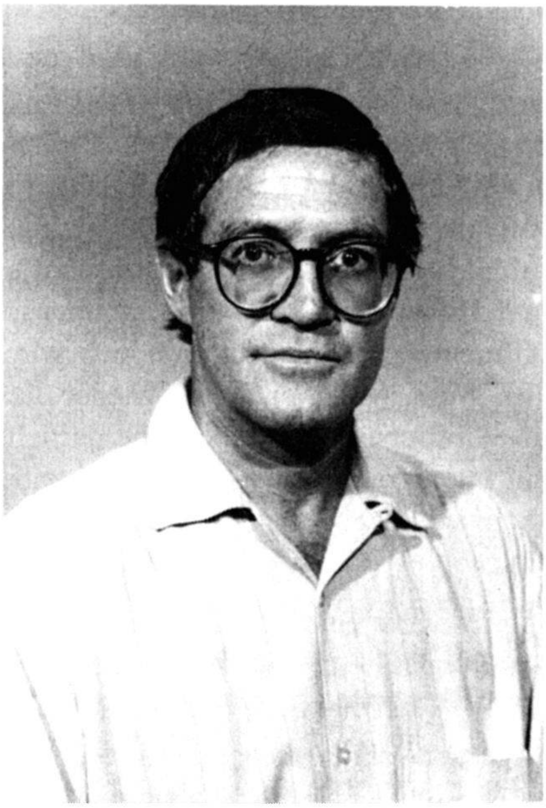
**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 48 (1993)

**Artikel:** In memoriam Peter Hess, 1941-1992
**Autor:** Amann, Herbert
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-44632

El. Math. 48 (1993) 0013-6018/93/040133-10$1.50 + 0.20/0


# In memoriam Peter Hess, 1941–1992



Im Herbst des Jahres 1992 verbrachte Peter Hess einen Teil eines Forschungssemesters an der Brigham Young University in Utah, wo er im Rahmen eines 'special year' mit Fachkollegen aus den USA und Australien wissenschaftlich zusammenarbeitete. Während eines Wochenendausflugs in das südliche Utah rutschte er im Canyonlands National Park auf einem verschneiten Wegstück aus und stürzte über einen Felshang zu Tode. So wurde er im Alter von 51 Jahren jäh aus einem aktiven und erfüllten Leben gerissen, im Zenith seiner wissenschaftlichen Laufbahn, voller Pläne und Ideen für seine nähere persönliche und mathematische Zukunft.

Peter Hess wurde am 1. September 1941 in Zürich geboren, wo er auch seine Kinder- und Jugendjahre verbrachte. Im Jahre 1960 legte er an der kantonalen Oberrealschule die Maturitätsprüfung ab und entschied sich für das Studium der Mathematik, das er im gleichen Jahr an der ETH Zürich aufnahm. Dieser Entschluss ist ihm nicht ganz leicht gefallen, da seine Liebe, neben der Mathematik, der Musik gehörte und er sich längere Zeit mit dem Gedanken trug, sich hauptberuflich dem Cello zu widmen. Nach dem ersten Semester seines Mathematikstudiums war ihm jedoch klar, dass er die richtige Wahl getroffen hatte. Dies bestätigte sich im Früjahr 1965, als er mit einer unter der Leitung von Heinz Hopf angefertigten Arbeit das Diplom erwarb und ihm für seine Noten eine Auszeichnung verliehen wurde.

Der Liebe zur Musik blieb er Zeit seines Lebens treu. Während seines Studiums nahm er Cellounterricht am Konservatorium und erreichte auf diesem Instrument ein hohes technisches und künstlerisches Niveau. Für viele seiner Freunde und Kollegen sind die schönen Hauskonzerte, zu denen er und seine Frau Annalea, eine hervorragende und begeisterte Amateurviolonistin, in späteren Jahren regelmässig einluden, unvergesslich schöne Erlebnisse.

Da Hopf zu jener Zeit kurz vor seinem Rücktritt stand und keine Schüler mehr zur Promotion führte, wandte sich Peter Hess nach dem Diplom von der Geometrie der Analysis zu. Als Assistent am Lehrstuhl für höhere Mathematik an der ETH beschäftigte er sich mit Fragen der Lösbarkeit nicht-selbstadjungierter linearer elliptischer Differentialgleichungen und mit Abbildungs- und Spektraleigenschaften unbeschränkter linearer Operatoren in Banach- und Hilberträumen. Das Zusammenspiel zwischen Funktionalanalysis und partiellen Differentialgleichungen zieht sich wie ein Leitmotiv durch sein gesamtes wissenschaftliches Werk, wobei er immer wieder die mit abstrakten Methoden gewonnenen Resultate auf elliptische und parabolische partielle Differentialgleichungen anwandte. Hierbei galt sein Interesse in erster Linie nicht-selbstadjungierten Problemen. Während anfänglich das Schwergewicht seiner Publikationen im Bereich der abstrakten Funktionalanalysis lag, verschob es sich in späteren Jahren mehr und mehr in das Gebiet der elliptischen und parabolischen Randwertprobleme.

Ein klassisches Problem der Theorie der partiellen Differentialgleichungen stellt die Frage nach der Existenz von Funktionen $u$ dar, welche den Gleichungen

$$\mathscr{A}u = f \text{ in } \Omega\,, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \tag{1}$$

genügen. Hierbei sind $\Omega$ ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ und $\mathscr{A}$ ein Differentialoperator der Form

$$\mathscr{A}u := -\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j(a_{jk}\partial_k u) + \sum_{j=1}^{n} a_j\partial_j u + a_0 u\,, \tag{2}$$

wobei $a_{jk}$, $a_j$, $a_0$ und $f$ gegebene (glatte) Funktionen auf $\bar{\Omega}$ sind. Ausserdem sei $\mathscr{A}$ "elliptisch", d.h. die Matrix $[a_{jk}]$ sei symmetrisch und positiv definit (gleichmässig in $x \in \bar{\Omega}$ ). Es ist bekannt, dass das "Randwertproblem" (1) bei gegebenem stetigem $f$ im allgemeinen keine "klassische", d.h. zweimal stetig differenzierbare Lösung $u$ besitzt. Es ist aber auch bekannt, dass man aus (1) ein "wohlgestelltes" Randwertproblem erhält, wenn man den Lösungsbegriff dahingehend abschwächt, dass man von $u$ nur verlangt, dass es in einem geeignet verallgemeinerten Sinn — im Sinn der Distributionen —

differenzierbar sei. Eine genauere Analyse führt dazu, dem Differentialoperator $\mathcal{A}$ eine Bilinearform, nämlich die 'Dirichletform'

$$a(u,v) := \int_{\Omega} \left( \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \partial_j u \partial_k v + \sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j u v + a_0 u v \right) dx \,, \tag{3}$$

zuzuordnen. Setzt man zur Abkürzung noch

$$(f,v) := \int_{\Omega} f v \, dx \,,$$

so wird man durch Überlegungen, die ihre Wurzeln in der klassichen Variationsrechnung haben, dazu geführt, dem Randwertproblem (1) die folgende Aufgabe zuzuordnen:

Man bestimme $u$ in $H_1$ so, dass gilt:

$$a(u,v) = (f,v) \quad \text{für alle } v \in H_1 \,. \tag{4}$$

Hierbei ist $H_1$ ein geeigneter Hilbertraum von Funktionen auf $\Omega$, die so beschaffen sind, dass $a$ auf $H_1$ eine wohldefinierte stetige Bilinearform darstellt, d.h. ein geeigneter Sobolevraum von Distributionen über $\Omega$. Ausserdem sollen die Elemente $v$ von $H_1$ auf $\partial\Omega$ verschwinden.

Ist der Differentialoperator $\mathcal{A}$ "selbstadjungiert", d.h. gilt $a_1 = \cdots = a_n = 0$, so stellt (4) die Eulersche Gleichung eines Variationsproblems dar. In diesem Fall kann die Existenz einer Lösung von (4) — und damit einer "schwachen", d.h. verallgemeinerten Lösung von (1) — relativ einfach durch Minimieren eines Integrals bewiesen werden. Ist $\mathcal{A}$ nicht selbstadjungiert, versagt dieser Zugang. Unter geeigneten Wachstumsvoraussetzungen an die Bilinearform $a$, unter "Koerzitivitätsvoraussetzungen", gelingt es jedoch auch in dieser Situation, die Lösbarkeit der Gleichung (4), und damit einer schwachen Lösung von (1), zu zeigen. In diesem Fall führen einfache Hilbertraummethoden, nämlich das Lemma von Lax und Milgram, zum Ziel.

Die Bilinearform (3) ist naturgemäss in einem Sobolevraum von quadratisch integrierbaren Funktionen definiert, deren erste (distributionelle) Ableitungen ebenfalls quadratisch integrierbar sind. Dieser Raum $H_1$ ist ein Unterraum des Hilbertraums $H$, der aus allen quadratintegrierbaren Funktionen auf $\Omega$ besteht. Diese Beobachtung führt in natürlicher Weise dazu, der auf $H_1$ stetigen Bilinearform $a$ einen unbeschränkten linearen Operator $A$ in $H$ so zuzuordnen, dass das Problem (4) zu der abstrakten linearen Gleichung

$$Au = f \tag{5}$$

in $H$ äquivalent ist. Auf diese Weise erhält man eine neue abstrakte Formulierung des ursprünglichen Randwertproblems, welche den gut ausgebauten Methoden der Theorie der unbeschränkten linearen Operatoren in Hilbert- und Banachräumen zugänglich ist.

Die obigen Betrachtungen illustrieren die engen Zusammenhänge zwischen der Theorie der linearen elliptischen Randwertprobleme, der Theorie der beschränkten Bilinearformen und der Theorie der unbeschränkten linearen Operatoren in Hilberträumen. Mit diesen Zusammenhängen beschäftigte sich Peter Hess während seiner Assistentenzeit an der ETH, angeregt durch einen Kolloquiumsvortrag des finnischen Mathematikers I.S. Louhivaara. Neben abstrakten Resultaten zur Theorie linearer Operatoren, welche bezüglich einer indefiniten Bilinearform selbstadjungiert sind, und neben Störungssätzen für unbeschränkte lineare Operatoren in Banachräumen untersuchte er Abbildungseigenschaften linearer Operatoren, die, ähnlich wie $A$ in (5), durch elliptische Randwertprobleme beliebiger Ordnung induziert werden. Er promovierte im Frühjahr 1968 mit einer Arbeit über das verallgemeinerte Dirichletproblem ([3] seines Schriftenverzeichnisses), die mit der silbernen Medaille ausgezeichnet wurde. Im Gegensatz zur oben skizzierten "klassischen" Theorie der schwachen Lösungen betrachtete er in seiner Dissertation lineare elliptische Randwertprobleme beliebiger gerader Ordnung mit Koeffizienten, die nur lokal quadratisch integrierbar sind. In diesem Fall ist die $A$ entsprechende Bilinearform nicht mehr stetig und der Satz von Lax-Milgram nicht mehr anwendbar. Dennoch konnte er — durch Studium der (5) entsprechenden Operatorgleichung — die Gültigkeit der Fredholmschen Alternative für derartige Randwertprobleme nachweisen.

In den frühen sechziger Jahren nahm ein neues Teilgebiet der Analysis, die nichtlineare Funktionalanalysis, einen mächtigen Aufschwung. In jener Zeit entstand die Theorie der monotonen Operatoren, die von G. Minty begründet und insbesondere von F. Browder ausgebaut und popularisiert wurde. Bei der Theorie der monotonen Operatoren handelt es sich um eine Verallgemeinerung der Theorie der Eulerschen Gleichungen konvexer nichtquadratischer Funktionale, die aber, ähnlich wie die oben skizzierte schwache Theorie der nicht-selbstadjungierten elliptischen Randwertprobleme, ohne Funktionale auskommt. In dieser Theorie werden die lineare Gleichung (5) durch das nichtlineare Problem

$$A(u) = f\,, \tag{6}$$

der Hilbertraum $H$ durch einen reflexiven Banachraum $E$ und die Bilinearform $a$ im wesentlichen durch die nichtlineare Form

$$\langle A(u), v\rangle\,, \qquad u, v \in E\,,$$

ersetzt, wobei $\langle w, v\rangle$ den Wert der stetigen Linearform $w \in E'$ an der Stelle $v \in E$ bedeutet. Eine Abbildung

$$A : E \to E'$$

heisst dann "monoton", wenn gilt

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq 0\,, \qquad u, v \in E\,,$$

da diese Ungleichung im eindimensionalen Fall besagt, dass die Funktion $A$ monoton wachsend ist.

Ein fundamentaler, aus dem Jahr 1963 stammender Satz von Minty und Browder sagt, dass die nichtlineare Gleichung (6) für jedes $f \in E$ lösbar ist, falls $A$ ein stetiger monotoner Operator ist, der einer geeigneten Koerzitivitätsbedingung genügt. Dieses Theorem besitzt zahlreiche Anwendungen auf quasilineare elliptische und parabolische

Randwertprobleme und auf nichtlineare Integralgleichungen. Da $A$ nicht Ableitung eines Funktionals sein muss, können damit insbesondere auch nicht-selbstadjungierte Probleme behandelt werden, welche nicht Eulersche Gleichungen von Variationsproblemen sind.

Da die Theorie der monotonen Operatoren in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung der Theorie der nichtsymmetrischen Bilinearformen darstellt, ist es nicht verwunderlich, dass Peter Hess nach seiner Promotion von diesem neuen Gebiet angezogen wurde. Im Herbst 1969 ging er — zuerst als Instructor for Mathematics, später als Nationalfondsstipendiat — für zwei Jahre zu F. Browder an die University of Chicago. Das Nationalfondsstipendium erlaubte ihm nach dieser Zeit den Wechsel an die University of California in Berkeley zu T. Kato, einem weiteren Exponenten der Theorie der monotonen Operatoren in jenen Jahren.

Während seiner Aufenthalte in Chicago und Berkeley beschäftigte er sich intensiv mit der Theorie der monotonen Operatoren. Konkrete Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen zeigten bald, dass der Satz von Minty und Browder für viele Anwendungen nicht ausreichte, unter anderem, weil er restriktive Wachstumsbeschränkungen an die Nichtlinearitäten implizierte. Dies führte zu zahlreichen Verallgemeinerungen der abstrakten Theorie und zu Untersuchungen allgemeinerer Klassen von Operatoren. An dieser Entwicklung beteiligte sich Peter Hess mit wichtigen Beiträgen. Insbesondere schuf er eine Theorie von "Operatoren monotonen Typs bezüglich zweier Banachräume" [21], welche ihm erlaubte, nichtlineare elliptische Randwertprobleme mit "starken Nichtlinearitäten" zu behandeln.

Zum Wintersemester 1972 folgte Peter Hess einem Ruf auf ein Extraordinariat an das Mathematische Institut der Universität Zürich, wo er 1978 zum Ordinarius befördert wurde. An seiner neuen Wirkungsstätte entwickelte er eine fruchtbare Lehr- und Forschungstätigkeit auf dem Gebiet der nichtlinearen Analysis. Als beliebter Lehrer gelang es ihm, die Begeisterung, mit der er selber Mathematik betrieb, an seine Schüler weiterzugeben.

Während der ersten Jahre an der Universität Zürich galt sein wissenschaftliches Interesse in erster Linie der Anwendung der Theorie der monotonen Operatoren auf nichtlineare elliptische Randwertprobleme. Hierbei standen Gleichungen mit starken Nichtlinearitäten und nichtkoerzive Aufgaben im Vordergrund. Später wandte er sich mehr und mehr nichtlinearen elliptischen Eigenwertproblemen zu.

Um die Theorie der monotonen Operatoren auf das (parameterabhängige) nichtlineare Randwertproblem

$$\mathcal{A}u = \lambda f(u) \ \text{in} \ \Omega\,, \qquad u = 0 \ \text{auf} \ \partial\Omega\,, \tag{7}$$

wobei $\lambda$ eine positive reelle Zahl ist, anwenden zu können, muss man im wesentlichen voraussetzen, dass $f$ eine fallende Funktion sei. Dann kann die eindeutige Lösbarkeit von (7) garantiert werden. Erfüllt $f$ diese Voraussetzung nicht, ist $f$ zum Beispiel wachsend, so ist bekannt, dass (7) im allgemeinen mehrere Lösungen besitzt. In diesem Fall versagt die Theorie der monotonen Operatoren.

Weitreichende Aussagen über die Lösungsmenge des Problems (7) können — insbesondere auch im nicht-selbstadjungierten Fall — mit Hilfe des Maxiumprinzips hergeleitet werden. Dieses Prinzip erweist sich als äusserst flexibles und fruchtbares Hilfsmittel zum Studium "nichtmonotoner" nichtlinearer Eigenwertprobleme der Form (7).

Im Laufe seiner Forschungstätigkeit an der Universität Zürich wandte sich Peter Hess mehr und mehr Problemen zu, in welchen topologische und — insbesondere — auf dem Maximumprinzip beruhende ordnungstheoretische Methoden eine wichtige Rolle spielen. Beim Studium der Existenz und Vielzahl positiver Lösungen von (7) kommt der Linearisierung dieses Problems, welches ein lineares Eigenwertproblem der Form

$$\mathcal{A}u = \lambda m u \quad \text{in } \Omega\,, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{8}$$

darstellt, grosse Bedeutung zu. Insbesondere ist es wichtig zu wissen, dass (8) einen positiven Eigenwert mit einer zugehörigen positiven Eigenfunktion besitzt. Ist die Gewichtsfunktion $m$ positiv, folgt dies aus dem Maximumprinzip und einem abstrakten Theorem von Krein und Rutmann. Wechselt $m$ das Vorzeichen, ist der Satz von Krein und Rutmann nicht mehr direkt anwendbar. Zusammen mit T. Kato gelang es Peter Hess in [55] zu zeigen, dass auch im Falle einer indefiniten Gewichtsfunktion $m$ das Problem (8) einen positiven Eigenwert und eine positive Eigenfunktion besitzt. Dieses "Hess-Kato-Theorem" ist fundamental für das Studium positiver Lösungen des nichtlinearen Eigenwertproblems (7), falls $f$ nicht überall positiv ist.

Den Maximumprinzipien und positiven Lösungen von Randwertproblemen gehörten das wissenschaftliche Interesse von Peter Hess in späteren Jahren. Neben elliptischen Randwertproblemen untersuchte er in zunehmendem Mass "periodisch-parabolische Probleme" der Gestalt

$$\partial_t u + \mathcal{A}(t)u = f(t,u) \quad \text{in } \Omega\,, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,, \qquad u(\cdot\,,0) = u(\cdot\,,T)\,, \tag{9}$$

wo $\mathcal{A}(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein elliptischer Operator der Form (2) ist, dessen Koeffizienten, ebenso wie die Nichtlinearität $f$, in der Zeitvariablen $T$-periodisch sind. Einerseits handelt es sich bei (9) um ein nicht-selbstadjungiertes Randwertproblem, welches Maximumprinziptechniken zugänglich ist. Andererseits stellt (9) ein Evolutionsproblem dar und erzeugt ein "diskretes monotones dynamisches System". Aus diesem Grund hat er — teilweise in Zusammenarbeit mit N. Dancer und P. Poláčik — die Theorie der diskreten monotonen dynamischen Systeme vorangetrieben, wobei abschliessende Resultate erzielt wurden. Einen grossen Teil seiner Beiträge zur Theorie der periodisch-parabolischen Probleme — die wohl immer mit seinem Namen verbunden sein wird — hat er in der schönen Monographie [86] zusammenfassend dargestellt.

Durch seine rege Forschungstätigkeit hat Peter Hess weit über die Universität Zürich hinaus gewirkt. Er hatte viele Freunde und Kollegen in aller Welt, zu denen er wissenschaftliche Beziehungen unterhielt. Viele von ihnen sind im Laufe der letzten Jahre für kürzere oder längere Aufenthalte nach Zürich gekommen, was wesentlich zum wissenschaftlichen Leben am Mathematischen Institut der Universität beitrug.

Peter Hess leistete zahlreichen Einladungen zur Teilnahme an wissenschaftlichen Konferenzen und zu längeren und kürzeren Forschungsaufenthalten Folge, bei denen er stets einem grösseren Publikum seine neuesten Resultate vorstellen konnte. Darüber hinaus fand er internationale Anerkennung durch seine Wahl in die Herausgebergremien mehrerer Fachzeitschriften. Insbesondere gehörte er während einiger Jahre dem Redaktionskomitee der Commentarii Mathematici Helvetici an.

Neben seiner wissenschaftlichen Tätigkeit war er stets bereit, die weiteren Aufgaben zu übernehmen, welche die vielfältigen Pflichten eines Hochschullehrers mit sich bringen. Dabei hatte er stets das Interesse der Sache im Auge und war bestrebt, auch in schwierigen Situationen gute Lösungen zu finden. Neben seinem Einsatz im Fachbereich Mathematik hat er auch Aufgaben übernommen, die dem Interesse der Wissenschaft im allgemeinen dienen. So nahm er z.B. im Frühjahr 1991 das Amt des Sekretärs der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft an und wurde damit ihr designierter Präsident.

Mit dem tragischen Tod von Peter Hess haben seine engeren Bekannten einen guten Freund und zuverlässigen Kollegen, die Universität Zürich einen engagierten Lehrer und Forscher und die mathematische Gemeinschaft ein aktives und angesehenes Mitglied verloren.

Herbert Amann,
Mathematisches Institut
Universität Zürich
Rämistrasse 74
CH-8001 Zürich

## Publikationsliste von Peter Hess

1 Zur Theorie linearer Operatoren eines J-Raumes: Operatoren, die von kanonischen Zerlegungen reduziert werden. Math. Z. 106 (1968), 88–96

2 Ueber die wesentliche Maximalität gleichmässig stark elliptischer Operatoren in $L^2(R^n)$. Math. Z. 107 (1968), 67–70

3 Ueber das verallgemeinerte Dirichletproblem für lineare partielle Differentialgleichungen. Ann. Acad. Sci. Fenn. A I, 434 (1969) (28 p.)

4 Zur Störungstheorie linearer Operatoren: Relative Beschränktheit und relative Kompaktheit von Operatoren in Banachräumen. Comment. Math. Helv. 44 (1969), 245–248

5 *R. Beals*: Correction to "Classes of compact operators and eigenvalue distributions for elliptic operators". Addendum by *P. Hess*, Amer. J. Math. 91 (1969), 200–202

6 Zur Störungstheorie linearer Operatoren in Banachräumen. Comment. Math. Helv. 45 (1970), 229–235

7 Über Polynome J-symmetrischer Operatoren in J-Räumen. Math. Z. 114 (1970), 271–277

8 with *T. Kato*: Perturbation of closed operators and their adjoints. Comment. Math. Helv. 45 (1970), 524–529

9 A remark on the cosine of linear operators. Acta Sci. Math. (Szeged) 32 (1971), 267–269

10 A variational approach to a class of nonlinear eigenvalue problems. Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 272–276

11 On nonlinear equations of Hammerstein type in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971), 308–312

12 Nonlinear functional equations and eigenvalue problems in nonseparable Banach spaces. Comment. Math. Helv. 46 (1971), 314–323

13 Nonlinear functional equations in Banach spaces and homotopy arguments. Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 211–215

14 On a method of singular perturbation type for proving the solvability of nonlinear functional equations in Banach spaces. Math. Z. 122 (1971), 355–362

15 On the Fredholm alternative for nonlinear functional equations in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 33 (1972), 55–61

16 A remark on a class of linear monotone operators. Math. Z. 125 (1972), 104–106

17 with *P.M. Fitzpatrick* and *T. Kato*: Local boundedness of monotone type operators. Proc. Japan Acad. 48 (1972), 275–277

18 On nonlinear mappings of monotone type homotopic to odd operators. J. Functional Analysis 11 (1972), 138–167

19 with *F.E. Browder*: Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces. J. Functional Analysis 11 (1972), 251–294

20 Théorème d'existence pour des perturbations d'opérateurs maximaux monotones. C.R. Acad. Sc. Paris 275 (1972), 1171–1173

21 On nonlinear mappings of monotone type with respect to two Banach spaces. J. Math. Pures et Appl. 52 (1973), 13–26

22 Variational inequalities for strongly nonlinear elliptic operators. J. Math. Pures et Appl. 52 (1973), 285–297

23 A strongly nonlinear elliptic boundary value problem. J. Math. Anal. Appl. 43 (1973), 241–249

24 On a unilateral problem associated with elliptic operators. Proc. Amer. Math. Soc. 39 (1973), 94–100

25 On some nonlinear elliptic boundary value problems. Proc. Conference on Functional Analysis and its Applications, Madras (India) 1973. Springer Lecture Notes in Math. 399 (1974), 235–247

26 On semi-coercive nonlinear problems. Indiana Univ. Math. J. 23 (1974), 645–654

27 On a theorem by Landesman and Lazer. Indiana Univ. Math. J. 23 (1974), 827–829

28 A homotype argument for mappings of monotone type in Banach spaces. Math. Ann. 207 (1974), 63–65

29 with *J.-P. Gossez*: Sur certains problèmes aux limites elliptiques fortement non linéaires. C.R. Acad. Sc. Paris 278 (1974), 343–345

30 Nonlinear perturbations of linear elliptic operators. Proc. Conference on Ordinary and Partial Differential Equations, Dundee (England) 1974. Springer Lecture Notes in Math. 415 (1974), 167–172

31 On a class of strongly nonlinear elliptic variational inequalities. Math. Ann. 211 (1974), 289–297

32 On the solvability of nonlinear elliptic boundary value problems. Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), 461–466

33 On strongly nonlinear elliptic problems. Proc. Conference on Functional Analysis, Campinas (Brasil) 1974; M. Dekker Lecture Notes vol. 18 (1976), 91–109

34 with *J. Deuel*: Inéquations variationelles elliptiques non coercives. C.R. Acad. Sc. Paris 279 (1974), 719–722

35 with *J. Deuel*: A criterion for the existence of solutions of nonlinear elliptic boundary value problems. Proc. Royal Soc. Edinburgh 74 (1975), 49–54

36 Perturbations non linéaires d'opérateurs de Schrödinger. C.R. Acad. Sc. Paris 281 (1975), 369–371

37 Problèmes aux limites non linéaires dans des domaines non bornés. C.R. Acad. Sc. Paris 281 (1975), 555–557

38 Nonlinear elliptic problems in unbounded domains. Int. summer school on nonlinear operators, Berlin (GDR) 1975. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der DDR, Abt. Mathematik, IN (1977), 105–110

39 with *C.P. Gupta*: Existence theorems for nonlinear noncoercive operator equations and nonlinear elliptic boundary value problems. J. Differential Equations 22 (1976), 305–313

40 On a second order nonlinear elliptic boundary value problem. in: Nonlinear analysis, ed. Cesari/Kannan/-Weinberger, Academic Press 1978, 99–107

41 with *J. Deuel*: Nonlinear parabolic boundary value problems with upper and lower solutions. Israel J. Math. 29 (1978), 92–104

42 A remark on the preceding paper of Fučik and Krbec. Math. Z. 155 (1977), 139–141

44 Nonlinear perturbations of linear elliptic and parabolic problems at resonance: existence of multiple solutions. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa 5 (1978), 527–537

45 On uniqueness of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems. Math. Z. 154 (1977), 17–18

46 with *B. Ruf*: On a superlinear elliptic boundary value problem. Math. Z. 164 (1978), 9–14

47 with *S. Fučik*: Nonlinear perturbations of linear operators having nullspace with strong unique continuation property. Nonlinear Analysis 3 (1979), 271–277

48 Perturbations non linéaires de problèmes linéaires à la résonance: existence de multiples solutions. Proc. Besançon, Springer Lecture Notes 665 (1978), 108–120

49 Multiple solutions of some asymptotically linear elliptic boundary value problems. Proc. Equadiff IV, Prag, Springer Lecture Notes 703 (1979), 145–151

50 with *A. Ambrosetti*: Pairs of solutions for some nonlinear elliptic equations. Boll. U.M.I. 161 (1979), 588–592

51 with *A. Ambrosetti*: Positive solutions of asymptotically linear elliptic eigenvalue problems. I. Math. Anal. Appl. 73 (1980), 411–422

52 with *H. Amann*: A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems. Proc. Royal Soc. Edinburgh 84 (1979) 145–151

53 On a nonlinear elliptic boundary value problem of the Ambrosetti-Prodi type. Boll. U.M.I 17 (1980), 187–192

54 On nontrivial solutions of a nonlinear elliptic boundary value problem. Conferenze del Sem. Mat., Univ. di Bari, 173 (1980)

55 with *T. Kato*: On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function. Comm. Partial Diff. Equations 5 (1980), 999–1030

56 On bifurcation from infinity for positive solutions of second order elliptic eigenvalue problems. "Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences", Acad. Press 1982, 537–544

57 An anti-maximum principle for linear elliptic equations with an indefinite weight function. J. Differential Equations 41 (1981) 369–374

58 On the eigenvalue problem for weakly coupled elliptic systems. Arch. Rat. Mech. Anal. 81 (1983), 151–159

59 On multiple positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems. Comm. Partial Diff. Equations 6 (1981), 951–961

60 On bifurcation and stability of positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems. Dynamical Systems II, Proceedings of a University of Florida Int. Symposium on Dynamical Systems. Academic Press (1982), 103–119

61 On the principal eigenvalue of a second order linear elliptic problem with an indefinite weight function. Math. Z. 179 (1982), 237–239

62 On positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems. Proc. Conference in l'Aquila (Italy), June 1981, 167–180

63 with *St. Senn*: On positive solutions of a linear elliptic eigenvalue problem with Neumann boundary conditions. Math. Ann. 258 (1982), 459–470

64 On a class of linear elliptic eigenvalue problems with respect to an indefinite weight function. Delft Progress Report, 6 (1981), 244–252

65 with *St. Senn*: Another approach to elliptic eigenvalue problems with respect to indefinite weight functions. Proc. Conference on "Nonlinear Analysis and Optimization", Bologna, May 1982, Springer Lecture Notes 1107, 106–114

66 with *A. Beltramo*: On the principal eigenvalue of a periodic parabolic operator. Comm. Partial Diff. Equations 9. (1984), 919–941

67 On positive solutions of semilinear periodic-parabolic problems. Proc. Conference on "Operator Semigroups and Applications", Graz, June 1983. Lecture Notes in Mathematics, 1076 (1984), 101–114

68 On the relative completeness of the generalized eigenvectors of elliptic eigenvalue problems with indefinite weight functions. Math. Ann. 270 (1985), 467–475

69 On the asymptotic distribution of eigenvalues of some nonselfadjoint problems. Bull. London Math. Soc. 18 (1986), 181–184

70 Spatial homogeneity of stable solutions of some periodic-parabolic problems with Neumann boundary conditions. J. Diff. Equations 68 (1987), 320–331

71 On the spectrum of elliptic operators with respect to indefinite weights. Linear Algebra Appl. 84 (1986), 99–109 (Proc. Conference Athens, 1985)

72 with *E.N. Dancer*: On stable solutions of quasilinear periodic-parabolic problems. Annali di Pisa 14 (1987), 123–141

73 An isoperimetric inequality for the principal eigenvalue of a periodic-parabolic problem. Math. Z. 194 (1987), 121–125

74 with *N.D. Alikakos*: On stabilization of discrete monotone dynamical systems. Israel J. of Mathematics 59 (1987), 185–194

75 On periodic-parabolic boundary value problems. Proc. Equadiff Conference, Xanthi 1987. Ed. Dafermos, Dekker. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 118 (1989), 311–317

76 On stabilization of discrete strongly order-preserving semigroups and dynamical processes. In "Semigroup Theory and Applications", Proc. Conference Trieste, 1987. Ed. Clément et al., Dekker. Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics 116 (1989), 231–240

77 with *N.D. Alikakos* and *H. Matano*: Discrete order preserving semigroups and stability for periodic parabolic differential equations. J. Diff. Equations 82 (1989), 322–341

78 with *H. Weinberger*: Convergence to spatial-temporal clines in the Fisher equation with time-periodic fitnesses. J. Math. Biology, 28 (1990), 83–98

79 with *K.J. Brown*: Stability and uniqueness of positive solutions for a semi-linear elliptic boundary value problem. Differential and Integral Equations 3 (1990), 201–207

80 with *N. Alikakos*: On a singularly perturbed semilinear periodic-parabolic problem. (Unpublished preprint)

81 with *E.N. Dancer*: Behaviour of a semilinear periodic-parabolic problem when a parameter is small. Proc. Conference on Functional Analysis and its Applications, Tokyo, 1989. Springer Lecture Notes 1450 (eds. Fujita/Ikebe/Kuroda), 12–19

82 with *E.N. Dancer*: Stability of fixed points for order-preserving discrete-time dynamical systems. J. Reine Angew. Math. 419 (1991), 125–139

83 with *A.C. Lazer*: On an abstract competition model and applications. Nonlinear Analysis TMA 16 (1991), 917–940

84 with *K.J. Brown*: Positive periodic solutions of predator-prey reaction-diffusion systems. Nonlinear Analysis 16 (1991), 1147–1158

85 On the asymptotic behaviour of solutions of periodic-parabolic problems. Proceedings Voronezh winter school, 1990

86 Periodic-parabolic boundary value problems and positivity. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Vol. 247 Longman Scientific & Technical, 1991

87 with *N. Alikakos*: Ljapunov operators and stabilization in strongly order preserving dynamical systems. Differential and Integral Equations 4 (1991), 15–24

88 Asymptotics in semilinear periodic diffusion equations with Dirichlet or Robin boundary conditions. Arch. Rat. Mech. Anal. 116 (1991), 91–99

89 On the asymptotically periodic Fisher equation. In C. Bandle et al. (eds.): Progress in Partial Differential Equations: Elliptic and Parabolic Problems, Pitman Research Notes, vol. 266, 24–33 (1992).

90 with *P. Poláčik*: Boundedness of prime periods of stable cycles and convergence to fixed points in discrete monotone dynamical systems. Siam J. Math. Anal., to appear.

91 with *E.N. Dancer*: Stable subharmonic solutions in periodic reaction-diffusion equations. Journal Diff. Equations, to appear.

92 with *E.N. Dancer*: The symmetry of positive solutions of periodic-parabolic problems. In A. Lazar and J. McKenna (eds.): Nonlinear Oszillations, to appear.

93 with *P. Poláčik*: Symmetry and convergence properties for nonnegative solutions of nonautonomous reaction-diffusion problems. (Submitted to Proc. Roy. Soc. Edinburgh)