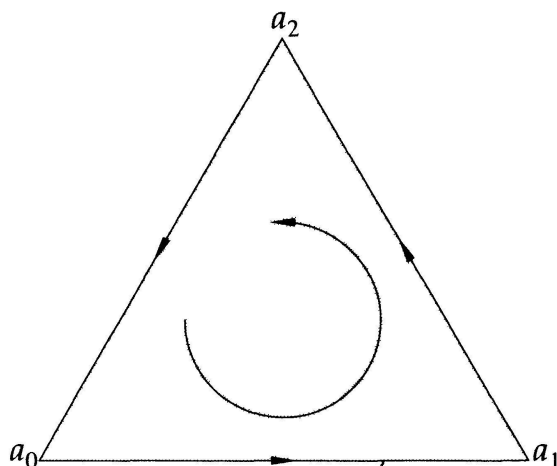


Fig. 2  $\partial(a_0 a_1 a_2) = (a_1 a_2) - (a_0 a_2) + (a_0 a_1)$

Entscheidend ist nun die Tatsache, dass gilt

$$\partial\partial = 0 : C_i(X) \rightarrow C_{i-2}(X). \tag{4}$$

Wir schreiben  $Z_i(X)$  für den Kern von  $\partial : C_i(X) \rightarrow C_{i-1}(X)$  und nennen dies die *Gruppe der  $i$ -Zyklen*. Weiter schreiben wir  $B_i(X)$  für das Bild von  $\partial : C_{i+1}(X) \rightarrow C_i(X)$  und nennen dies die *Gruppe der  $i$ -Ränder*. Dann folgt aus (4)

$$B_i(X) \subseteq Z_i(X), \tag{5}$$

d.h. jeder Rand ist ein Zyklus. Dies ermöglicht die wichtige Definition der Homologiegruppen. Es ist

$$H_i(X) := Z_i(X)/B_i(X) \tag{6}$$

die  *$i$ -te Homologiegruppe* von  $X$  (mit ganzzahligen Koeffizienten.) Damit ist  $H_i(X)$  eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und hat als solche einen Rang  $p_i$ ; dieser ist definiert als die maximale Kardinalität linear unabhängiger Teilmengen von  $H_i(X)$ . Die Zahl  $p_i$  heisst auch die  *$i$ -te Betti-Zahl* von  $X$ . Im nächsten Abschnitt werden wir den folgenden entscheidenden Satz herleiten:

**Satz 2.1**  $\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i p_i.$

Aus Satz 2.1 ergibt sich unmittelbar die topologische Invarianz von  $\chi$ , denn die Homologiegruppen von  $X$  sind selbst topologische Invarianten. Es gilt jedoch noch viel mehr, denn die Homologiegruppen von  $X$  sind ja sogar Homotopieinvarianten von  $X$ . Anschaulich bedeutet dies, dass sie unverändert bleiben, wenn  $X$  "zusammengedrückt, auseinandergezogen, deformiert und verzerrt wird, es darf nur nichts zerrissen werden". So sind zum Beispiel ein Kreis und ein Kreisring homotopie-äquivalent. Es folgt also aus Satz 2.1, dass  $\chi(X)$  sogar homotopie-invariant ist.

Wir können auch in einer anderen Richtung weitergehen. Anstatt die Menge der  $i$ -Zellen als Basis einer *freien abelschen Gruppe*  $C_i(X)$  zu betrachten, können wir diese Menge als Basis eines Vektorraumes  $C_i(X; \mathbb{Q})$  über dem Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen nehmen.

Wir gehen nun gleich vor wie zuvor und berechnen die Homologiegruppen  $H_i(X; \mathbb{Q})$ . Die Bettizahl  $p_i = p_i(\mathbb{Q})$  ist dann die Dimension des Vektorraumes  $H_i(X; \mathbb{Q})$ .

Schliesslich können wir  $\mathbb{Q}$  durch einen beliebigen anderen Körper  $F$  ersetzen, wobei  $p_i(F)$  analog definiert wird. Man stellt an Beispielen leicht fest, dass im allgemeinen die Grössen  $p_i(\mathbb{Q})$  und  $p_i(F)$  verschieden sind. Trotzdem gilt nun erstaunlicherweise die folgende Verallgemeinerung von Satz 2.1; sie lässt sich mit Hilfe desselben Beweisargumentes wie Satz 2.1 erhalten:

$$\text{Satz 2.2} \quad \chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i p_i(F).$$

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem einfachen Beispiel, um die Bedeutung von Satz 2.1 und seiner Verallgemeinerung, Satz 2.2, zur Geltung zu bringen. Wir wählen  $X = \mathbb{R}P(2)$ , die reelle projektive Ebene. Die Betti-Zahlen sind gegeben durch  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = 0$  und  $p_2 = 0$ . Satz 2.1 liefert dann  $\chi = 1$ . Verwenden wir andererseits als Koeffizienten den Primkörper  $F$  bestehend aus zwei Elementen, so gilt  $p_0(F) = 1$ ,  $p_1(F) = 1$  und  $p_2(F) = 1$ . Wie vorhergesagt, bleibt die alternierende Summe gleich, obschon die einzelnen Summanden andere Werte erhalten haben.

### 3 Der Hopf-Spur-Satz und der Lefschetz-Fixpunkt-Satz

Aus den Kettengruppen  $C_i(X; F)$  lässt sich ein *Kettenkomplex* bilden. Für unsere Zwecke definieren wir einen Kettenkomplex  $C$  als eine Familie von endlichdimensionalen Vektorräumen  $C_i$  über  $F$  und linearen Abbildungen  $\partial : C_i \rightarrow C_{i-1}$ , mit den folgenden Eigenschaften

- (i)  $\partial_{i-1}\partial_i = 0 : C_i \rightarrow C_{i-2}$ ;
- (ii)  $C_i = 0$ ,  $i < 0$ ;
- (iii) es existiert  $n$  mit  $C_i = 0$  für  $i > n$ .

Wir nennen  $n$  die (globale) *Dimension* von  $C$ . Eine *Kettenabbildung*  $\varphi : C \rightarrow D$  ist eine Familie von linearen Abbildungen  $\varphi_i : C_i \rightarrow D_i$  mit  $\partial_i\varphi_i = \varphi_{i-1}\partial_i$ . (Wir schreiben dafür gewöhnlich kurz  $\partial\varphi = \varphi\partial$  und sagen,  $\varphi$  *kommutiere mit*  $\partial$ .) Es ist leicht zu zeigen, dass die Einschränkungen von  $\varphi_i$  auf  $Z_i(C)$  bzw.  $B_i(C)$  Abbildungen  $Z_i(C) \rightarrow Z_i(D)$  bzw.  $B_i(C) \rightarrow B_i(D)$  liefern. Daher induziert  $\varphi_i$  eine Abbildung  $\varphi_{*i} : H_i(C) \rightarrow H_i(D)$ , d.h.  $\varphi$  induziert eine Familie von Homologie-Homomorphismen. Natürlich sind  $H_i(C)$  und  $H_i(D)$  selbst Vektorräume über  $F$ , und  $\varphi_{*i}$  ist eine lineare Abbildung. Ist  $\alpha : V \rightarrow V$  eine lineare Selbstabbildung des Vektorraumes  $V$ , so bezeichnen wir mit  $\text{tr } \alpha$  die Spur von  $\alpha$ . Nun lässt sich folgendes zeigen:

**Satz 3.1** (Hopf-Spur-Satz) *Es sei  $C$  ein  $n$ -dimensionaler Kettenkomplex,  $\varphi : C \rightarrow C$  eine Kettenabbildung und  $\varphi_* : H(C) \rightarrow H(C)$  die induzierte Abbildung in der Homologie. Dann gilt*

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \text{tr } \varphi_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{tr } \varphi_{*i}. \quad (7)$$

Es ist leicht zu sehen, dass wir Satz 2.1 erhalten, wenn wir Satz 3.1 auf die Identitätsabbildung des Kettenkomplexes  $C(X; \mathbb{Q})$  anwenden und dass wir den allgemeinen Fall,

wo  $p_i$  durch  $p_i(F)$  ersetzt wird, auf dieselbe Art und Weise aus der Identitäts-Abbildung des Kettenkomplexes  $C(X; F)$  erhalten. Daher kann der Satz 3.1 als eine Verallgemeinerung des Satzes 2.1 betrachtet werden, und die Grösse auf der linken Seite von (7) kann als Verallgemeinerung der Euler-Poincaré-Charakteristik angesehen werden.

Wir betrachten nun eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei Polyedern  $X$  und  $Y$ . In jedem Standard-Textbuch über Algebraische Topologie (z.B. [HW], [Sp]) wird gezeigt, wie man der Abbildung  $f$  eine Kettenabbildung  $\varphi : C(X; F) \rightarrow C(Y; F)$  zuordnen kann. Bei diesem Vorgehen wird zwar  $\varphi$  selbst durch  $f$  nicht eindeutig bestimmt, aber es wird bewiesen, dass der induzierte Homologie-Homomorphismus  $\varphi_* : H(X) \rightarrow H(Y)$  durch  $f$  eindeutig bestimmt ist; tatsächlich hängt er sogar nur von der Homotopieklasse von  $f$  ab. Diese wichtige Tatsache liefert natürlich auch den wesentlichen Schritt im Beweis für die Homotopieinvarianz der Homologiegruppen. Wir wenden diese Überlegungen nun in der folgenden Weise an:

Es sei  $f : X \rightarrow X$  eine Selbstabbildung des  $n$ -dimensionalen Polyeders  $X$ , welche die Abbildung  $f_* : H(X; F) \rightarrow H(X; F)$  induziert. Wir definieren

$$\Lambda_f = \sum_{i=1}^n (-1)^i \operatorname{tr} f_{*i}, \tag{8}$$

und nennen  $\Lambda_f$  die *Lefschetz-Zahl* von  $f$  (bezüglich  $F$ ). Dann folgt aus Satz 3.1 sofort

**Satz 3.2** (Lefschetz-Fixpunkt-Satz) *Ist die Selbstabbildung  $f : X \rightarrow X$  homotop zu einer Abbildung ohne Fixpunkte, so gilt  $\Lambda_f = 0$ .*

Wir machen dazu die zwei folgenden Bemerkungen. Erstens können wir beim Beweis dieses Satzes (der lediglich die Standard-Techniken der simplizialen Approximation benützt) annehmen, dass  $f$  selbst fixpunktfrei ist, da  $\Lambda_f$  eine *Homotopieinvariante* von  $f$  ist. Zweitens induziert jedes beliebiges  $f$  die Identität auf der Homologiegruppe  $H_0(X)$ , welche unendlich zyklisch ist, da  $X$  zusammenhängend ist. Daher gilt  $\operatorname{tr} f_{*0} = 1$ .

Wir schliessen nun einige sehr weit führende Folgerungen aus Satz 3.2 an.

**Korollar 3.3** *Jede Selbstabbildung eines kompakten, zusammenhängenden, zusammenziehbaren Polyeders hat einen Fixpunkt.*

*Beweis* Es sei  $f : X \rightarrow X$  eine Abbildung des zusammenziehbaren Polyeders  $X$ . Dann gilt  $H_i(X; F) = 0$  für  $i \geq 1$  (denn dies gilt trivialerweise im Fall, wo  $X$  nur aus einem einzigen Punkt besteht). Daher folgt  $\operatorname{tr} f_{*i} = 0$  für  $i \geq 1$ . Aber es gilt, wie wir oben bemerkt haben,  $\operatorname{tr} f_{*0} = 1$ . Damit ergibt sich  $\Lambda_f = 1$ .

Dies ist eine weitgehende Verallgemeinerung des berühmten *Brouwerschen Fixpunktsatzes*, der sich auf Selbstabbildungen einer  $n$ -dimensionalen Vollkugel bezieht.

Die Homologiegruppen (mit ganzzahligen Koeffizienten) einer  $n$ -Sphäre  $S^n$  sind gegeben durch

$$H_0(S^n) = \mathbb{Z}, \quad H_n(S^n) = \mathbb{Z}, \quad H_i(S^n) = 0, \quad i \neq 0, n. \tag{9}$$

Ist  $f : S^n \rightarrow S^n$  eine Selbstabbildung<sup>2)</sup>, so induziert  $f$  auf  $H_n(S^n)$  einen Endomorphismus von  $\mathbb{Z}$ , also die Multiplikation mit einer ganzen Zahl  $d$ . Wir nennen  $d$  den *Grad* der Abbildung  $f$ . Natürlich ist  $d$  eine Homotopieinvariante von  $f$ .

**Korollar 3.4** *Ist  $f : S^n \rightarrow S^n$  homotop zu einer Abbildung ohne Fixpunkte, so gilt  $d = (-1)^{n+1}$ .*

*Beweis* Aus Korollar 3.3 folgt  $\Lambda_f = 1 + (-1)^n d$ , wobei  $\Lambda_f$  in Bezug auf  $\mathbb{Q}$  berechnet wird.

Auch die Umkehrung von Korollar 3.4 ist richtig, denn die antipodale Abbildung<sup>3)</sup>

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, -x_1, \dots, -x_n)$$

hat keinen Fixpunkt und ist vom Grad  $(-1)^{n+1}$ . Weiter ist jede Abbildung vom Grad  $(-1)^{n+1}$  homotop zur antipodalen Abbildung.

**Korollar 3.5** *Die Sphäre  $S^n$  lässt genau dann ein stetiges Feld von Einheitstangentialvektoren zu, wenn  $n$  ungerade ist.*

*Beweis* Es sei  $n$  ungerade und sei  $V$  das Vektorfeld, welches dem Punkt  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  den Einheitsvektor  $(x_1, -x_0, x_3, -x_2, \dots, x_n, -x_{n-1})$  zuordnet. Dies liefert offensichtlich ein stetiges Feld von Einheitstangentialvektoren. Für die Umkehrung betrachte wir ein derartiges Feld auf  $S^n$ . Für jeden Punkt  $p_0 \in S^n$  gehe man in Richtung des zugehörigen Feldvektors um eine Einheit vorwärts und übertrage diese Bewegung durch radiale Projektion vom Mittelpunkt 0 aus auf die Sphäre (siehe Figur 3). Dann ist die Funktion  $f$ , welche dem Punkt  $p_0$  den Punkt  $p_1$  zuordnet, offensichtlich eine (stetige) Selbstabbildung von  $S^n$  ohne Fixpunkt. Andererseits ist es genauso offensichtlich, dass  $f$  homotop ist zur Identitäts-Abbildung, welche selbstverständlich vom Grad 1 ist. Damit folgt  $1 = (-1)^{n+1}$  auf Grund von Korollar 3.4. Also ist  $n$  ungerade.

Diese Beispiele beschreiben einige der Triumphe der topologischen Entwicklungen der Euler-Charakteristik aus der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts. Sie mögen genügen, um den absurden Vorwurf zurückzuweisen, die hier vorgeführten topologischen Begriffsbildungen seien unnatürlich und nicht intuitiv. Wir wenden uns nun (einigen wenigen) weiteren und sehr neuen Entwicklungen zu.

## 4 Selbstüberlagernde Polyeder

**Definition 4.1** Es sei  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine (stetige) Abbildung des zusammenhängenden Polyeders  $\tilde{X}$  auf  $X$ . Dann heisst  $p$  eine *Überlagerungs-Abbildung* und  $\tilde{X}$  eine *Überlagerung* von  $X$ , falls es für jedes  $x \in X$  und  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$  Umgebungen  $U(x)$  und  $\tilde{U}(\tilde{x})$  gibt, sodass

(i)  $\tilde{U}(\tilde{x})$  von  $p$  homöomorph auf  $U(x)$  abgebildet wird;

---

2) Es wird selbstverständlich immer angenommen, dass eine Abbildung zwischen topologischen Räumen eine stetige Abbildung ist.

3) Wir stellen uns  $S^n$  als Einheitssphäre  $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$  eingebettet in  $\mathbb{R}^{n+1}$  vor.

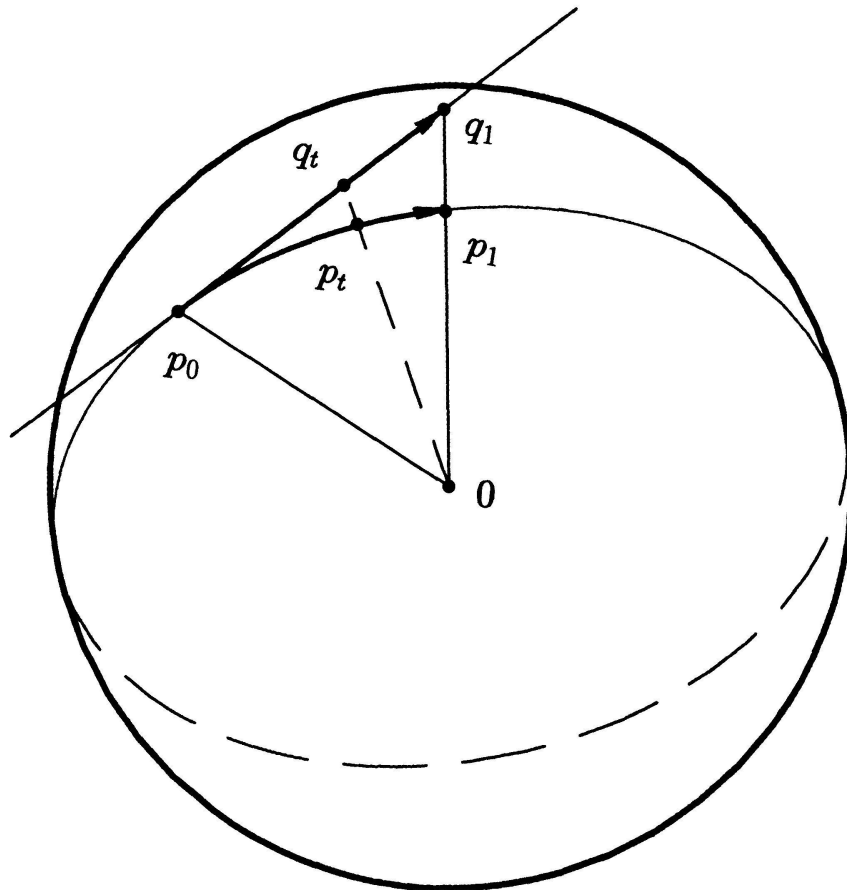


Fig. 3 Ein Einheits tangentialvektor  $p_0q_1$  und seine Projektion auf die Sphäre  $S^n$  mit Zentrum 0.

- (ii)  $\tilde{U}(\tilde{x}_1)$  und  $\tilde{U}(\tilde{x}_2)$  disjunkt sind, falls  $\tilde{x}_1$  und  $\tilde{x}_2$  voneinander verschiedene Punkte in  $p^{-1}(x)$  sind;
- (iii)  $p^{-1}U(x) = \bigcup_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} \tilde{U}(\tilde{x})$ .

Als Beispiele erwähnen wir:

- (a) Die Abbildung  $\mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$ , welche gegeben ist durch  $x \mapsto e^{ix}$ , ist eine Überlagerungs-Abbildung.
- (b) Die Abbildung  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P(n)$ , welche diametral gegenüberliegende Punkte auf  $S^n$  identifiziert, ist eine Überlagerungs-Abbildung von  $S^n$  auf den  $n$ -dimensionalen reellen projektiven Raum.

Überlagerungs-Abbildungen sind sehr gut geartet. Die Kardinalität von  $p^{-1}(x)$  ist unabhängig von  $x$  und heisst die Anzahl der *Blätter* der Überlagerung. Es handelt sich also bei Beispiel (a) um eine Überlagerung mit unendlich vielen Blättern und bei Beispiel (b) um eine zweiblättrige Überlagerung. Versehen wir  $X$  mit einer simplizialen (oder allgemeiner mit einer zellulären) Struktur, so können wir  $\tilde{X}$  eine assoziierte simpliziale Struktur geben, derart dass  $p$  eine simpliziale Abbildung ist und dass das Urbild eines  $i$ -Simplexes von  $X$  aus  $d$   $i$ -Simplexen von  $\tilde{X}$  besteht, wobei  $p$  eine  $d$ -blättrige Überlagerung ist. Damit lässt sich sofort schliessen:

**Satz 4.1** Ist  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine  $d$ -blättrige Überlagerungs-Abbildung, so gilt

$$\chi(\tilde{X}) = d \chi(X).$$

Kehren wir zu Beispiel (b) zurück, so sehen wir, dass Satz 4.1 erlaubt, die Euler-Poincaré-Charakteristik des reellen projektiven Raumes zu berechnen. Es gilt  $\chi(\mathbb{R}P^n) = 1$  für gerade  $n$  und  $\chi(\mathbb{R}P^n) = 0$  für ungerade  $n$ .

In diesem Abschnitt werden wir Polyeder untersuchen, die *Selbstüberlagerungen* zulassen, d.h. kompakte, zusammenhängende Polyeder  $X$ , für die es eine nichttriviale<sup>4)</sup> Überlagerungs-Abbildung  $p : X \rightarrow X$  gibt. Da  $X$  kompakt ist, muss die Anzahl  $d$  der Blätter der Überlagerung endlich sein, und auf Grund der Nichttrivialität muss gelten  $d \geq 2$ . Wir schliessen daher sofort aus Satz 4.1

**Korollar 4.2** Falls  $X$  eine Selbstüberlagerung zulässt, so gilt  $\chi(X) = 0$ .

Wir bemerken, dass die Untersuchung von Selbstüberlagerungen durch Arbeiten in der Differentialgeometrie auf Infranal-Mannigfaltigkeiten angeregt worden ist. Wir werden darauf aber nicht eingehen. Das klassische Beispiel eines selbst-überlagernden Polyeders ist  $S^1$ , denn die Abbildung  $e^{ix} \mapsto e^{idx}$  ist eine  $d$ -blättrige Überlagerung. Die einzigen Kandidaten für selbst-überlagernde Polyeder unter den geschlossenen Flächen sind wegen Korollar 4.2 der Torus  $S^1 \times S^1$  und die Kleinsche Flasche  $K$ . Es ist klar, dass sich der Torus selbst überlagert. Wir haben sogar

**Satz 4.3** Ist  $X$  selbstüberlagernd, so ist auch  $X \times Y$  selbstüberlagernd.

*Beweis* Betrachte eine nichttriviale Überlagerungs-Abbildung  $p : X \rightarrow X$ . Dann ist

$$p \times \text{Id}_Y : X \times Y \rightarrow X \times Y$$

eine nichttriviale Überlagerungs-Abbildung.

Beachte, dass Satz 4.3 vollständig mit Korollar 4.2 verträglich ist, denn es gilt

**Satz 4.4**  $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$ .

Dies lässt sich mit Hilfe der Künneth-Formel für die Homologiegruppen eines topologischen Produkts leicht zeigen [HW]. Man beachte auch, dass Satz 4.4 nicht nur eine klare Rechtfertigung für die Ausdehnung der Euler-Charakteristik auf höhere Dimensionen liefert, sondern auch die von den Topologen gewählte Erweiterung der Definition unwiderlegbar als die richtige nachweist.

Wir skizzieren nun einen Beweis dafür, dass die Kleinsche Flasche  $K$  selbstüberlagernd ist. Die Einzelheiten sind in [H] zu finden.

---

4) Wir müssen ausdrücklich nichttriviale Überlagerungen verlangen, denn jeder Homöomorphismus ist eine Überlagerungs-Abbildung.

**Satz 4.5** Für jede ungerade Zahl  $d$  gibt es eine  $d$ -blättrige Überlagerung  $K \rightarrow K$ .

*Beweisskizze* Da  $K$  asphärisch ist, genügt es zu zeigen, dass die Fundamentalgruppe  $G$  von  $K$  Untergruppen  $H$  vom Index  $d$  besitzt, welche zu  $G$  isomorph sind. Wir haben

$$G = \langle x, y \mid yxy^{-1} = x^{-1} \rangle.$$

Wenn wir Erzeugende  $a = xy$  und  $b = y$  wählen, erhalten wir

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle.$$

Wir beweisen nun das folgende Lemma.

**Lemma 4.6** Es seien  $G = \langle a, b \mid a^k = b^k \rangle$  und  $H$  eine Untergruppe von  $G$ , welche von  $a^h$  und  $b^h$  erzeugt wird, wobei  $h$  und  $k$  teilerfremd sind. Dann gilt: (i)  $H$  ist normal in  $G$  und  $G/H$  ist zyklisch von der Ordnung  $h$ ; (ii)  $H \cong G$ .

*Skizze des Beweises des Lemmas* (i) Wir wählen  $u$  und  $v$  mit  $hu + kv = 1$ . Damit ist  $b^{-1}a^hb = b^{-kv}b^{-hu}a^hb^{hu}b^{kv} = b^{-hu}a^hb^{hu}$ , denn  $b^k$  liegt im Zentrum von  $G$ . Daher liegt  $b^{-1}a^hb$  in  $H$ . Auf ähnliche Weise erhalten wir  $a^{-1}b^ha \in H$ . Also ist  $H$  normal in  $G$ , und es folgt

$$G/H = \langle \bar{a}, \bar{b} \mid \bar{a}^k = \bar{b}^k, \bar{a}^h = 1, \bar{b}^h = 1 \rangle.$$

Aus  $\bar{a}^k = \bar{b}^k, \bar{a}^h = \bar{b}^h$  ergibt sich  $\bar{a} = \bar{b}$ , und damit

$$G/H = \langle \bar{a} \mid \bar{a}^h = 1 \rangle.$$

(ii) Die Elemente von  $G$  lassen sich in der Normalform

$$c^q a^{r_1} b^{s_1} \dots a^{r_n} b^{s_n}$$

schreiben. Dabei gilt  $c = a^k = b^k$  und  $0 \leq r_i, s_j \leq k - 1$ , und es dürfen ausserdem höchstens  $r_1$  und  $s_n$  gleich Null sein. Dann zeigt man, dass die Elemente von  $H$  die gleiche Normalform  $C^q A^{r_1} B^{s_1} \dots A^{r_n} B^{s_n}$  mit  $A = a^h, B = b^h$  und  $C = c^h$  zulassen.

Jetzt brauchen wir nur noch  $k = 2$  zu wählen, sodass  $h$  eine beliebige ungerade Zahl ist, weiter die Einbettung  $H \subseteq G$  durch eine echte Injektion  $i : G \rightarrow G$  zu ersetzen und  $i$  durch eine Überlagerungs-Abbildung  $p : K \rightarrow K$  zu realisieren. Man beachte schliesslich, dass  $\tilde{K}$  der Torus ist, falls es sich bei  $p : \tilde{K} \rightarrow K$  um eine  $d$ -blättrige Überlagerung,  $d$  gerade, handelt.

Um weitere interessante Beispiele zu erhalten, bedarf es einer Anzahl technischer Vorbereitungen. Ein möglicher Zugang wird in [CH] und [H] vorgestellt. Es sei  $N$  eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe, gegeben durch die Präsentation<sup>5)</sup>

$$N = \langle x, y \mid x^n = 1, yxy^{-1} = x^u \rangle.$$

Weiter sei  $t$  die Ordnung von  $u \bmod n$ . Für jedes  $m$ , welches teilerfremd ist zu  $t$ , setzen wir

$$N_m = \langle x, y \mid x^n = 1, yxy^{-1} = x^{u^m} \rangle.$$

Wie man zeigen kann (siehe [CH]) ist  $N_m$  ebenfalls nilpotent, und wir haben

5)  $N$  ist nilpotent genau dann, wenn gilt  $p \mid (u - 1)$  für jeden Primteiler  $p$  von  $n$ .

**Satz 4.7**  $N_{m_1} \cong N_{m_2} \Leftrightarrow m_1 \equiv \pm m_2 \pmod{t}$ .

Wir können nun für jedes  $m$  ein Polyeder  $X_m$  konstruieren, welches ein Kreisbündel über einer festen Basis ist, so dass

$$\pi_1 X_m = C = \langle \xi \rangle, \quad \pi_2 X_m = \mathbb{Z}/n = \langle a \rangle \quad \text{und} \quad \xi \cdot a = u^m a. \quad (10)$$

Hier ist  $\pi_1$  die Fundamentalgruppe und  $\pi_2$  die zweite Homotopiegruppe (auf der  $\pi_1$  operiert), und  $C$  ist unendlich zyklisch<sup>6</sup>). Das Gegenstück zu Satz 4.7 ist

**Satz 4.8** Die Polyeder  $X_{m_1}$  und  $X_{m_2}$  sind genau für  $m_1 \equiv \pm m_2 \pmod{t}$  homotopieäquivalent.

Dann gibt es für jedes  $m$  eine  $d$ -blättrige Überlagerung  $p : X_m \rightarrow X_m$  für jedes  $d \equiv 1 \pmod{t}$ . Die Situation hier ist jedoch noch interessanter. Denn tatsächlich gibt es für jedes zu  $t$  teilerfremde Paar  $m_1, m_2$  Überlagerungs-Abbildungen  $X_{m_1} \rightarrow X_{m_2}$ . Ferner kann  $p : X_m \rightarrow X_m$  als Zusammensetzung  $X_m \rightarrow X_{m'} \rightarrow X_m$  für jedes andere zu  $t$  teilerfremde  $m'$  verwirklicht werden. Daher überdecken sich  $X_m$  und  $X_{m'}$  gegenseitig; sie sind aber nicht äquivalent – die Schröder-Bernstein-Eigenschaft ist hier nicht erfüllt. Übrigens gewährleistet eine schwache Verallgemeinerung eines tiefen Resultates, das auf Serre [Se] zurückgeht, dass diese Kreisbündel  $X_m$  wie verlangt der Gleichung  $\chi(X_m) = 0$  genügen.

Damit schliesse ich mein Plädoyer.

## Literatur

- [CH] Casacuberta, Carles und Hilton, Peter: Calculating the Mislin genus of a certain family of nilpotent groups, *Comm. in Alg.* 19(7) (1991), 2051–2069.
- [H] Hilton, Peter: On the genus of nilpotent groups and spaces, *Israel Journ. Math.* 54, 1 (1986), 1–3.
- [HW] Hilton, Peter und Wylie, Shaun: *Homology Theory*, Cambridge University Press, 2. Auflage (1962).
- [Se] Serre, Jean-Pierre: Homologie singulière des espaces fibrés Applications, *Ann. of Math.* 54 (1951), 425–505.
- [Sp] Spanier, Edwin: *Algebraic Topology*, McGraw-Hill (1966).

Peter J. Hilton  
 Department of Mathematical Sciences  
 State University of New York  
 P.O. Box 6000  
 Binghamton, NY 13902-6000

Übersetzung aus dem Englischen: Bea Bleile und Urs Stambach.

---

6) Ich schreibe  $C$ , da die Fundamentalgruppe im allgemeinen *nicht* kommutativ ist und daher multiplikativ geschrieben wird. Die höheren Homotopiegruppen sind hingegen kommutativ und werden additiv geschrieben.