

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 48 (1993)

**Artikel:** Beispiele zur Anwendung eines Computeralgebrasystems in der Geometrie  
**Autor:** Stärk, Roland  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-44629>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

---

## Beispiele zur Anwendung eines Computeralgebrasystems in der Geometrie

---

---

Roland Stärk

Roland Stärk studierte an der ETH Zürich. Nach der Promotion zum Dr. sc. math. im Jahre 1963 wurde er Lehrer an der Kantonsschule Schaffhausen. Er ist Verfasser eines Lehrbuches der Darstellenden Geometrie. Sein mathematisches Lieblingsgebiet ist die Elementargeometrie.

In nächster Zeit werden immer mehr auch algebraische Computerprogramme Einzug in den Schulen halten, Systeme, wie zum Beispiel *Mathematica* oder *Maple*, die nicht nur numerisch rechnen können, sondern auch imstande sind, algebraische Ausdrücke zu bearbeiten. Der alte Vorbehalt gegenüber der analytischen Geometrie, es sei eine

Es gibt wohl kaum ein Tätigkeitsfeld, das sich in den letzten Jahren durch den Einsatz von Computern nicht tiefgreifend verändert hat, und natürlich ist auch die Schule von diesen Umwälzungen betroffen worden. Beim Mathematikunterricht ist heute abzusehen, dass sich die Verfügbarkeit von leistungsstarken und dabei billigen Informatikmitteln in Zukunft noch vermehrt auf Form und Inhalt auswirken werden. In welcher Weise dies geschehen wird, lässt sich allerdings jetzt, mitten in einer stürmischen Entwicklungsphase, noch nicht vorhersagen. Eine der Fragen, die zu klären sein wird, ist der Stellenwert des numerischen Rechnens gegenüber dem symbolischen. Obschon bereits heute auch auf kleinen Rechnern Computeralgebrasysteme verfügbar sind, wurden diese bisher in der Schule noch kaum eingesetzt. Die Zeit sollte genutzt werden, sich mit der neuen Perspektive zu beschäftigen, Grundsatzfragen aufzugreifen und die Gewichtung der Inhalte im Unterricht zu überdenken. Wie soll ein derartiges System eingesetzt werden? Legt die Existenz solcher Systeme nahe, auf gewisse Unterrichtsinhalte zu verzichten, und wenn ja, auf welche? Gibt es auch Unterrichtsgegenstände, auf die grösserer Nachdruck als bisher gelegt werden muss? Welchen Einfluss hat die Benützung derartiger Systeme auf die Lernmotivation? Wie lehrt man die Benutzer, der Computerantwort nicht blindlings zu vertrauen? usw. — Der vorliegende Beitrag von Roland Stärk behandelt einige Beispiele von Anwendungen eines Computeralgebrasystems. Es geht dabei um Probleme der analytischen Geometrie, die grossen Recheneinsatz erfordern und die ohne Hilfe eines solchen Systems kaum zu bewältigen wären. Hier dient der Computer als Hilfsmittel, den bisherigen Erfahrungshorizont in verschiedenen Richtungen zu durchbrechen. *hrs/ust*

ewige Rechnerei, wird schwinden. Berechnungsaufgaben, denen man früher wegen ihres Umfangs oder wegen ihrer Kompliziertheit ausgewichen ist, können heute computerunterstützt häufig geradlinig und mühelos durchgeführt werden. Natürlich macht der Computer nicht alles allein. Der Anwender muss die Computerarbeit sorgfältig planen, überwachen und lenken. Auch stellen sich Fragen nach der Zuverlässigkeit des Systems.

Die Möglichkeiten sind herrlich. Es sollen hier drei Beispiele vorgeführt werden, die von Hand kaum zu bewältigen sind. Sie wurden mit Hilfe von *Mathematica* [5] bearbeitet.

## 1 Eine Formel von Euler für das Tetraedervolumen

Euler hat in den *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum 1752 et 1753* [1] für das Volumen  $V$  eines Tetraeders die folgende Formel veröffentlicht:

$$\begin{aligned}
 144V^2 = & +a^2b^2u^2 + a^2w^2u^2 + a^2v^2u^2 + a^2c^2u^2 + b^2c^2v^2 + b^2u^2v^2 \\
 & + b^2w^2v^2 + b^2a^2v^2 + c^2a^2w^2 + c^2v^2w^2 + c^2u^2w^2 + c^2b^2w^2 \\
 & - a^2b^2c^2 - a^2w^2v^2 - b^2u^2w^2 - c^2v^2u^2 \\
 & - a^2u^4 - u^2a^4 - b^2v^4 - v^2b^4 - c^2w^4 - w^2c^4.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei sind  $a, b, c$  drei eine Seitenfläche begrenzende Kanten und  $u, v, w$  ihre Gegenkanten.

Man erkennt auf der rechten Seite von (1) die Summe der Produkte "Kante im Quadrat mal Kante im Quadrat mal Kante im Quadrat" für alle zwölf nichtgeschlossenen dreistreckigen Kantenzüge des Tetraeders, dann davon subtrahiert die Produkte für die vier begrenzenden Dreiecke und für alle sechs Kanten die Produkte "Kante im Quadrat mal Gegenkante hoch vier".

Vor die Aufgabe gestellt, diese Formel zu verifizieren — es soll hier keine Herleitung gegeben werden —, denkt man wohl in erster Linie an analytische Geometrie und an ein Cartesisches Koordinatensystem. Wenn  $(x_i/y_i/z_i)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) die Koordinaten der Tetraederecken sind, liefert die Formel

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

bekanntlich das Volumen  $V$ , und die Quadrate der Kanten berechnen sich mit

$$(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2.$$

Man braucht lediglich in (1) einzusetzen. Aber das gibt eine langwierige Rechnung. Das Quadrat der Determinante hat rund dreihundert Glieder. Auch wenn man die Symmetrie in den Eckkoordinaten berücksichtigt, ist die Arbeit kaum zu bewältigen. Und eine

Ecke in den Nullpunkt setzen, wie das jeweils noch gemacht wird, bringt auch keine Erleichterung. Das ist Arbeit für den Computer, solche Rechnungen liegen ihm.

Unser kurzes Rechnungsprogramm ist in der Fig. 1 aufgelistet.

```

In[1]:=
  p1={x1,y1,z1};p2={x2,y2,z2};p3={x3,y3,z3};p4={x4,y4,z4};
  d[p_,q_]:=(p[[1]]-q[[1]])^2+
             (p[[2]]-q[[2]])^2+
             (p[[3]]-q[[3]])^2;
  a=d[p2,p3];b=d[p3,p1];c=d[p1,p2];
  u=d[p1,p4];v=d[p2,p4];w=d[p3,p4];
  vol=1/6 Det[{Prepend[p1,1],
               Prepend[p2,1],
               Prepend[p3,1],
               Prepend[p4,1]}];
  Expand[a b u+a w u+a v u+a c u+b c v+b u v+
         b w v+b a v+c a w+c v w+c u w+c b w-
         a b c-a w v-b u w-c v u-
         a u^2-u a^2-b v^2-v b^2-c w^2-w c^2-
         144vol^2]

Out[1]=
  0

```

Fig. 1

Zuerst werden die Eckpunkte  $p_1, p_2, \dots$  als Koordinatentripel eingeführt. Dann wird die Funktion  $d[\dots, \dots]$  für das Quadrat der Distanz zweier Punkte definiert. Mit  $Prepend[p_1, 1]$  kann bei der Koordinatenliste für  $p_1$  eine 1 vorgehängt werden, und  $Det[\dots]$  berechnet die Determinante.  $Expand[\dots]$  schliesslich multipliziert alles aus. Man beachte, dass hier mit  $a = d[p_2, p_3]$  schon das Quadrat der Kante in die Rechnung geht. Nach kurzer Zeit meldet der Computer die Richtigkeit der Formel.

Eine Ergänzung: Die Eulersche Formel kann mit  $V = 0$  auch für planimetrische Zwecke verwendet werden. Sie zeigt dann einen Zusammenhang zwischen den Seitenlängen  $a, b, c$  eines Dreiecks  $ABC$  und den Eckentfernungen  $u, v, w$  irgend eines Punktes  $P$ . Setzt man z.B., mit dem halben Umfang  $s$ ,  $u = s - a + x$ ,  $v = s - b + x$ ,  $w = s - c + x$  ein, so ergibt sich eine, allerdings umfangreiche, quadratische Gleichung für die Radien  $x$  der Soddykreise des Dreiecks, also für die Kreise, welche die Kreise um  $A, B, C$  mit den Radien  $s - a, s - b, s - c$  berühren.

Oder wenn für  $P$  die Mitte der Seite  $BC$  gewählt wird, kann  $\frac{a}{2}$  für  $v$  und  $w$  eingesetzt werden, und für  $u$  ergibt sich  $\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$ , die bekannte Formel für die Länge der Schwerelinie aus  $A$ . Etwas allgemeiner: Wenn  $P$  auf  $BC$  liegt, ist  $w^2 = (a - v)^2$ , und die Auflösung nach  $u^2$  ergibt:

$$u^2 = \frac{av^2 + (-a^2 + b^2 - c^2)v + ac^2}{a}.$$

Es seien nun  $(p_1/p_2/p_3)$  die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes  $P$  bezüglich des Dreiecks  $ABC$ . Gemeint ist, wie man weiss, das homogene Zahlentripel, das zu den orientierten Inhalten der Dreiecke  $PBC$ ,  $PCA$ ,  $PAB$  proportional ist. Der Schnittpunkt  $Q$  der Geraden  $AP$  mit der Seite  $BC$  teilt diese im Verhältnis  $-\frac{p_3}{p_2}$ , und es ist  $\overline{QB} = \left| \frac{p_3 a}{p_2 + p_3} \right|$ . Setzt man oben ein, so erhält man

$$\overline{QA}^2 = \frac{c^2 p_2^2 + (-a^2 + b^2 + c^2) p_2 p_3 + b^2 p_3^2}{(p_2 + p_3)^2},$$

und daraus, wegen  $\overline{PA} = \left| \frac{p_2 + p_3}{p_1 + p_2 + p_3} \right| \overline{QA}$ , die folgende Formel für die Eckentfernungen:

$$\overline{PA}^2 = \frac{1}{(p_1 + p_2 + p_3)^2} \left( c^2 p_2^2 + (-a^2 + b^2 + c^2) p_2 p_3 + b^2 p_3^2 \right). \quad (2)$$

Entsprechendes für  $\overline{PB}$  und  $\overline{PC}$  durch zyklische Vertauschung.

## 2 Über das Produkt der Entfernungen eines Punktes von den Ecken eines Dreiecks

Zwei Punkte  $F$ ,  $G$  heissen isogonalkonjugiert bezüglich eines Dreiecks  $ABC$ , wenn ihre Ecktransversalen symmetrisch liegen bezüglich der Winkelhalbierenden des Dreiecks:  $FA$  symmetrisch zu  $GA$  bezüglich der Winkelhalbierenden durch  $A$  usw. (Eine Einführung in diesen äusserst fruchtbaren Begriff der Dreiecksgeometrie findet sich z.B. in [2]). So sind z.B. der Umkreismittelpunkt  $U$  und der Höhenschnittpunkt  $H$  des Dreiecks zwei isogonalkonjugierte Punkte.

Hier soll zuerst bewiesen werden, dass für isogonalkonjugierte Punkte  $F$ ,  $G$  gilt:

$$|\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC} \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \sin \phi_3| = |\overline{GA} \cdot \overline{GB} \cdot \overline{GC} \cdot \sin \psi_1 \cdot \sin \psi_2 \cdot \sin \psi_3|, \quad (3)$$

wobei  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  die Winkel  $BFC, CFA, AFB$  sind und  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  die entsprechenden Winkel bei  $G$  (Fig. 2).

Für  $U$  und  $H$  überprüft der Leser leicht die Richtigkeit dieser Formel.

Der Inhalt  $J_{FBC}$  des Dreiecks  $FBC$  ist  $\frac{1}{2} \overline{FB} \cdot \overline{FC} \sin \phi_1$ . Aus (3) wird, wenn man alle Winkel ersetzt:

$$\left| \frac{8J_{FBC} J_{FCA} J_{FAB}}{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}} \right| = \left| \frac{8J_{GBC} J_{GCA} J_{GAB}}{\overline{GA} \cdot \overline{GB} \cdot \overline{GC}} \right|. \quad (4)$$

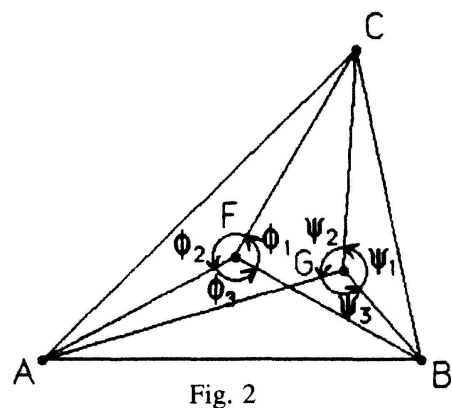


Fig. 2

Man sieht schnell ein, dass ein analytischer Beweis dieser Formel mit Hilfe eines Cartesischen Koordinatensystems kaum in Frage kommt, da es, selbst mit Computerunterstützung, sehr umständlich ist, aus den Cartesischen Koordinaten eines Punktes die

Koordinaten seines isogonalkonjugierten zu berechnen. Baryzentrische Koordinaten sind hier angebracht. Wenn  $(f_1/f_2/f_3)$  und  $(g_1/g_2/g_3)$  die Koordinaten von  $F$  und  $G$  sind, wird die Isogonalkonjugiertheit elegant durch

$$g_1 = \frac{a^2}{f_1}, \quad g_2 = \frac{b^2}{f_2}, \quad g_3 = \frac{c^2}{f_3} \tag{5}$$

erfasst. Dabei sind  $a, b, c$  die Dreiecksseitenlängen. Ferner gilt

$$J_{FBC} = \frac{f_1}{f_1 + f_2 + f_3} J_{ABC}, \tag{6}$$

und für die Eckentfernungen greift man auf die Formel (2) zurück. Wird alles in die quadrierte Gleichung (4) eingesetzt, so muss sich die Identität herausstellen. Von Hand eine äusserst mühsame Sache, für den Computer kein Problem. Wenige Sekunden nach der Eingabe zeigt er die Richtigkeit an.

Es stellt sich noch die Frage, ob es für den Ausdruck  $\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC} \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \sin \phi_3$  und die Formel (3) irgend eine interessante geometrische Erklärung gibt.

Auf der Suche nach Eigenheiten isogonalkonjugierter Punkte erinnern wir uns der Tatsache, dass die beiden Brennpunkte jedes dem Dreieck  $ABC$  eingeschriebenen Kegelschnitts (eines Kegelschnitts, der die Seitengeraden des Dreiecks berührt) isogonalkonjugiert sind. Um es kurz zu machen: (5) hat etwas mit der Scheitelkrümmung des Inkegelschnitts zu tun, von dem  $F$  und  $G$  die Brennpunkte sind. Dies soll gezeigt werden.

Es sei  $k$  der Inkegelschnitt des Dreiecks, der die Brennpunkte  $F$  und  $G$  besitzt. Wir beschränken uns hier auf den Fall, wo  $F$  im Innern des Dreiecks liegt,  $k$  ist dann eine Ellipse. Es seien  $r_1$  die grosse,  $r_2$  die kleine Halbachse von  $k$ . Bekanntlich ist bei einer Ellipse das Quadrat der kleinen Halbachse gleich dem Produkt der Abstände der beiden Brennpunkte von irgend einer Tangente.  $F$  und  $G$  haben die Abstände

$$\frac{f_1}{f_1 + f_2 + f_3} \cdot \frac{2J_{ABC}}{a}, \quad \frac{g_1}{g_1 + g_2 + g_3} \cdot \frac{2J_{ABC}}{a}$$

von der Seite  $BC$ . Für  $r_2$  ergibt sich unter Berücksichtigung von (5):

$$r_2^2 = \frac{4J_{ABC}^2}{(f_1 + f_2 + f_3)(g_1 + g_2 + g_3)} = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{(f_1 + f_2 + f_3)(g_1 + g_2 + g_3)}. \tag{7}$$

Ferner gilt

$$r_1^2 = r_2^2 + \frac{1}{4} \overline{FG}^2, \tag{8}$$

und

$$x = \frac{r_2^2}{r_1} \tag{9}$$

ist der Krümmungsradius in den Ellipsenhauptscheiteln.

Es fehlt noch eine baryzentrische Distanzformel zur Berechnung der Strecke  $FG$ , dann kann unsere Vermutung, dass

$$\frac{8J_{FBC}J_{FCA}J_{FAB}}{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}} = \frac{8f_1f_2f_3J_{ABC}^3}{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}(f_1 + f_2 + f_3)^3} = J_{ABC} \cdot x$$

ist, verifiziert werden.

Um die Distanzformel zu entwickeln, geht man aus von der bekannten vektoriellen Erklärung baryzentrischer Koordinaten: Für die Koordinaten  $(p_1/p_2/p_3)$  eines Punktes  $P$  bezüglich des Dreiecks  $ABC$  gilt:  $p_1\overrightarrow{PA} + p_2\overrightarrow{PB} + p_3\overrightarrow{PC} = 0$ .

Es sei  $Q$  irgend ein Punkt mit der Entfernung  $d$  von  $P$ . Aus

$$\begin{aligned} p_1\overline{QA}^2 + p_2\overline{QB}^2 + p_3\overline{QC}^2 &= p_1(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PA})^2 + \dots \\ &= p_1(d^2 + 2\overrightarrow{QP}\overrightarrow{PA} + \overline{PA}^2) + \dots \\ &= (p_1 + p_2 + p_3)d^2 + 2\overrightarrow{QP}(p_1\overrightarrow{PA} + p_2\overrightarrow{PB} + p_3\overrightarrow{PC}) + p_1\overline{PA}^2 + p_2\overline{PB}^2 + p_3\overline{PC}^2 \\ &= (p_1 + p_2 + p_3)d^2 + p_1\overline{PA}^2 + p_2\overline{PB}^2 + p_3\overline{PC}^2 \end{aligned}$$

ergibt sich

$$d^2 = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} \left( p_1(\overline{QA}^2 - \overline{PA}^2) + p_2(\overline{QB}^2 - \overline{PB}^2) + p_3(\overline{QC}^2 - \overline{PC}^2) \right).$$

Es ist also

$$\overline{FG}^2 = \frac{1}{f_1 + f_2 + f_3} \left( f_1(\overline{GA}^2 - \overline{FA}^2) + f_2(\overline{GB}^2 - \overline{FB}^2) + f_3(\overline{GC}^2 - \overline{FC}^2) \right). \quad (10)$$

Nun setzt man sukzessive (2), (5), (7), (8), (9), (10) in die Gleichung

$$\left( \frac{8f_1f_2f_3J_{ABC}^3}{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}(f_1 + f_2 + f_3)^3} \right)^2 = (J_{ABC} \cdot x)^2$$

ein, bis schliesslich nur  $a, b, c, f_1, f_2, f_3$  in ihr verbleiben. Diese Arbeit überlässt man dem Computer, mit Erfolg: Er stellt die Identität fest.

Erwähnt sei noch, dass die Rechnung sich ganz analog gestaltet, wenn  $k$  keine Ellipse, sondern eine Hyperbel ist. Der Grenzfall der Parabel erfordert eine separate Behandlung, da dann der zweite Brennpunkt ein Fernpunkt ist. Die Rechnungen führen alle zum selben Resultat:

**Satz:** Es sei  $F$  ein Brennpunkt eines Kegelschnitts, der die Seiten eines Dreiecks  $ABC$  mit dem Inhalt  $J$  berührt. Dann ist

$$\left| \frac{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC} \cdot \sin(\sphericalangle BFC) \cdot \sin(\sphericalangle CFA) \cdot \sin(\sphericalangle AFB)}{J} \right|$$

der Radius des Krümmungskreises im zu  $F$  gehörenden Scheitel des Kegelschnitts.

Ein schöner Kegelschnittsatz, wie man ihn nicht alle Tage sieht. Man nehme als Beispiel den Inkegelschnitt mit den Brennpunkten  $U$  und  $H$ . Für seinen (Haupt-)Scheitelkrümmungsradius ergibt sich  $\frac{1}{J}r^3 \sin(2\alpha) \sin(2\beta) \sin(2\gamma) = 4r \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ .

### 3 Der Dreifachwinkelpunkt eines Dreiecks

Wenn im folgenden von Winkeln die Rede ist, dann sind orientierte Winkel modulo  $180^\circ$  gemeint [2]. Der orientierte Winkel von einer Geraden  $f$  zu einer Geraden  $g$ , abgekürzt  $\sphericalangle f g$ , ist der nur modulo  $180^\circ$  bestimmte Drehwinkel, welcher nötig ist, um  $f$  in  $g$  oder in parallele Lage zu  $g$  überzuführen. Dabei wird der Drehwinkel, wie immer, im Gegenuhrzeigersinn positiv, im Uhrzeigersinn negativ gemessen. Mit  $\sphericalangle PQR$  ist der orientierte Winkel von der Geraden  $PQ$  zur Geraden  $QR$  gemeint.

Man kann somit sagen, so eigenartig das auch klingen mag: Bei jedem Dreieck  $ABC$  ist  $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB = 0$ . Der einleuchtende Vorteil dieses Winkelbegriffs ist die Tatsache, dass der geometrische Ort aller Punkte  $P$ , für welche  $\sphericalangle APB$  konstant gleich  $\psi$  ( $\neq 0$ ) ist, bei festen Punkten  $A$  und  $B$ , nicht ein Bogen ist, sondern ein ganzer Kreis, der Fasskreis über  $AB$  für den Winkel  $\psi$ .

Es seien  $\alpha = \sphericalangle BAC$ ,  $\beta = \sphericalangle CBA$ ,  $\gamma = \sphericalangle ACB$  die Winkel eines Dreiecks  $ABC$ . Für den Umkreismittelpunkt  $U$  des Dreiecks gilt:  $\sphericalangle BUC = 2\alpha$ ,  $\sphericalangle CUA = 2\beta$ ,  $\sphericalangle AUB = 2\gamma$ .  $U$  ist der gemeinsame Punkt der Fasskreise über den Seiten für die doppelten Gegenwinkel (Bei rechtwinkligen Dreiecken artet einer der Kreise zu einer Geraden aus).

Nun ist leicht einzusehen, dass auch für ein anderes ganzzahliges Vielfaches der Gegenwinkel die Fasskreise über den Seiten einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Für eine ganze Zahl  $n$  ( $\neq 0, 1$ ) sei  $k_{BC,n}$  der Fasskreis über der Seite  $BC$  für den Winkel  $n\alpha$ , und entsprechend seien  $k_{CA,n}$  und  $k_{AB,n}$  die Fasskreise über  $CA$  und  $AB$  für die Winkel  $n\beta$  und  $n\gamma$ . Ausgeschlossen sollen von jetzt an die speziellen Dreiecke sein, bei denen gerade alle drei Kreise ausarten. Die Kreise  $k_{BC,n}$  und  $k_{CA,n}$ , die den Punkt  $C$  gemeinsam haben, schneiden sich noch in einem weiteren Punkt  $P$ . Für diesen gilt  $\sphericalangle BPA = \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPA = n\alpha + n\beta = -n\gamma$ , da  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  und  $n$  ganz ist (Selbstverständlich alles modulo  $180^\circ$  gerechnet). Somit ist  $\sphericalangle APB = n\gamma$ , d.h. der Kreis  $k_{AB,n}$  geht auch durch den Punkt.

Man nennt den gemeinsamen Punkt der Kreise  $k_{BC,n}$ ,  $k_{CA,n}$ ,  $k_{AB,n}$  den  $n$ -fach-Winkelpunkt  $P_n$  des Dreiecks  $ABC$ .  $P_2$  ist der Umkreismittelpunkt  $U$ .  $P_{-1}$  ist der Höhenschnittpunkt  $H$ .  $P_{-2}$  bekommt man, wenn man die Umkreise der Dreiecke  $BCU$ ,  $CAU$ ,  $ABU$  an den Seiten  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  spiegelt; usw. ( $n = 1$  muss ausgeschlossen werden, da dann die drei Fasskreise mit dem Umkreis von  $ABC$  zusammenfallen, und für  $n = 0$  arten alle drei Kreise aus.)

Hier interessiert nun der Punkt  $P_3$ , der **Dreifachwinkelpunkt** des Dreiecks.

Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist der in [4] bewiesene Satz, dass bei einem Dreieck  $ABC$  der Punkt  $Q$ , für welchen  $\sphericalangle QBA = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACQ$  gilt, auf der Eulergeraden des Dreiecks liegt (Fig. 3). Ebenso die zu den beiden andern Seiten mit den jeweiligen Gegenwinkeln konstruierten Punkte.

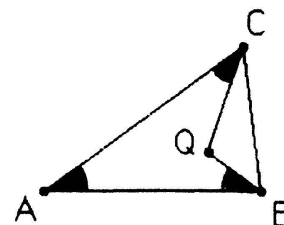


Fig. 3

Dieser leicht konstruierbare Punkt  $Q$  gehört zum Fasskreis  $k_{BC,3}$ , denn es ist  $\sphericalangle BQC = 3\sphericalangle BAC$ . Es stellt sich die Frage, ob der andere Schnittpunkt von  $k_{BC,3}$  mit der Eulergeraden auch seine Besonderheiten hat. Mit Überraschung stellt man fest (Fig. 4), dass die

zweiten Schnittpunkte der Kreise  $k_{BC,3}$ ,  $k_{CA,3}$ ,  $k_{AB,3}$  alle mit der Eulergeraden zusammenfallen, d.h. dass der Dreifachwinkelpunkt auf der Eulergeraden liegt. Das soll hier untersucht und bewiesen werden. Man vergleiche dazu auch [3].

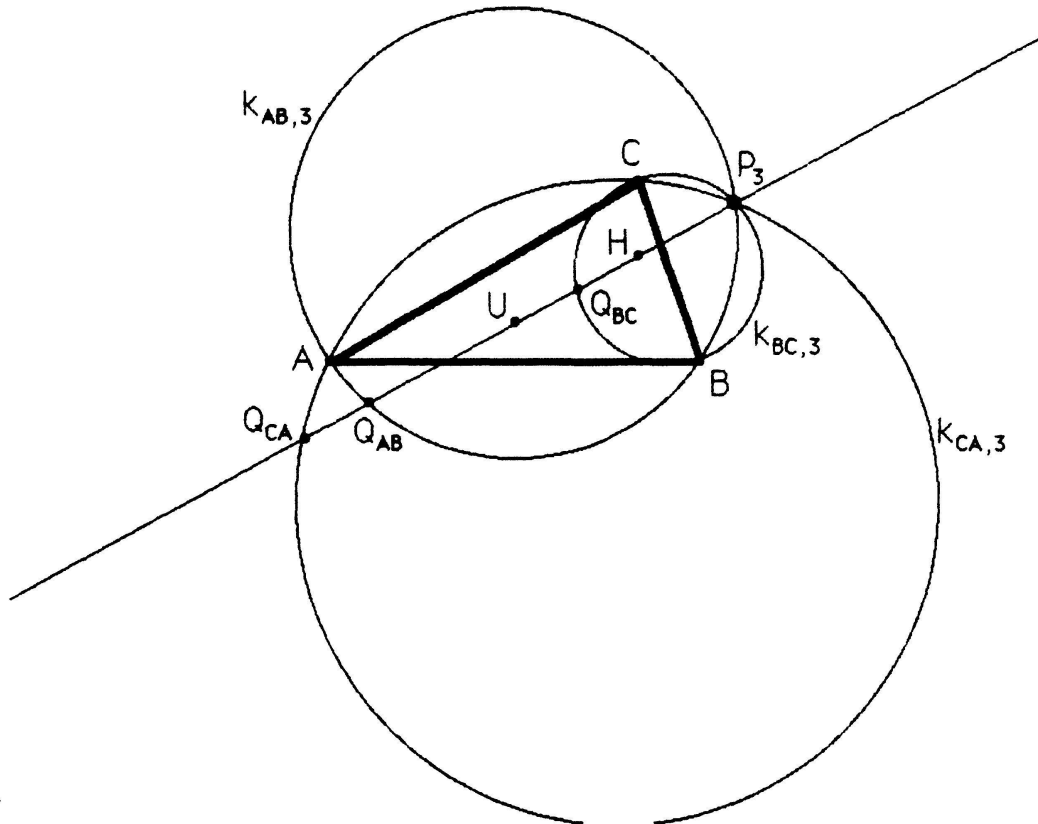


Fig. 4

Für die Rechnung empfehlen sich wieder baryzentrische Koordinaten. Im Dreieck  $ABC$  mit den Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , hat  $U$  bekanntlich die Koordinaten  $(a^2(-a^2 + b^2 + c^2) / \dots / \dots)$ ,  $H$  die Koordinaten  $(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} / \dots / \dots)$  und der Schwerpunkt  $S$  die Koordinaten  $(1/1/1)$ . Für einen Punkt  $P = (p_1/p_2/p_3)$  auf der Geraden  $US$ , der Eulergeraden, kann man den Ansatz

$$\begin{aligned} p_1 &= a^2(-a^2 + b^2 + c^2) + x \\ p_2 &= b^2(-b^2 + c^2 + a^2) + x \\ p_3 &= c^2(-c^2 + a^2 + b^2) + x \end{aligned} \quad (11)$$

machen. Im Dreieck  $ABC$  gilt

$$\tan \alpha = \frac{4J_{ABC}}{-a^2 + b^2 + c^2}, \quad \tan^2 \alpha = \frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{(-a^2 + b^2 + c^2)^2}. \quad (12)$$

Die gleiche Formel auf das Dreieck  $PBC$  angewendet:

$$\tan(\sphericalangle BPC) = \frac{4J_{PBC}}{-a^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2}.$$

Wenn nun  $P$  zum Fasskreis  $k_{BC,3}$  gehören soll, kann  $3\alpha$  für  $\sphericalangle BPC$  eingesetzt werden. Somit wird aus der letzten Formel:

$$\tan \alpha \frac{3 - \tan^2 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} (-a^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2) = 4J_{PBC}. \quad (13)$$

Nach (6) ist  $J_{PBC} = \frac{p_1}{p_1+p_2+p_3} J_{ABC}$ . Setzt man (12) schon teilweise in (13) ein, so kann noch mit  $4J_{ABC}$  gekürzt werden:

$$\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} \cdot \frac{3 - \tan^2 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} (-a^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2) = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + p_3}.$$

Damit ist die Gleichung für den Computer präpariert. Mit (11), (2) und (12) führt er sie über in

$$(b^2c^2 + x)(a^6b^2c^2 - 2a^4b^4c^2 + a^2b^6c^2 - 2a^4b^2c^4 - 2a^2b^4c^4 + a^2b^2c^6 + a^6x - a^4b^2x - a^2b^4x + b^6x - a^4c^2x - b^4c^2x - a^2c^4x - b^2c^4x + c^6x) = 0$$

(*Mathematica* liefert gerade die Faktorzerlegung). Die Lösungen sind

$$x = -b^2c^2 \quad \text{und} \quad x = \frac{16a^2b^2c^2J_{ABC}^2}{a^6 + b^6 + c^6 - a^4b^2 - a^2b^4 - b^4c^2 - b^2c^4 - a^2c^4 - c^2a^4}.$$

Die erste Lösung gehört zum oben erwähnten Punkt  $Q$ . Die zweite ist, wie man sieht, invariant bei zyklischer Vertauschung der Seiten. Der zugehörige Punkt würde sich auch bei zyklisch vertauschter Rechnung ergeben. Es muss der Dreifachwinkelpunkt  $P_3$  sein. Setzt man in (11) ein, so ergeben sich für  $P_3$  die Koordinaten

$$\left( \frac{a^2(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^2c^2)}{-a^2 + b^2 + c^2} / \dots / \dots \right).$$

Aus den Koordinaten von  $U$ ,  $H$  und  $P_3$  lässt sich leicht noch das Teilverhältnis berechnen, in welchem  $P_3$  die Strecke  $UH$  teilt. Ein auf solche Rechnungen abgerichteter Computer meldet sofort:

$$\frac{a^2b^2c^2}{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)} = \frac{1}{8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Und noch eine Überraschung: Es stellt sich heraus, dass die Polare von  $H$  bezüglich des Umkreises, welche die (Geraden-)Koordinaten  $\left( \frac{b^2}{a^2+b^2-c^2} + \frac{c^2}{a^2-b^2+c^2}, \dots, \dots \right)$  hat, durch den Punkt  $P_3$  geht!

**Satz:** *Der Dreifachwinkelpunkt eines (nicht gleichseitigen) Dreiecks, mit dem Umkreismittelpunkt  $U$ , dem Höhenschnittpunkt  $H$  und den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ , ist der Schnittpunkt der Eulergeraden mit der Polaren von  $H$  bezüglich des Umkreises. Er teilt  $UH$  im Verhältnis  $\frac{1}{8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$ .*

Sicher wäre es reizvoll, für diesen einfachen Sachverhalt nachträglich auch eine synthetische Herleitung zu suchen.

Man fragt sich noch, ob auch andere Mehrfachwinkelpunkte des Dreiecks sich so elegant in den Verein der merkwürdigen Punkte einordnen.  $P_{-2}$ , zum Beispiel, liegt auf der Geraden durch den Lemoinepunkt und den Fermatpunkt.  $P_4$  ist mit  $U$  und  $P_{-2}$  kollinear.  $P_n$  und  $P_{1-n}$  sind isogonalkonjugiert ... Dem Liebhaber merkwürdiger Punkte des Dreiecks eröffnen sich interessante Perspektiven.

**Literatur**

- [1] Cantor M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. B.G. Teubner, Leipzig 1898.
- [2] Johnson R. A.: Advanced Euclidean Geometry. Dover Publications Inc., New York 1960.
- [3] Mütz K.: Die Triplex-Punkte und der Dreifachwinkel-Punkt eines Dreiecks. MNU 45/4. Ferd. Dummlers Verlag, Bonn 1992.
- [4] Stärk R.: Ein Satz über Eckentfernungen beim Dreieck. El.Math. Vol. 45/6. Birkhäuser Verlag, Basel 1990.
- [5] Wolfram S.: Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer. Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1988.

Roland Stärk  
Santenbühl  
CH-8234 Stetten