

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 49 (1994)

Artikel: Dichteste Packungen von gleichen Kreisen in einem Quadrat
Autor: Peikert, Ronald
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45416>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Dichteste Packungen von gleichen Kreisen in einem Quadrat

Ronald Peikert

Ronald Peikert wurde 1955 geboren. Er studierte Mathematik an der ETH Zürich und promovierte 1985 bei Professor E. Engeler mit einem Thema aus der theoretischen Informatik. Heute arbeitet er am Interdisziplinären Projektzentrum für Supercomputing der ETH Zürich, wo er sich vor allem mit wissenschaftlicher Visualisierung beschäftigt.

1 Einleitung

Eine interessante Klasse von geometrischen Optimierungsproblemen besteht in der Suche nach dichten Packungen resp. sparsamen Überdeckungen. Eine schöne Übersicht findet der Leser in [1].

Wer hat nicht schon eine Anzahl gleichartiger Münzen auf einer Tischplatte hin- und hergeschoben und versucht, sie möglichst dicht anzuordnen? Für die ganze Ebene ist die dichteste Kreispackung experimentell leicht zu finden: Die Mittelpunkte der Kreise bilden ein aus gleichseitigen Dreiecken bestehendes Gitter. Auch der Beweis dafür, dass damit wirklich das Optimum erreicht wird, ist nicht allzu schwierig. Um Größenordnungen schwieriger ist das verwandte Problem, in einem vorgegebenen Teilgebiet der Ebene, zum Beispiel *in einem Quadrat, n gleiche Kreise mit möglichst grossem Radius nicht überlappend zu plazieren*. Schon wenige Experimente zeigen, dass sich die optimalen Anordnungen für verschiedene n wesentlich voneinander unterscheiden. Dies hat nicht nur zur Folge, dass das Problem schwierig anzugehen ist, sondern auch, dass der Beweis für die Optimalität für jedes n gesondert geführt werden muss. – Ronald Peikert berichtet in seinem Beitrag über die kürzlich erhaltenen Lösungen des Problems für die Werte n mit $n \leq 20$. Die Frage wird dabei in geschickter Weise als Optimierungsproblem behandelt und mit Hilfe eines Grosscomputers gelöst. Be merkenswert ist, dass der Ansatz von Ronald Peikert auch gleich den Beweis für die Optimalität liefert. Man wird am darauffolgenden Beitrag von Hans Melissen über den Fall $n = 6$ ermessen können, welchen Beweisaufwand man sich hier durch den Einsatz eines Computers erspart hat. *ust*

Bekannt und für viele Anwendungsgebiete von Interesse ist z.B. das *Tammes-Problem*, n möglichst grosse gleiche Kreise überlappungsfrei auf einer Kugeloberfläche zu plazieren (siehe [6]). Eine verwandte und fast ebenso naheliegende Fragestellung ist die hier behandelte, nämlich das Packen von gleichen Kreisen in ein Quadrat.

Seit 1965 sind die dichtesten Packungen für neun oder weniger Kreise bekannt ([9], [10]). Der von R.L. Graham nicht explizit angegebene Beweis für den Fall von sechs Kreisen wurde kürzlich von H. Melissen ([7]) nachgeliefert. Erstaunlich ist dabei die übereinstimmend gemachte Feststellung, dass dieses unscheinbare Problem bereits einen beachtlichen Aufwand erfordert.

Aus den achtziger Jahren stammen die Optimalitätsbeweise für 14, 16, 25 und 36 Kreise ([12], [13], [14], [5]).

Die fehlenden Beweise für bis zu zwanzig Kreise wurden 1991 gefunden ([2]) mit einer Methode, die noch erläutert wird. Ausser in den Fällen 17 und 19 traten dabei Packungen auf, die schon früher gefunden und als optimal vermutet wurden ([4], [11], [8]). Besonderes Interesse verdient der Fall der zehn Kreise, weil hier zum ersten Mal eine Packung ohne jegliche Symmetrie erscheint. K.Schlüter ([11]) entdeckte diese Packung bereits 1971, was umso beachtlicher ist, als die übrigen symmetriefreien optimalen Packungen nur mit Computerhilfe gefunden wurden. Die Methoden reichen dabei von spezieller Geometrie-Software ([8]) über *divide-and-conquer* Techniken ([2]) bis zur Simulation physikalischer Prozesse ([3], [6]).

2 Notation und Definitionen

Zunächst wollen wir das Problem auf eine etwas handlichere Form bringen. Anstatt n Kreise vom Durchmesser m in ein Quadrat der Seitenlänge s zu packen, wollen wir n (Mittel-)Punkte in einem Quadrat der Seitenlänge $s - m$ so verteilen, dass deren gegenseitiger Abstand mindestens m ist. Da ja nur das Verhältnis $m : s$ interessiert, normieren wir die Seitenlänge $s - m$ auf 1.

Betrachten wir nun eine feste Anzahl n . Die n Mittelpunkte lassen sich durch einen Koordinatenvektor $\vec{x} = \{x_1, y_1, x_2, \dots, y_n\} \in [0, 1]^{2n}$ beschreiben. Der Mindestabstand ist dann $\mu(\vec{x}) = \min_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$. Gesucht ist jetzt das *globale Maximum* m_n von $\mu(\vec{x})$ auf $[0, 1]^{2n}$. Dieses Maximum wird i.a. in nicht nur einem Punkt angenommen. Wir führen daher die folgenden anschaulichen Begriffe ein: Eine *Anordnung* von n Kreisen mit Durchmesser m ist ein $\vec{x} \in [0, 1]^{2n}$ mit $\mu(\vec{x}) \geq m$. Eine *Packung* von n Kreisen mit Durchmesser m ist eine Zusammenhangskomponente der Menge der Anordnungen (für n und m). Zwei Anordnungen gehören also zur selben Packung, wenn sie sich durch "Verschieben" der Kreise ineinander überführen lassen. Schliesslich identifizieren wir noch Packungen, die sich bloss durch eine Permutation der Indizes und/oder eine Symmetrie-Abbildung unterscheiden.

Eine Packung gemäss dieser Definition kann durchaus so aussehen, dass jeder Kreismittelpunkt in einer Umgebung frei bewegt werden kann. Eine solche Packung ist aber offensichtlich nicht (lokal) optimal, das heisst, m nimmt kein (lokales) Maximum an. Bei verwandten Packungsproblemen (z.B. drei gleiche Kreise in einen Kreis zu packen) können sogar bei der optimalen Packung alle Mittelpunkte entlang einer Linie bewegt

werden. Bei unserem Packungsproblem ist dies jedenfalls für die betrachteten kleinen n nicht der Fall: Hier ist bei den optimalen Packungen die Mehrzahl der Mittelpunkte fixiert. Diese beobachtete Tatsache ermöglicht die nachfolgend beschriebene Beweismethode (wird aber selbstverständlich nicht als Voraussetzung verwendet). Für die betrachteten kleinen n ist es zudem so, dass jeweils diese fixierten Mittelpunkte zur Identifikation der Packung sowie zur exakten Bestimmung der algebraischen Zahl m_n genügen. Daher kann hier eine optimale Packung auch in eindeutiger Weise durch einen *Graphen* dargestellt werden: Für jeden Mittelpunkt und für jede der vier Quadratseiten gibt es einen Knoten, und zwischen zwei Knoten gibt es genau dann eine Kante, wenn sich die zwei Kreise resp. der Kreis und die Quadratseite berühren.

3 Eine Methode zum Auffinden und Beweisen von optimalen Packungen

Mit der hier skizzierten Methode ist es gelungen ([2]), für $n = 10, \dots, 20$ die mit Ausnahme von $n = 14$ und $n = 16$ noch fehlenden Optimalitätsbeweise zu führen. Für jedes n sind die folgenden vier Schritte durchzuführen:

- 1. Schritt:** Finde eine gute untere Schranke m für m_n . Dies kann mittels einer Monte-Carlo Methode ([3]) geschehen.
- 2. Schritt:** Grenze die Menge der Anordnungen von n Kreisen mit Durchmesser m ein auf eine Menge von $2n$ -dimensionalen Intervallen. Dies geschieht mit der unten beschriebenen “Eliminationsprozedur”, die auf einer ausgedehnten Fallunterscheidung basiert.
- 3. Schritt:** *Errate* die optimale Packung aufgrund des erhaltenen Intervalls für die Mittelpunkte. Dies erfordert die Angabe des Graphen der Packung. Dabei muss natürlich auch geprüft werden, ob der vermutete Graph tatsächlich der Graph einer Packung ist, d.h. ob die Koordinaten durch das dem Graphen entsprechende Gleichungssystem weder über- noch unterbestimmt sind.
- 4. Schritt:** Beweise, dass innerhalb des Intervalls ausser der vermuteten Packung keine weitere mit Kreisen von (mindestens) demselben Durchmesser existiert. Dies geschieht mit der unten beschriebenen “Verifikationsprozedur”.

Die Schritte 2 und 4 erfordern Computerunterstützung, da eine grosse Anzahl Fallunterscheidungen resp. Iterationen nötig ist.

4 Die Eliminationsprozedur

Der Grundgedanke dieses Verfahrens ist die Zerlegung des Einheitsquadrates in kongruente Rechtecke, die höchstens je einen Kreismittelpunkt enthalten können. Um die Anzahl der Fälle klein zu halten, wählt man die Rechtecke möglichst gross und möglichst nahe der Quadratform. Anderseits muss deren Diagonale kleiner sein als die vorliegende untere Schranke m für m_n . Für $n = 10, \dots, 20$ eignen sich Zerlegungen in 16, 20, resp. 25 Rechtecke gemass Tab. 1.

Bei einer Zerlegung in t Rechtecke können die n Mittelpunkte nun auf $\binom{t}{n}$ Arten auf die Rechtecke verteilt werden. Daraus ergibt sich die (grosse) Anzahl der zu behandelnden Fälle. Um die Ergebnisse nachprüfbar zu machen, sei hier die *Numerierung* der Fälle explizit angegeben: Vorerst numerieren wir die Rechtecke gemäss Abb. 1. Jedem der

n	m	Anzahl Rechtecke	feinstes Gitter	gesamte Anzahl Fälle	verbleibende Anzahl Fälle	CPU Sekunden
10	.4212795	4×4	1024×1024	1051	1	17
11	.3982073	4×4	1024×1024	567	3	36
12	.3887301	4×4	1024×1024	267	1	13
13	.3660960	4×4	1024×1024	77	3	34
14	.3489152	4×5	1280×1280	9808	8	573
15	.3410813	4×5	1280×1280	3912	1	179
16	.3333333	4×5	1280×1280	1253	1	170
17	.3061539	5×5	1280×1280	136080	11	6567
18	.3004626	5×5	1280×1280	60645	2	8495
19	.2895419	5×5	1280×1280	22475	18	11551
20	.2866116	5×5	1280×1280	6814	2	11354

Tabelle 1 Ergebnisse des unmodifizierten Algorithmus

$\binom{t}{n}$ Fälle ordnen wir nun einen Code zu, nämlich eine t -stellige Binärzahl, deren i -tes Bit genau dann gesetzt ist, wenn das i -te Rechteck besetzt ist. Fälle, die symmetrische Bilder von Fällen mit kleinerem Code sind, lassen wir weg. Die verbleibenden Fälle numerieren wir nun bei 1 beginnend und nach aufsteigendem Code.

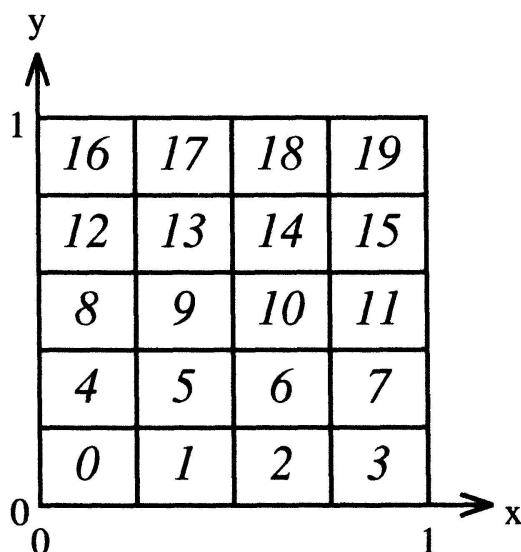
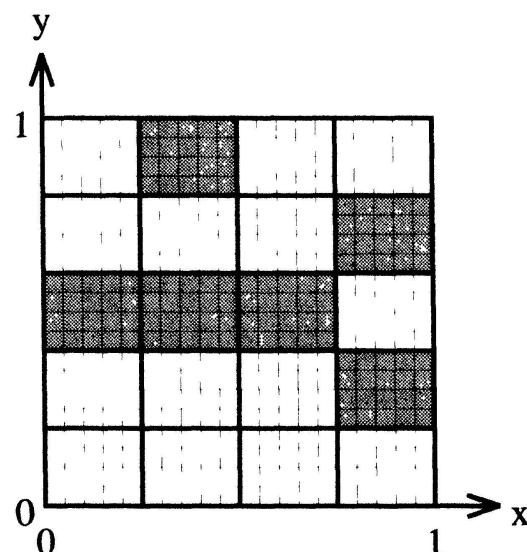
Abb. 1 Rechtecke ($n = 14$)

Abb. 2 Zellen (Fall Nr. 1237)

Der Bequemlichkeit halber betrachten wir die Rechtecke als *abgeschlossen*. Damit nehmen wir in Kauf, dass es Anordnungen der Kreise gibt, die mehr als einem Fall angehören.

Jeder einzelne Fall entspricht nun einem $2n$ -dimensionalen Intervall. Die meisten dieser Intervalle enthalten nun aber keine einzige gültige Anordnung der n Kreise mit Durchmesser m . Das Ziel der nachfolgend beschriebenen Prozedur ist es, diese Fälle zu entdecken und zu eliminieren, sowie für die verbleibenden Fälle die Intervalle soweit als möglich zu verkleinern.

Das Einheitsquadrat wird hierzu in quadratische und ebenfalls abgeschlossene *Zellen* aufgeteilt, deren Grösse so gewählt wird, dass jede Zelle ganz in ein Rechteck zu liegen kommt. Die Idee ist nun, alle jene Zellen zu *markieren*, in denen *kein* Kreismittelpunkt liegen kann. Zu Beginn sind dies alle Zellen in den im jeweiligen Fall unbesetzten Rechtecken (siehe Abb. 2). Abb. 3 zeigt, wie nun weitere Zellen markiert werden können: Angenommen die beiden abgebildeten Rechtecke seien besetzt, dann liegt ein Kreismittelpunkt z.B. in der schwarz ausgefüllten Zelle. Dies schliesst für das rechte Rechteck aber die in Abb. 3 schraffierten Zellen aus, da die maximale Entfernung der zwei Kreismittelpunkte sonst kleiner als m wäre.

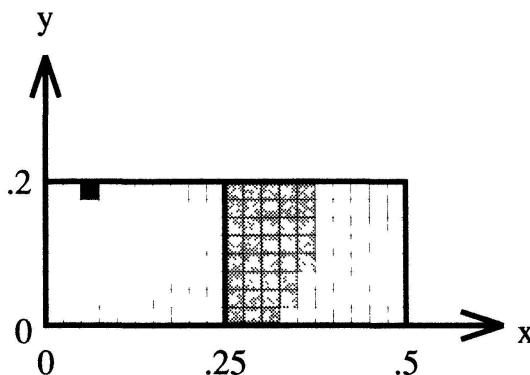


Abb. 3 Rechtecke 0 und 1

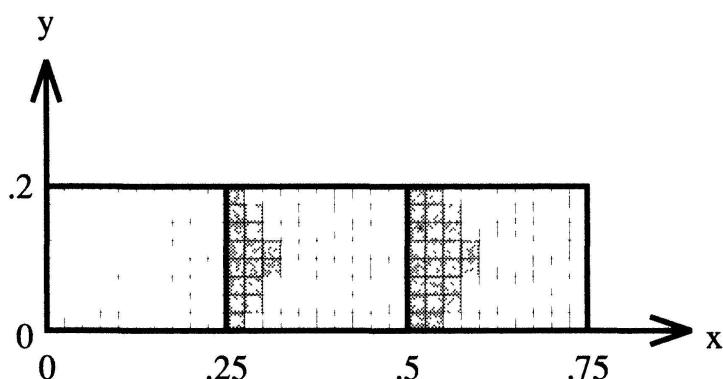


Abb. 4 Rechtecke 0, 1 und 2

Wiederholt man dies für *alle* Zellen des linken Rechtecks, so stellt man fest, dass einige Zellen im rechten Rechteck *jedesmal* ausscheiden und daher markiert werden können. Diese Zellen sind in Abb. 4 schraffiert dargestellt, wo zudem gezeigt wird, wie in einem weiteren Rechteck als Folge der schon markierten Zellen eine noch grössere Anzahl Zellen markiert werden kann.

Wie in diesem Beispiel verfährt man nun systematisch in allen vier Richtungen bis keine weiteren Zellen mehr markiert werden können. Wenn in einem besetzten Rechteck alle Zellen markiert sind, bedeutet dies, dass der vorliegende Fall unmöglich ist und abgebrochen werden kann. Andernfalls wird das Gitter jetzt verfeinert, indem jede Zelle in vier kleinere Zellen aufgeteilt wird, wobei die Markierung vererbt wird.

Dieses Verfahren wird teils durch die Rechenzeit, teils durch den Speicherplatz limitiert. Es ist zu beachten, dass man eine dünn besetzte Matrix erhält, wenn man nur die Übergänge zwischen markiert und unmarkiert abspeichert. Tab. 1 zeigt das erstaunliche

Ergebnis dieser einfachen Prozedur: Auch wenn man das Gitter nur in bescheidenem Mass verfeinert, genügt das, um die Anzahl der Fälle auf ganz wenige zu reduzieren.

In einigen dieser verbleibenden Fälle ist neben einer Verfeinerung auf bis zu 655360 mal 655360 Zellen eine Modifikation des Verfahrens notwendig, damit das Verfahren abbricht resp. damit genügend Zellen markiert werden können.

Diese Modifikation besteht zum einen darin, dass innerhalb bestimmter Rechtecke auf das Verfeinern verzichtet wird. Dies geschieht deshalb, weil man dort einen beweglichen Kreis vermutet, welcher natürlich zu einer grossen Anzahl unmarkierter Zellen führt. Man beachte, dass der Rechenaufwand pro Iteration im wesentlichen eine Funktion der Anzahl *unmarkierter* Zellen ist.

Die zweite zu beseitigende Schwierigkeit besteht darin, dass zu demselben Fall zwei verschiedene optimale oder nahezu optimale Packungen gehören können. Hier kann dem Verfahren so nachgeholfen werden, dass man eines der Rechtecke in zwei geeignete (durchaus auch inkongruente) Rechtecke zerteilt und dadurch den einen Fall durch zwei Unterfälle ersetzt, die leichter zu behandeln sind. In Tab. 2 sind die Fälle aufgelistet, die auf diese Weise eliminiert werden müssen, sowie diejenigen, die zu den optimalen Packungen führen.

n	optimaler Fall	übrige Fälle	Fehlerradius erhalten	Fehlerradius erlaubt
10	951	—	.0011	.005
11	553	241, 275	.00005	.01
12	165	—	.00005	.01
13	55	54, 58	.0057	.01
14	1237	2050, 2054, 2510, 2528, 2951, 3223, 3605	.00004	.05
15	1367	—	.00004	.05
16	255	—	.00001	.1
17	40682 ¹⁾	40681, 42736, 46128, 46828, 55148, 114965, 114966, 114967, 115025, 115985,	.00009	.01
18	26230	56183	.00032	
19	12817	9721, 9799, 9800, 9801, 9802, 9803, 9804, 9805, 11210, 11273, 11274, 12885, 12992, 13002, 13007, 14540, 21793,	.00014	.01
20	4942	4247	.0014	.0025
			.00005	.02

Tabelle 2 Optimale und schwierig eliminierbare Fälle

5 Die Verifikationsprozedur

Diese von Schaers Beweis ([9]) inspirierte Prozedur ist der Eliminationsprozedur ähnlich in der Hinsicht, dass auf iterative Weise gewisse Gebiete verkleinert werden, die für die Kreismittelpunkte zulässig sind. Die Gebiete bestehen diesmal aber nicht aus den

1) Dieser Fall enthält beide optimalen Packungen

Zellen eines Gitters, sondern sind zu Beginn *kreisförmig*, wobei die Mittelpunkte die Kreismittelpunkte der vermuteten optimalen Packung sind.

Das zum Kreismittelpunkt P_i gehörende Gebiet G_i ist also ein Kreis mit Mittelpunkt P_i und Radius r_i derart, dass darin das von der Eliminationsprozedur gelieferte Gebiet vollständig enthalten ist. Wenn ein Kreis der Packung *beweglich* ist, wird diesem *kein* Gebiet zugeordnet.

Liegt nun ein P_i auf einer Seite oder Ecke des Einheitsquadrats, so kann G_i sofort auf einen Halb- resp. Viertelkreis reduziert werden, da die Kreismittelpunkte ja innerhalb des Einheitsquadrates liegen müssen.

Für jedes Paar von sich berührenden Kreisen der vermuteten optimalen Packung verfährt man nun wie folgt: Man entfernt vom ersten Gebiet Punkte, deren Abstand zu *allen* Punkten des zweiten Gebietes kleiner als das vermutete m_n ist. Der Einfachheit halber beschränkt man sich dabei auf *geradlinige* Schnitte. Die Bestimmung der Schnittlinie ist ein einfaches elementargeometrisches Problem. Allerdings muss zur Vermeidung von Rundungsfehlern mit rationaler Arithmetik gearbeitet werden.

Das Verfahren wird nun solange iteriert, bis alle Gebiete zu *Polygonen* geworden sind, die *im Innern* der ursprünglichen Gebiete liegen. Abb. 5 illustriert diesen Prozess am Beispiel $n = 14$, $r_0 = \dots = r_{13} = .05$, wobei der Sichtbarkeit wegen die G_i sowie die abgeschnittenen Teilgebiete vergrößert dargestellt sind.

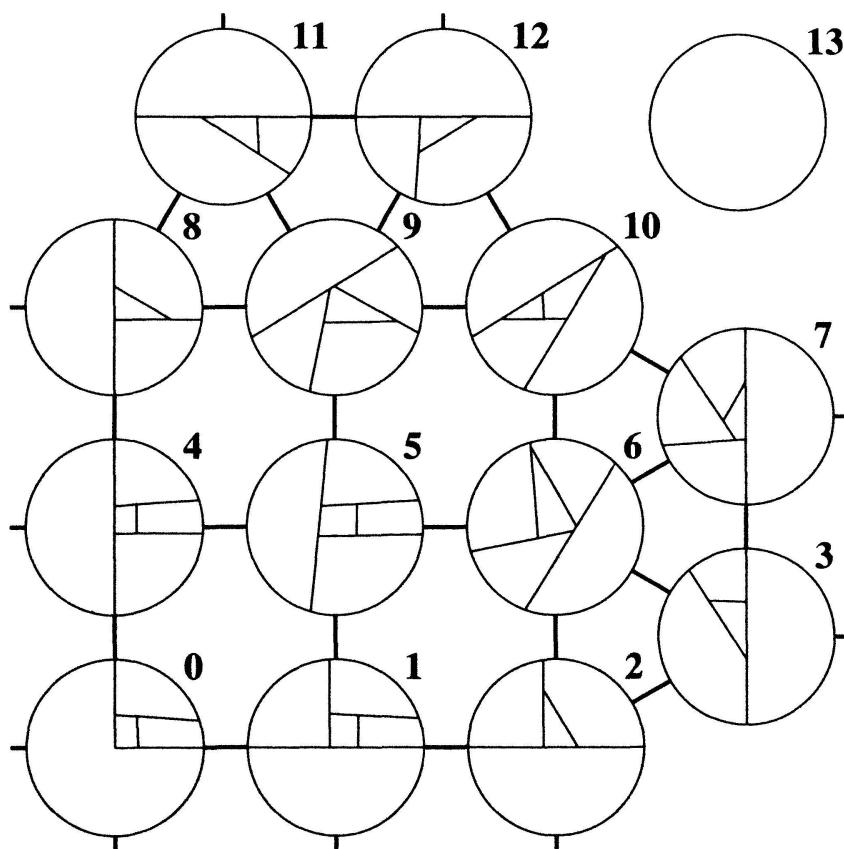


Abb. 5 Die Verifikationsprozedur für $n = 14$

Damit ist es möglich geworden, die Gebiete durch kleinere Kreise, konzentrisch zu den ursprünglichen, zu ersetzen. Man kann voraussetzen, dass alle Kreise im selben Verhältnis $0 < q < 1$ verkleinert werden.

Mit den verkleinerten G_i kann nun exakt dieselbe Folge von Schnitten erneut durchgeführt werden, wobei die neuen Schnittlinien parallel zu den alten und im q -fach verkleinerten Abstand vom entsprechenden Mittelpunkt P_i gezogen werden. Dass diese Schnitte ebenfalls zulässig sind, muss noch gezeigt werden. Vorerst stellen wir aber fest, dass durch die (gedachte) weitere Iteration die Gebiete G_i gegen die einelementigen Mengen $\{P_i\}$ konvergieren. Damit ist die vermutete Packung als optimal bestätigt.

Natürlich terminiert das Verfahren nicht notwendigerweise, d.h. es kann Gebiete geben, die sich nie auf Polygone reduzieren. Dies passiert insbesondere dann, wenn mit einer nicht-optimalen Packung gearbeitet wird, aber auch dann, wenn die anfänglichen Radien r_i nicht genügend klein sind. In Tab. 2 sind die Werte für die r_i aufgelistet, und zwar sowohl die von der Eliminationsprozedur gelieferten als auch diejenigen, die sich im Versuch als noch genügend klein erwiesen haben. Für die zwölf optimalen Packungen von 10 bis 20 Kreisen hat das Verfahren nach höchstens 141 Schnitten (im Fall $n = 13$) terminiert.

Es bleibt also noch zu beweisen, dass die Reduktion der Radien r_i um einen Faktor q die Ausführung von weiteren Schnitten erlaubt, welche aus den vorhergegangenen durch zentrische Verkleinerung um den Faktor q erhalten werden. Abb. 6 veranschaulicht die Situation: P_i und P_j seien zwei der Kreismittelpunkte, A und B zwei beliebige Punkte innerhalb des Gebiets G_i resp. G_j , deren Abstand gerade gleich m_n ist. Werden nun die Gebiete mitsamt den Schnittlinien um einen gemeinsamen Faktor (insbesondere q, q^2 etc.) zentrisch verkleinert, so werden A und B auf zwei Punkte A' resp. B' abgebildet, deren Distanz maximal m_n ist, wie leicht zu beweisen ist:

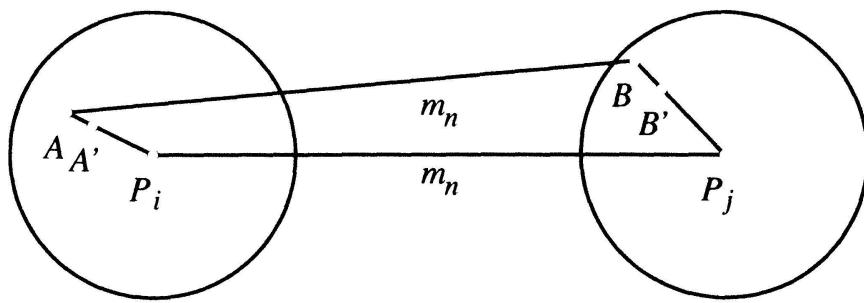


Abb. 6 Reduktion des Fehlerradius

O.B.d.A. seien die Koordinaten von P_i, P_j, A und B : $(0, 0), (1, 0), (x_A, y_A)$ und (x_B, y_B) . Die Distanz zwischen A und B muss 1 sein, es ist also:

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 1.$$

Die Koordinaten von A' und B' sind: (tx_A, ty_A) und $(1 + t(1 - x_B), ty_B)$ für ein $0 < t < 1$. Das Abstandsquadrat der beiden Punkte ist somit:

$$(1 + t x_B - t - t x_A)^2 + (t y_B - t y_A)^2.$$

Daraus wird unter Verwendung der vorausgehenden Gleichung:

$$(1-t)^2 + 2t(1-t)(x_B - x_A) + t^2.$$

Ersetzen von $x_B - x_A$ durch die nicht-kleinere Zahl 1 ergibt schliesslich:

$$(1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = 1, \quad q.e.d.$$

6 Die optimalen Packungen für 1 bis 20 Kreise

Für 17 Kreise gibt es genau zwei optimale Packungen, für alle anderen $n \leq 20$ genau eine. Abb. 7 zeigt alle diese Packungen. Gar keine Symmetriearchse haben nur vier Packungen, nämlich jene für 10, 13 und 19 Kreise, sowie eine der beiden für 17 Kreise. Letztere wird achsensymmetrisch, wenn man drei Kreise entfernt. Diejenige für 19 Kreise ist nahezu achsensymmetrisch, sie wird punktsymmetrisch, wenn man die sechs oberen Kreise entfernt. Jene für 13 Kreise ist nahezu achsensymmetrisch.

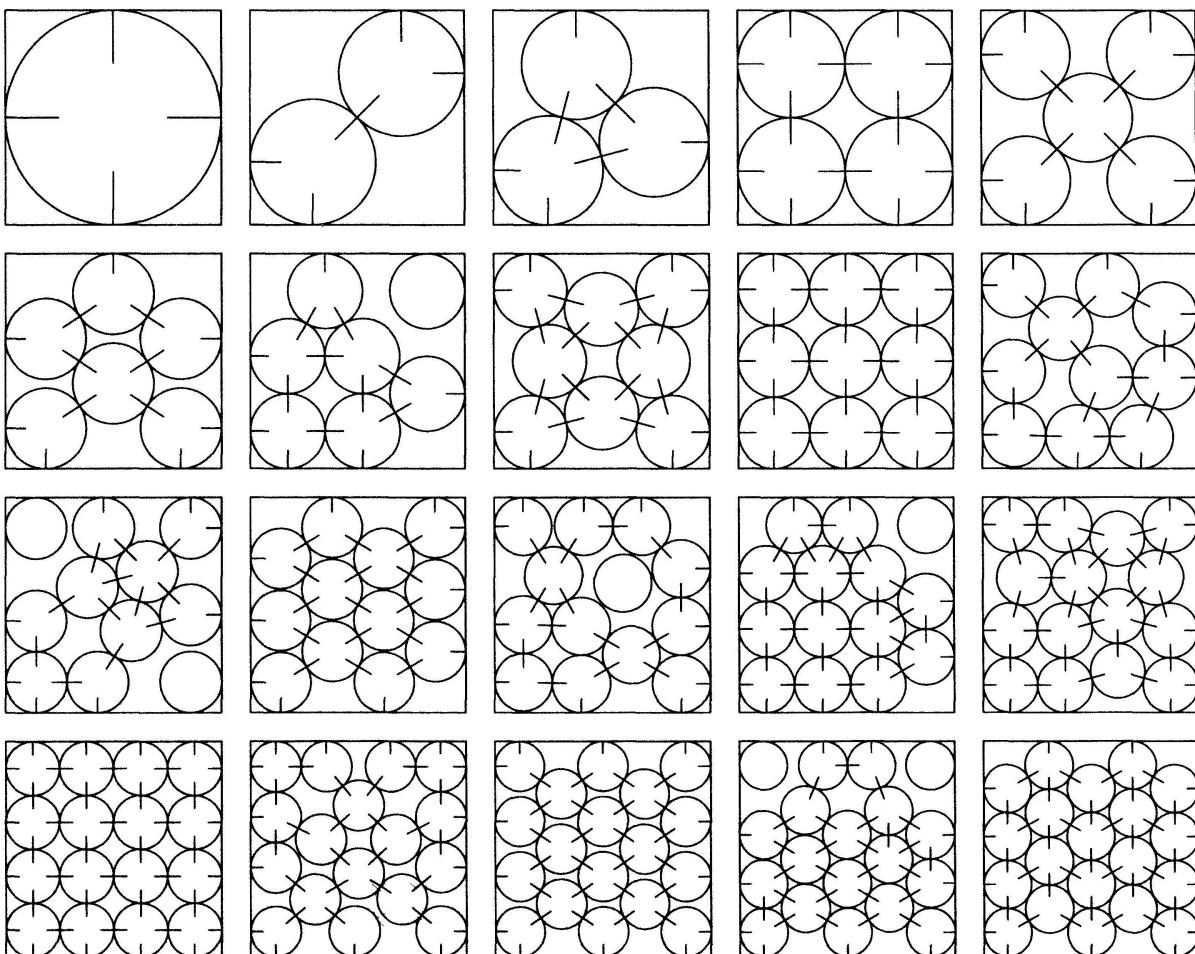


Abb. 7 Optimale Packungen für $1, \dots, 20$ Kreise

Erwähnenswert ist noch der Fall der *Quadratzahlen*, wo für $n \leq 36$ und vermutlich auch für $n = 49$ das Quadratgitter optimal ist, während für $n \geq 64$ eine auf regulären Dreiecken basierende Packung in jedem Fall dichter ist.

Schliesslich interessieren natürlich die Kreisdurchmesser m_n selber. Diese sind, zusammen mit den Mittelpunktskoordinaten, durch algebraische Gleichungssysteme gegeben. Die m_n sind daher *algebraische Zahlen*. Ausdrücke mit Quadratwurzeln sind folgende bekannt: $m_2 = \sqrt{2}$, $m_3 = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, $m_4 = 1$, $m_5 = \sqrt{2}/2$, $m_6 = \sqrt{13}/6$, $m_7 = 4 - 2\sqrt{3}$, $m_8 = m_3/2$, $m_9 = 1/2$, $m_{12} = \sqrt{34}/15$, $m_{14} = (8 - 2\sqrt{3})/13$, $m_{15} = 2/(2 + \sqrt{6} + \sqrt{2})$, $m_{16} = 1/3$, $m_{18} = m_6/2$, $m_{20} = (6 - \sqrt{2})/16$.

Für die übrigen m_n konnten mit Hilfe von MAPLE, einer Software für symbolisches Rechnen, die *Minimalpolynome* gefunden werden:

$$\begin{aligned} & 1180129 m_{10}^{18} - 11436428 m_{10}^{17} + 98015844 m_{10}^{16} - 462103584 m_{10}^{15} + 1145811528 m_{10}^{14} - \\ & 1398966480 m_{10}^{13} + 227573920 m_{10}^{12} + 1526909568 m_{10}^{11} - 1038261808 m_{10}^{10} - \\ & 2960321792 m_{10}^9 + 7803109440 m_{10}^8 - 9722063488 m_{10}^7 + 7918461504 m_{10}^6 - \\ & 4564076288 m_{10}^5 + 1899131648 m_{10}^4 - 563649536 m_{10}^3 + 114038784 m_{10}^2 - \\ & 14172160 m_{10} + 819200 \end{aligned}$$

$$m_{11}^8 + 8 m_{11}^7 - 22 m_{11}^6 + 20 m_{11}^5 + 18 m_{11}^4 - 24 m_{11}^3 - 24 m_{11}^2 + 32 m_{11} - 8$$

$$\begin{aligned} & 5322808420171924937409 m_{13}^{40} + 586773959338049886173232 m_{13}^{39} + \dots - \\ & 174103532094609162240 m_{13} + 4756927106410086400 \end{aligned}$$

$$m_{17}^8 - 4 m_{17}^7 + 6 m_{17}^6 - 14 m_{17}^5 + 22 m_{17}^4 - 20 m_{17}^3 + 36 m_{17}^2 - 26 m_{17} + 5$$

$$\begin{aligned} & 242 m_{19}^{10} - 1430 m_{19}^9 - 8109 m_{19}^8 + 58704 m_{19}^7 - 78452 m_{19}^6 - 2918 m_{19}^5 + 43315 m_{19}^4 + \\ & 39812 m_{19}^3 - 53516 m_{19}^2 + 20592 m_{19} - 2704 \end{aligned}$$

Die auf zehn Dezimalstellen gerundeten Werte sind:

$m_{10} \approx .4212795440$, $m_{11} \approx .3982073102$, $m_{13} \approx .3660960077$,
 $m_{17} \approx .3061539853$, $m_{19} \approx .2895419920$.

Literatur

- [1] H.T. Croft, K.J. Falconer und R.K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry*, Springer, New York, 1991.
- [2] C. de Groot, M. Monagan, R. Peikert und D. Würtz, Packing Circles in a Square: A Review and New Results, *Proc. 15th IFIP Conf. System Modelling and Optimization, Lecture Notes in Control and Information Sciences* 180, pp. 45–54, 1992.
- [3] C. de Groot, R. Peikert und D. Würtz, The optimal packing of ten equal circles in a square, *IPS Research Report, ETH Zürich* No. 90–12, August 1990.
- [4] M. Goldberg, The packing of equal circles in a square, *Math. Magazine* 43, pp. 24–30, 1970.
- [5] K. Kirchner und G. Wengerdt, Die dichteste Packung von 36 Kreisen in einem Quadrat, *Beiträge Algebra Geom.* 25, pp. 147–159, 1987.
- [6] D.A. Kotwitz, The Densest Packing of Equal Circles on a Sphere, *Acta Cryst. A* 47, pp. 158–165, 1991.

-
- [7] H. Melissen, Densest Packing of Six Equal Circles in a Square, *El. Math.* 49, pp. 27–31, 1994.
 - [8] M. Mollard und C. Payan, Some progress in the packing of equal circles in a square, *Discrete Math.* 84, pp. 303–307, 1990.
 - [9] J. Schaer, The densest packing of nine circles in a square, *Canad. Math. Bull.* 8, pp. 273–277, 1965.
 - [10] J. Schaer und A. Meir, On a geometric extremum problem, *Canad. Math. Bull.* 8, pp. 21–27, 1965.
 - [11] K. Schlüter, Kreispackung in Quadraten, *El. Math.* 34, pp. 12–14, 1979.
 - [12] G. Wengerdt, Die dichteste Packung von 16 Kreisen in einem Quadrat, *Beiträge Algebra Geom.* 16, pp. 173–190, 1983.
 - [13] G. Wengerdt, Die dichteste Packung von 25 Kreisen in einem Quadrat, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.* 30, pp. 3–15, 1987.
 - [14] G. Wengerdt, Die dichteste Packung von 14 Kreisen in einem Quadrat, *Beiträge Algebra Geom.* 25, pp. 25–46, 1987.

Ronald Peikert
Interdisziplinäres Projektzentrum
für Supercomputing IPS
ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich