

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 48 (1993)

**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

## Aufgaben

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Februar 1994 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma oder
- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

**Aufgabe 1075:** Man suche alle natürlichen Zahlen  $x$ , so dass 10 die kleinste natürliche Zahl  $n$  ist, für die  $n!$  durch  $x$  teilbar ist.

(Hinweis: Es handelt sich hier um die Umkehrung der sogenannten Smarandache-Funktion  $\eta : \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{N}$ . Es ist  $\eta(m)$  die kleinste natürliche Zahl  $n$ , so dass  $n!$  durch  $m$  teilbar ist.)

Thomas Martin, Phoenix, USA

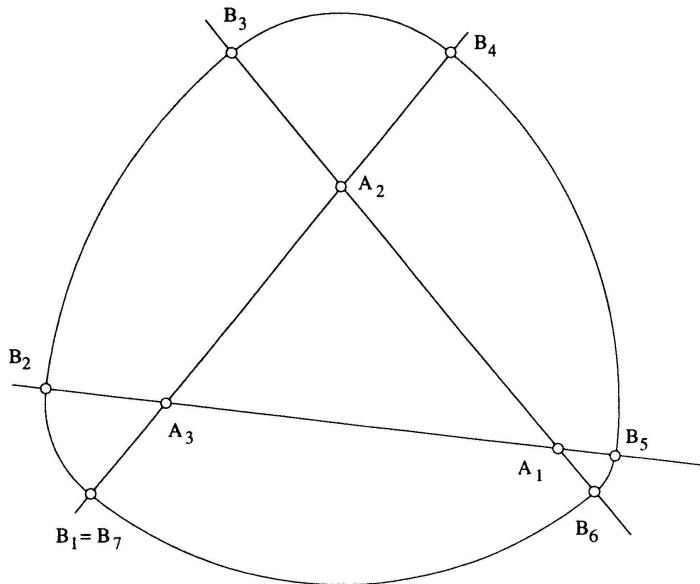
**Aufgabe 1076:** Ein Sprachlehrer möchte für die Semesternote seiner Schüler die Noten der schriftlichen Arbeiten gegenüber den Noten für mündliche Leistungen stärker gewichten. Dazu versieht er die beiden Mittelwerte (um es genau zu machen, ohne jegliche Rundung) beispielsweise mit den Gewichten 3 und 2 und teilt die erhaltene Summe durch 5, ohne zu berücksichtigen aus wie vielen Einzelnnoten die Mittelwerte berechnet worden sind. So erhält er beispielsweise mit einem schriftlichen Mittelwert von  $\bar{x} = 4.00$  und einem mündlichen von  $\bar{y} = 5.00$  den Wert 4.40. Würde man aber berücksichtigen, dass der schriftliche Mittelwert aus 4 Einzelnnoten und der mündliche aus 9 Einzelnnoten berechnet worden ist, ergäbe sich der korrekte Wert 4.60. Bei einem Mittel von  $\bar{x} = 3.00$  aus 9 schriftlichen Arbeiten und einem solchen von  $\bar{y} = 4.00$  bei 4 mündlichen Noten erhält er den Wert 3.40 (anstatt 3.23), was gerade der verkehrten Gewichtung 2 zu 3 bei korrekter Berechnung entspricht.

Unter welchen Umständen genau haben sich bei einer Gewichtung  $u : v$  von  $s \geq 1$  schriftlichen bzw.  $m \geq 1$  mündlichen Einzelnnoten mit den Mittelwerten  $\bar{x}$  bzw.  $\bar{y}$  die Berechnungsunterschiede auf, wann werden sie maximal und wann entspricht die fehlerhafte Berechnung gerade dem korrekt gerechneten Mittel mit vertauschter Gewichtung  $v : u$ ?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Aufgabe 1077 (Die einfache dritte Aufgabe):** Ausgehend von einem Dreieck  $A_1A_2A_3$  (siehe Figur) werden Kreise so gezeichnet, dass das Zentrum des Bogens  $B_kB_{k+1}$  in der Ecke  $A_{k+2 \pmod 3}$  liegt. Die aus den sechs Kreisbogen zusammengesetzte Figur hat in jeder

Richtung denselben Durchmesser, ist also eine sogenannte Orbiforme, von den Schülern "Gleichdick" genannt. Man zeige nun, dass die sechs Übergangspunkte  $B_1, B_2, \dots, B_6$  auf einem Kreis liegen.



Gleichdick und Kreis

Hans Walser, Frauenfeld, CH

## Lösungen

**Aufgabe 1065.** Genau für welche Winkelwerte  $\phi$  sind die folgenden Vektoren (mit  $s := 2 \cdot \sin \phi$ ) linear abhängig?

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ s \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{v}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

Hansjürg Stocker, Wädenswil, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es gingen 21 Lösungen ein: Seung-Jin Bang (Berkeley, USA), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Axel Brühl (March/Hugstetten, D), Peter Buntschuh (Köln, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Dominik Gruntz (Zürich, CH), A.A. Jagers (Enschede, NL), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Kappus (Rodersdorf, CH), Joachim Klose (Bonn, D), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Wolfgang Moldenhauer (Erfurt, D), Andreas Müller (Heidelberg, D), Günter Pickert (Giessen, D), Werner Raffke (Vechta, D), H.-J. Seiffert (Berlin, D), Paul Streckeisen (Zürich, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Klaus-G. Warnecke (Vechta, D), Hansruedi Widmer (Nussbaumen, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Mit einer einzigen Ausnahme wird zunächst in allen Lösungen die Rekursion

$$D_n(s) = sD_{n-1}(s) - D_{n-2}(s)$$

für die Determinante  $D_n(s)$  der Matrix  $A$  der gegebenen Vektoren aufgestellt. In neun Fällen wird anschliessend die Analogie zu den Tschebyscheff-Polynomen zweiter Art zur Lösung ausgenutzt; die übrigen Lösungen untersuchen direkt die Nullstellen der Polynome  $D_n(s)$ . Brühl arbeitet ohne die Rekursion, er verwendet die Eigenwerte der Matrix  $A$ . Eine typische Lösung wird mit dem folgenden Originaltext von Götze vorgestellt.

*Lösung.* Deutet man die  $n$  Vektoren  $\vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$  als Spalten einer  $(n, n)$ -Matrix  $A$ , so ist das Vektorsystem  $\{\vec{v}_k\}_{k=1,2,\dots,n}$  genau dann linear abhängig, wenn gilt:  $\det A = 0$ . Für diese mit  $D_n(s)$  bezeichnete Determinante ergibt sich nach dem Entwicklungssatz

$$D_n(s) - s D_{n-1}(s) + D_{n-2}(s) = 0 . \quad (1)$$

Zusammen mit den Anfangswerten

$$D_0(s) = 1, \quad D_1(s) = s \quad (2)$$

ist  $D_n(s)$  nach dieser Vorschrift eindeutig bestimmt und rekursiv berechenbar. Mit der Folge  $\{D_k(s)\}_{k=0,1,2,\dots}$  verwandt sind die sogenannten Tschebyscheff-Polynome 2. Art. Meist mit  $U_k(x)$  bezeichnet, genügen sie der Rekursion

$$U_k(x) - 2x U_{k-1}(x) + U_{k-2}(x) = 0 \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (3)$$

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x$$

und lauten explizit

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Ein Vergleich von (1), (2) mit (3) zeigt:  $D_n(s) = U_n(s/2)$ , folglich ist mit  $s = 2 \sin \phi$

$$D_n(2 \sin \phi) = \frac{\sin((n+1)(\frac{\pi}{2} - \phi))}{|\cos \phi|} . \quad (4)$$

Nun gilt  $D_n(s) = 0$  genau dann, wenn der Zähler in (4) Null ist und der Nenner nicht verschwindet. Das ist bei Einschränkung auf das Intervall  $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$  für

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \nu}{n+1} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

der Fall, d.h. bezüglich  $s$  für jeden der  $n$  Werte

$$s = 2 \cos \frac{\pi \nu}{n+1} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) . \quad (6)$$

Genau hierfür sind die Vektoren  $\vec{v}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) linear abhängig.

*Bemerkung:* Lineare Abhängigkeit besteht auch, wenn

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi \nu}{n+1} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

ist, sowie bei allen Winkeln  $\phi$ , die sich aus (5) und (7) durch Addition eines ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi$  ergeben. An den  $s$ -Werten (6) ändert diese Bemerkung jedoch nichts.

**Aufgabe 1066.** (Kurzfassung) Man zeige: Für die endliche Summe  $G_m(x) := \sum_{k=1}^N k^m \cdot x^k$  (wir entschuldigen uns für den Druckfehler in der Aufgabenstellung, wo die untere Summationsgrenze 0 statt 1 hieß!) gilt die symbolische Gleichung:

$$G_m(x) = S_m(x) - x^N \cdot [N + S(x)]^{\{m\}},$$

für  $m = 0, 1, 2, \dots$ , wobei der symbolische Exponent  $\{m\}$  beim "Ausmultiplizieren" nach der binomischen Formel folgende Bedeutung hat: In bezug auf  $N$  handelt es sich um einen gewöhnlichen Exponenten, bezogen auf  $S(x)$  ist er als Index aufzufassen. Dabei ist  $S_m(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k^m \cdot x^k$  die zugehörige verallgemeinerte unendliche geometrische Reihe, die für  $m = 0$  zu  $S_0(x) = \frac{x}{1-x}$  aufsummiert wird und für  $m > 0$  mit Hilfe der Euler-Zahlen

$$a_{m;n} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{m+1}{j} \cdot (n-j)^m$$

in der geschlossenen Form

$$S_m(x) = \frac{1}{(1-x)^{m+1}} \sum_{n=1}^m a_{m;n} \cdot x^n$$

geschrieben werden kann.

Renate Golombek, Marburg, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind sieben Lösungen eingetroffen. Fünf Einsender haben den direkten Weg eingeschlagen und die Aufgabe in ähnlicher Weise durch Umordnen der Differenzreihe zwischen  $S_m(x)$  und  $G_m(x)$  gelöst: Peter Bundschuh (Köln, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Walther Janous (Innsbruck, A), O.P. Losers (Eindhoven, NL) und H.-J. Seiffert (Berlin, D). Roland Wyss (Flumenthal, CH) und Hans Kappus (Rodersdorf, CH) haben die Funktionen  $S_m(x)$  und  $G_m(x)$  nach  $x$  abgeleitet und den Zusammenhang  $xS'_m(x) = S_{m+1}(x)$  und  $xG'_m(x) = G_{m+1}(x)$  in einem Induktionsbeweis verwendet. Schliesslich hat uns Louis Comtet (Maurepas, F) einen Kommentar zugestellt, in dem er die endliche Summe  $G_m(x)$  mittels der verallgemeinerten Euler-Zahlen  $a_{m;n;h}$  direkt darstellt:

$$G_m(x) = \frac{1}{(1-x)^{m+1}} \left\{ \sum_{n=1}^m a_{m;n} x^n - x^N \sum_{h=0}^m N^h \sum_{n=1}^{m+1} a_{m;n;h} x^n \right\} \quad .$$

In Verallgemeinerung der oben angegebenen Formel für  $a_{m;n}$  gilt hier

$$a_{m;n;h} = \binom{m}{h} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{m+1}{j} \cdot (n-j)^{m-h} \quad (m \geq h) \quad .$$

Der Vorteil dieser Darstellung liegt im einheitlichen Nenner  $(1-x)^{m+1}$ . Für  $m = 3$  erhält man beispielsweise

$$\begin{aligned} G_3(x) = \frac{1}{(1-x)^4} & \left\{ x + 4x^2 + x^3 - x^N [x + 4x^2 + x^3 \right. \\ & \left. + N(3x - 3x^3) + N^2(3x - 6x^2 + 3x^3) + N^3(x - 3x^2 + 3x^3 - x^4)] \right\} \quad . \end{aligned}$$

Die Formel unserer Aufgabenstellung dagegen verwendet unterschiedliche Nenner:

$$G_3(x) = \frac{x + 4x^2 + x^3}{(1-x)^4} - x^N \left[ N^3 \frac{x}{1-x} + 3N^2 \frac{x}{(1-x)^2} + 3N \frac{x + x^2}{(1-x)^3} + \frac{x + 4x^2 + x^3}{(1-x)^4} \right] .$$

*Lösung.* Wir folgen der Lösung von Friedhelm Götze. Mit den Bezeichnungen der Aufgabenstellung gilt

$$G_m(x) = S_m(x) - \sum_{k=N+1}^{\infty} k^m x^k$$

und weiter nach Ersetzen von  $k$  durch  $k+N$ :

$$\begin{aligned} G_m(x) &= S_m(x) - x^N \sum_{k=1}^{\infty} (k+N)^m x^k \\ &= S_m(x) - x^N \sum_{k=1}^{\infty} x^k \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} k^j N^{m-j} \\ &= S_m(x) - x^N \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} N^{m-j} \sum_{k=1}^{\infty} k^j x^k \\ &= S_m(x) - x^N \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} N^{m-j} S_j(x) . \end{aligned}$$

In Anlehnung an die binomische Formel kann dieser Ausdruck mit einem symbolischen Exponenten  $\{m\}$  folgendermassen umgeschrieben werden

$$G_m(x) = S_m(x) - x^N \cdot [N + S(x)]^{\{m\}},$$

womit alles bewiesen ist.

### Zusammenstellung der Literaturangaben in den eingesandten Lösungen

- [1] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*, Leiden 1974
- [2] F. Götze / H. Friedrich, *Berechnungs- und Abschätzungsformeln für verallgemeinerte geometrische Reihen*, ZAMM 60, 1980, p. 737–738
- [3] M. Jeger, *Einführung in die Kombinatorik*, Band 2, Stuttgart 1979
- [4] Elemente der Mathematik, Vol. 38 Nr. 4 (Basel 1983), p. 102–103