

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 48 (1993)

**Artikel:** Bemerkung zu einer Arbeit von M. Vignati  
**Autor:** Unger, Georg  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-44631>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Bemerkung zu einer Arbeit von M. Vignati

Georg Unger

Georg Unger wurde 1909 in Stuttgart geboren. Nach Studien in Deutschland und in Zürich promovierte er 1941 bei P. Finsler über ein Thema aus der Differentialgeometrie. Nach 10jähriger Lehrtätigkeit an einem Privatschulwesen war er während 25 Jahren Leiter der Mathematisch-Astronomischen Sektion am Goetheanum in Dornach. Georg Unger ist Autor und Herausgeber von mehreren Büchern.

In der Arbeit von M. Vignati [1] ergab sich aus einer Überlegung über harmonische Funktionen das folgende rein geometrische **Resultat** (siehe Figur 1):

*Man betrachte zu einem gegebenen Kreis  $\Gamma$  und einem inneren Punkt  $A$  die Kreise  $k$  durch  $A$ , welche  $\Gamma$  orthogonal schneiden. Dann gehen die zu den Schnittpunkten von  $k$  und  $\Gamma$  gehörigen Sehnen alle durch einen gemeinsamen Punkt  $A''$ .*

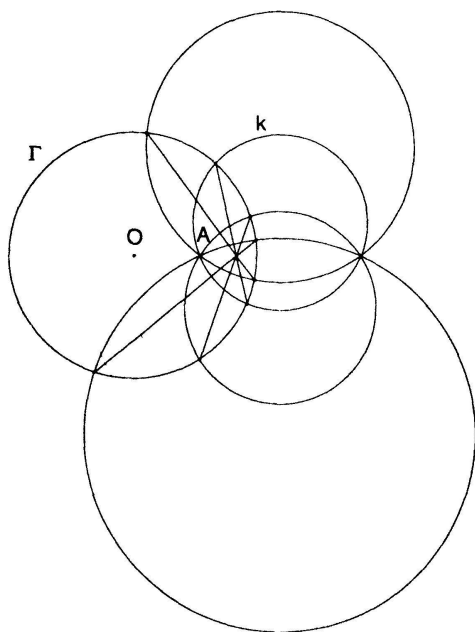


Fig. 1

Die kleine Arbeit von Georg Unger zeigt wieder einmal in aller Deutlichkeit, dass die kraftvollen Sätze der synthetischen Elementargeometrie, die schon wieder in Vergessenheit zu fallen drohen, einen grossen analytischen Rechenaufwand sehr elegant kompensieren können. Die zentrale Aussage, um die es hier geht, lässt sich auf einen Blick in einer Schliessungsfigur erfassen (siehe Figur 1): Das elliptische Kreisbüschel  $k$  wird vom Kreis  $\Gamma$  senkrecht geschnitten und alle von  $\Gamma$  erzeugten Sehnen laufen durch einen festen Punkt. pg

Es wurde in jener Arbeit die Frage nach einem elementargeometrischen Beweis dieses Resultates aufgeworfen. In der vorliegenden Note geben wir einen solchen Beweis und schliessen einige Bemerkungen zu den bekannten Modellen der hyperbolischen Ebene von Poincaré und Klein an.

**Beweis** Man projiziert  $\Gamma$  und  $A$  stereographisch auf die Kugel mit dem Äquator  $\Gamma$  aus dem Pol  $N$  (siehe Figur 2). Das Bild  $k'$  des Orthogonalkreises  $k$  von  $\Gamma$  durch  $A$  schneidet  $\Gamma$  orthogonal. Der Kreis  $k'$  liegt also in einer vertikalen Ebene durch den Bildpunkt  $A'$  von  $A$ . Durchläuft  $k$  alle Orthogonalkreise von  $\Gamma$  durch  $A$ , so erhält man auf diese Weise ein Ebenenbüschel, dessen Schnitt mit der Ebene von  $\Gamma$  das fragliche Strahlenbüschel durch  $A''$  erzeugt.

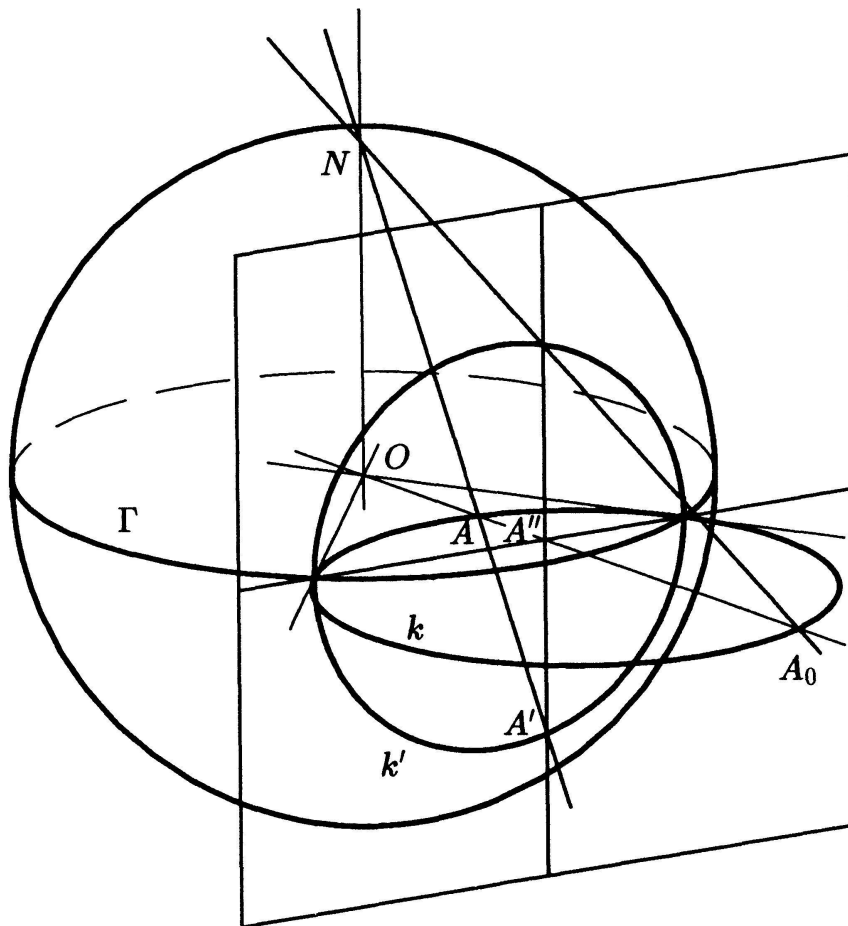


Fig. 2

**Bemerkung 1** Die hier verwendete stereographische Projektion, gefolgt von einer orthogonalen Parallelprojektion zurück auf die Äquatorebene, wird verwendet bei der Umwandlung eines kreisförmigen Modells der hyperbolischen Ebene nach Poincaré, in welchem die in  $\Gamma$  liegenden Bögen von Orthogonalkreisen die nicht-euklidischen Geraden sind, in ein Modell nach Klein mit den offenen Strecken im Innern des Kreises als Bilder der nicht-euklidischen Geraden.

Die Figur bestehend aus  $\Gamma$ ,  $A$  und dem orthogonalen Bild  $A''$  von  $A'$ , stellt also die Superposition eines ebenen Strahlenbüschels der hyperbolischen Geometrie in den Modellen von Poincaré und Klein dar.

**Bemerkung 2** Der planimetrische Beweis kann so geführt werden: Die Sehnen der Orthogonalkreise  $k$  von  $\Gamma$  sind die Polaren von  $O$  bezüglich der Kreise  $k$ . Die Orthogonalkreise bilden ein Kreisbüschel durch  $A$  und seinen bezüglich  $\Gamma$  inversen Punkt  $A_0$ . Der Schnittpunkt einer Polare mit der Geraden  $O, A, A_0$  ist daher der vierte harmonische Punkt zu  $O$  bezüglich  $A, A_0$  und somit fest.

### Literatur

[1] Vignati, M.: A geometric property of functions harmonic in a disk, El. Math. 47 (1992) 33–38.

Georg Unger  
Mathematisch-Physikalisches Institut  
Dorneckstrasse 15  
CH-4143 Dornach