

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 48 (1993)

Artikel: "Paradoxe" Zerlegung Euklidischer Räume
Autor: Deuber, Walter A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-44625>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

“Paradoxe” Zerlegung Euklidischer Räume

Walter A. Deuber

Walter Deuber studierte Mathematik und Physik an der ETH Zürich, wo er 1973 bei Ernst Specker mit einer Dissertation über Ramsey-Theorie promovierte. Es folgten Assistententätigkeit und Habilitation an der Technischen Universität Hannover. Seit 1976 ist er Professor an der Universität Bielefeld. Neben seiner mathematischen Forschung, die sich vor allem mit der Kombinatorik von grossen endlichen oder abzählbaren Strukturen beschäftigt, hat Walter Deuber auch anspruchsvolle Pflichten in der Wissenschaftsorganisation übernommen. So war er zweimal Dekan der Fakultät für Mathematik, ferner Gründungssprecher des Sonder-Forschungsbereiches “Diskrete Strukturen in der Mathematik” und ist Direktor am Zentrum für interdisziplinäre Forschung.

1 Einleitung

Seit der Antike ist das Problem bekannt, mit Zirkel und Lineal zu einem Kreis ein Quadrat gleicher Fläche zu konstruieren. Gegeben sei also der Radius r als Strecke und

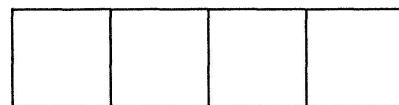
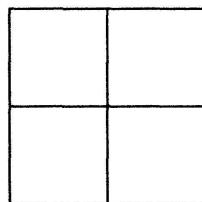
Dass man einer Punktmenge in der Ebene und im Raum einen Inhalt zuordnen kann, galt in der Geschichte der Mathematik lange Zeit als evident. So erachtete man es bezeichnenderweise erst gegen die Mitte des letzten Jahrhunderts als notwendig, den Begriff des bestimmten Integrals genauer zu fassen: A. Cauchy, J.P.G. Dirichlet und natürlich B. Riemann gaben kurz nacheinander formale Definitionen dieses Begriffes, wobei sie in der uns heute geläufigen Weise Grenzwerte von Summen heranzogen. Anschliessende Verfeinerungen des Inhaltsbegriffes (C. Jordan, E. Borel, u.a.) für allgemeinere Punktmengen führten schliesslich zur Lebesgueschen Masstheorie (H. Lebesgue, 1902). Im Laufe der weiteren Entwicklung zeigte sich überraschenderweise auch die Existenz von sogenannten nichtmessbaren Mengen, also von Punktmengen, denen in keiner vernünftigen Weise ein Inhalt zugeordnet werden kann. Solche Mengen besitzen natürlich äusserst seltsame, fast “unglaubliche” Eigenschaften. Ein spektakuläres Beispiel veröffentlichten 1924 St. Banach und A. Tarski: Sie zeigten, dass eine Kugel mit Radius r in endlich viele nichtmessbare Teilmengen zerlegt werden kann, die sich zu zwei Kugeln vom selben Radius r zusammensetzen lassen. Derartige der reinen Anschauung widersprechende — und deshalb auch *paradox* genannte — Zerlegungen haben in der Folge zu weiteren Untersuchungen angeregt. In seinem Übersichtsartikel beschreibt Walter Deuber einige der aus diesen Bemühungen entstandene neuere Resultate. usf.

zu konstruieren ist eine Strecke s mit

$$s^2 = \pi r^2 \quad \text{d.h.} \quad \sqrt{\pi} = \frac{s}{r}.$$

Da die Geradengleichung linear und die Kreisgleichung quadratisch ist, ist diese Aufgabe nur dann lösbar, falls π selbst als ein endlicher algebraischer Ausdruck geschrieben werden kann, in welchem schlimmstenfalls Quadratwurzeln auftreten. Schon im letzten Jahrhundert wurde gezeigt, daß π transzendent ist, also nicht algebraisch dargestellt werden kann. Somit ist die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal nicht durchführbar. Dies heißt, daß — wie auch in ähnlich gelagerten Fällen (Unmöglichkeit der Würfelverdoppelung, Dreiteilung des Winkels) — ein mathematischer Beweis vorliegt, daß dieses Problem mit Zirkel und Lineal im allgemeinen nicht lösbar ist!

Wenn nun der Kreis mit Zirkel und Lineal nicht quadrierbar ist, so könnte es ja vielleicht auf andere Weise geschehen. Um Ideen zu fixieren betrachten wir ein einfaches Problem: Das 4×1 Rechteck R sowie das 2×2 Quadrat Q können zunächst unter Vernachlässigung von Rändern in je vier kongruente Quadrate zerlegt werden.



Definition Sei S eine Gruppe von Isometrien (Kongruenzabbildungen). Zwei Mengen X, Y heißen **S -zerlegungsgleich**, falls disjunkte Zerlegungen von X und Y in gleich viele Teile existieren, mit der Eigenschaft, daß jedes X_i isometrisch ist zu Y_i mittels einer Bijektion $\varphi_i \in S$.

Die Zerlegungsgleichheit ist offenbar eine Äquivalenzrelation. Obiges Beispiel besagt nun — unter Berücksichtigung des Randes —, daß

$$[0, 2] \times [0, 2] \text{ und } [0, 4] \times [0, 1]$$

zerlegungsgleich bezüglich Translationen sind. Auf diesem Hintergrund erhebt sich die Frage, ob Kreis und Quadrat zerlegungsgleich sein können. Erstaunlicherweise konnte Laczkovich dies beweisen:

Satz 1.1 [La 90] Kreis und Quadrat gleichen Flächeninhalts sind zerlegungsgleich bezüglich der Gruppe der Translationen in der Ebene.

Etwas allgemeiner konnte er beweisen :

Satz 1.2 [La 91] Sind $A, B \subset \mathbb{R}^d$ konvexe beschränkte Mengen gleichen Maßes, dann sind A und B zerlegungsgleich bezüglich der Gruppe der Translationen.

Bitte versuchen Sie jetzt nicht, mit Schere und Papier die Zerlegungen nachzuvollziehen. Laczkovich zeigt mit seinem Beweis nur, daß Zerlegungen mit etwa 10^{50} Stücken das Gewünschte leisten. Diese Zerlegung ist also praktisch nicht durchführbar. Sie kann mit der Schere und Papier auch theoretisch nicht erfolgen, denn:

Satz 1.3 Kreis und Quadrat gleichen Flächeninhalts sind nicht zerlegungsgleich bezüglich Zerlegungen in Jordan-Gebiete, d.h. topologische Scheiben.

Zur Zeit ist unbekannt, ob die Zerlegungsgleichheit von Kreis und Quadrat mit meßbaren Stücken realisiert werden kann. Bei einer solch verzwickten Situation erhebt sich sofort die Frage, wie die Quadratur des Kreises denn überhaupt bewiesen werden kann, wenn doch so exotische Stücke betrachtet werden. Die prinzipielle Antwort geht dahin, daß, statt nur endliche Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zuzulassen, viel mächtigere Instrumente, wie z.B. das *Auswahlaxiom* d.h. die Auswahl unendlicher Mengen mit erlaubt sein müssen. Das Auswahlaxiom ist bekanntlicherweise unabhängig von der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre. Es steht also frei, dieses zu verwenden oder auch nicht. In der Mathematik wird das Auswahlaxiom des öfteren verwendet, um recht nützliche Sätze zu beweisen, oder aber um die Existenz von Exoten nachzuweisen. Eine der nützlichen Konsequenzen ist offenbar:

Bemerkung: Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Für endlichdimensionale Vektorräume kommt man ja noch mit dem Steinitzschen Austauschsatz aus. Für unendlichdimensionale Räume jedoch — z.B. die reellen Zahlen als Vektorraum über den rationalen Zahlen mit der Hamel-Basis — braucht man das Auswahlaxiom. Kürzlich wurde gezeigt, daß der Basissatz für Vektorräume und das Auswahlaxiom äquivalent sind [Bl 84].

Verläßt man die Ebene, so erlebt man weitere paradoxe Situationen, nämlich das berühmte Banach-Tarski-Paradoxon [BT 24, Wa 85].

Satz 1.4 Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitskugel. Dann gibt es eine Zerlegung in 2 Teile $B = B_1 \cup B_2$, so daß alle drei Mengen B_1, B_2 und B zerlegungsgleich sind.

Im dreidimensionalen Raum ist es also möglich, die Einheitskugel zu verdoppeln!

2 Das Banach-Tarski-Paradoxon

Zur Einstimmung beweisen wir einige Lemmata.

Lemma 2.1 Sei \mathbb{N} die Menge der positiven natürlichen Zahlen und $a \in \mathbb{N}$. Dann sind \mathbb{N} und $\mathbb{N} \setminus \{a\}$ zerlegungsgleich.

Beweis: Man betrachte die Menge $a\mathbb{N}$ aller Vielfachen von a . Zerlege \mathbb{N} in $N_1 = a\mathbb{N}$ und dessen Komplement $N_2 = \mathbb{N} \setminus a\mathbb{N}$. Dann ist $\mathbb{N} \setminus \{a\} = (N_1 \setminus \{a\}) \cup N_2$. Mittels einer Translation τ um a lässt sich N_1 in $N_1 \setminus \{a\}$ überführen. Wenn dies hier auch offensichtlich ist, so ist doch wesentlich, daß $a \notin \{\tau(a), \tau^2(a), \tau^3(a), \dots\}$.

Lemma 2.1 besagt, daß das Weglassen von einem Element — und damit wegen der Transitivität der Zerlegungsgleichheit von endlich vielen Elementen — von \mathbb{N} eine Menge ergibt, welche immer noch zerlegungsgleich zu \mathbb{N} ist. Wickeln wir nun die natürlichen Zahlen an der Einheitskreislinie S^1 auf, wobei wir ein fest vorgegebenes $a \in \mathbb{N}$ mit einem Punkt $p \in S^1$ identifizieren, so treten wegen der Transzendenz von π keine Doppeldeutigkeiten auf. Translationen τ von \mathbb{N} gehen nun in Drehungen δ der Einheitskreislinie über. Man erhält so:

Korollar 2.2 Sei S^1 die Einheitskreislinie in der Ebene und $p \in S^1$. Dann sind S^1 und $S^1 \setminus \{p\}$ zerlegungsgleich.

Bezüglich der von der Translation um a in Lemma 2.1 herkommenden Drehung δ notieren wir die für später nützliche Aussage

$$(*) \quad p \notin \{\delta(p), \delta^2(p), \delta^3(p), \dots\}.$$

Betrachtet man nun die Einheitskreisscheibe B^2 und schneidet einen Radius ohne Zentrum heraus, so kann man den Beweis von Korollar 2.2 übertragen und erhält:

Korollar 2.3 Sei B^2 der abgeschlossene Einheitskreis in der Ebene, \vec{p} ein Einheitsvektor und $R = \{\lambda \vec{p} \mid \lambda \in (0, 1]\}$ der Radius von B^2 in Richtung \vec{p} ohne das Zentrum. Dann sind B^2 und $B^2 \setminus R$ zerlegungsgleich.

Nun wollen wir aus dem Einheitskreis noch das Zentrum ausstechen:

Lemma 2.4 B^2 und $B^2 \setminus \{\text{Zentrum}\}$ sind zerlegungsgleich.

Beweis: Aus $B^2 \setminus \text{Zentrum}$ schneide man einen Radius heraus und stecke ihn umgekehrt wieder hinein. Damit fehlt nun ein Punkt p auf der Einheitskreislinie. Wie in Korollar 2.2 und 2.3 stellt man fest, daß B^2 und $B^2 \setminus \{p\}$ zerlegungsgleich sind.

Bis jetzt haben wir gezeigt, daß aus dem Einheitskreis ein Radius und das Zentrum herausgenommen werden können, und die Restmenge immer noch zerlegungsgleich zum Einheitskreis ist. Wegen der Transitivität der Zerlegungsgleichheit können wir diese chirurgischen Operationen endlich oft durchführen und z.B. endlich viele Durchmesser aus B^2 herausnehmen, ohne die Zerlegungsgleichheit mit B^2 zu verlieren. Wir brauchen aber etwas mehr, nämlich, daß man sogar "abzählbar oft" weglassen kann, ohne die Zerlegungsgleichheit zu verlieren.

Satz 2.5 Sei S^1 die Einheitskreislinie und $D \subset S^1$ eine beliebige abzählbare Punktmenge. Dann sind S^1 und $S^1 \setminus D$ zerlegungsgleich.

Beweis: Wir betrachten Drehungen δ_φ von S^1 um den Winkel φ . Sei

$$\Phi := \{\varphi \in [0, 2\pi) \mid \exists p \in D \ \exists n \in \mathbb{N} \ \delta_{n\varphi}(p) \in D\}.$$

D und \mathbb{N} sind abzählbar, also auch Φ . Daher gibt es $\alpha \in (0, 2\pi) \setminus \Phi$. Damit haben wir erreicht, daß für alle $p, q \in D$ gilt:

$$(**) \quad q \notin \{\delta_\alpha(p), \delta_{2\alpha}(p), \delta_{3\alpha}(p), \dots\},$$

welches die angekündigte Verallgemeinerung von $(*)$ ist.

Wegen $(**)$ ist $\delta_{n\alpha}(D) \cap D = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$; insbesondere gilt für $m > n$ die Relation $\delta_{(m-n)\alpha}(D) \cap D = \emptyset$, welche zu $\delta_{n\alpha}(D) \cap \delta_{m\alpha}(D) = \emptyset$ für $m \neq n$ führt. Die Mengen $D, \delta_\alpha(D), \delta_{2\alpha}(D), \dots$, sind also alle paarweise disjunkt. Wir zerlegen nun S^1 in $N_1 = \bigcup_{n \geq 1} \delta_{n\alpha}(D)$ und dessen Komplement $N_2 = S^1 \setminus N_1$. Ebenso wird $S^1 \setminus D$ zerlegt in die beiden Mengen $\delta_\alpha(N_1)$ und N_2 . \square

Soweit für die Ebene. Die Verallgemeinerung auf den dreidimensionalen Raum ist offensichtlich. Wir notieren

Korollar 2.6 *Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre und $D \subset S^2$ eine abzählbare Menge. Dann sind S^2 und $S^2 \setminus D$ zerlegungsgleich.*

Beweis: Da D abzählbar ist, gibt es eine Gerade g durch das Zentrum, welche mit D leeren Schnitt hat. Eine solche Gerade g verwenden wir als Drehachse und übertragen den Beweis von Satz 2.5 Wort für Wort.

Korollar 2.7 *Sei $B^3 \subset \mathbb{R}^3$ die abgeschlossene Einheitskugel und $D \subset B^3$ eine abzählbare Menge von Durchmessern. Dann sind B^3 und $B^3 \setminus D$ zerlegungsgleich.*

Um dem Beweis des Banach-Tarski Paradoxons näherzukommen, betrachten wir den Einheitsball B^3 mit der Nordsüdachse g_1 , sowie einer zu g_1 um 45° geneigten Geraden g_2 durch das Zentrum. Sei

- f die Drehung um g_1 um 180° , also $f^2 = 1$,
- g die Drehung um g_2 um 120° , sowie $\bar{g} = g^2$, also $g^3 = \bar{g}^3 = 1$.

Sei nun G die von f und g erzeugte Kongruenzgruppe. Da das Produkt von zwei Drehungen wieder eine Drehung ist, gibt es zu jedem Element von G eine Drehachse. Da G abzählbar ist, ist die Menge D aller Durchmesser von B^3 , welche als Drehachsen von Drehungen in G fungieren, abzählbar. Dies wollen wir uns für später auch im Kontext von Korollar 2.7 merken.

Abgesehen von der geometrischen Interpretation als Drehung, kann formal jedes Element von G als ein Wort W mit Buchstaben aus dem Alphabet $\{f, g, \bar{g}\}$ aufgefaßt werden, wobei die folgenden “grammatikalischen Regeln” zu beachten sind:

- keine zwei gleichen Buchstaben dürfen nebeneinander stehen, da ja $f^2 = 1, g^2 = \bar{g}$ und $\bar{g}^2 = g$ wäre,
- g, \bar{g} dürfen nicht direkt nebeneinander stehen.

Es ist nun eine Frage des Nachrechnens, z.B. mit Drehmatrizen, daß zwei f, g, \bar{g} -Wörter mit obigen Nebenbedingungen die gleiche Drehung aus G darstellen, genau wenn sie als Wörter gleich sind, d.h., daß sich G als Gruppe von Kongruenzen und G als Gruppe von Wörtern unzweideutig entsprechen. Insbesondere ist $1 \in G$ das leere Wort. Dem Spezialisten ist an dieser Stelle klar, daß G isomorph zum freien Produkt $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ ist.

Mit Hilfe der Darstellung durch Wörter wollen wir nun G zerlegen als $G = X \dot{\cup} Y \dot{\cup} Z$ mit

$$\dagger \quad fX = Y \dot{\cup} Z, \quad gX = Y, \quad \bar{g}X = Z.$$

Um dies zu bewerkstelligen, gehen wir rekursiv vor und fangen trivial an mit $1 \in X$. Betrachten wir nun ein Wort wW mit Anfangsbuchstaben $w \in \{f, g, \bar{g}\}$, Endstück W und unterscheiden zwei Fälle:

- (i) wW ist nach den grammatischen Regeln ein unzulässiges Wort. Dies heißt aber, daß wW verkürzbar ist, und nach Induktionsannahme ist also definiert, in welcher Klasse, X , Y oder Z , sich wW befindet.
- (ii) wW ist grammatisch korrekt. Dann verwenden wir folgendes Schema wie eine Multiplikationstabelle:

$w \backslash W$	X	Y	Z
f	Y	X	X
g	Y	Z	X
\bar{g}	Z	X	Y

Man betrachte also die Zeile w und die Spalte zu welcher W nach Induktionsannahme gehört und finde im Schnittpunkt die Menge, welche wW enthält.

Beispiel:

- (α) $f = f \cdot 1 \in Y$, da $1 \in X$,
- (β) $gf \in Z$, da $f \in Y$,
- (γ) $fgf \in X$, da $gf \in Z$.
- (δ) Beginnt ein grammatisch korrektes Wort wW mit f , d.h. $w = f$, und ist $fW \in X$, so gilt $W \in Y \cup Z$. Dies liest man in der ersten Zeile ab.

Damit ist G in die drei Mengen X, Y, Z zerlegt. Es ist nun leicht nachzurechnen, daß die Relationen \dagger gelten, und wir tun dies hier nur für die erste:

$$fX = Y \dot{\cup} Z.$$

- Sei $W \in X$, so ist entweder fW ein inkorrektes Wort, d.h. f ist auch der erste Buchstabe von W , und $fW \in Y \cup Z$ gemäß Beispiel (δ). Ist fW ein korrektes Wort, so ersieht man aus der Tabelle, daß $fW \in Y$ gilt. Somit $fX \subseteq Y \dot{\cup} Z$.
- Sei $W \in Y \dot{\cup} Z$ ein Wort:
 - (i) Sei f der erste Buchstabe von W , d.h. $W = fW'$, so ist $W' \in X$ und daher $fW = f^2W' = W' \in X$
 - (ii) Ist der erste Buchstabe von W in $\{g, \bar{g}\}$, so ist fW ein grammatisch korrektes Wort und deshalb gemäß der ersten Zeile der Tabelle $fW \in X$.

Somit erhält man $f(Y \dot{\cup} Z) \subseteq X$, und

$$Y \dot{\cup} Z = f^2(Y \cup Z) \subseteq fX;$$

insgesamt gilt also wie gewünscht $fX = Y \dot{\cup} Z$.

Wir haben an dieser Stelle den Beweis ausführlich gehalten, um zu zeigen, daß die rekursive Definition mit den grammatischen Regeln sehr exakt verwendet werden muß.

Nun sind die Hilfsmittel für den Beweis des Banach-Tarski Paradoxons bereitgestellt, und wir lassen G als Drehgruppe auf B^3 operieren, d.h. die Wörter W aus G sind nun wieder Drehabbildungen:

Für $p \in B^3 \setminus D$ sei $G(p)$ die G -Bahn von p , d.h. $G(p) = \{W(p) | W \in G\}$, die Menge aller Punkte, die Bilder von p unter Drehung in G sind. Bekanntlich zerlegen die Bahnen den Grundraum, d.h. für alle p, p' gilt entweder $G(p) = G(p')$ oder $G(p) \cap G(p') = \emptyset$. In jeder Bahn wähle man mit Hilfe des Auswahlaxioms einen Repräsentanten und erhalte die Menge R aller Repräsentanten.

Man rechnet nach, daß $G(R) = B^3 \setminus D$.

Die Zerlegung von $G = X \cup Y \cup Z$ übertragen wir nun auf $B^3 \setminus D$: $A = X(R)$, $B = Y(R)$, $C = Z(R)$. Nach Konstruktion — die Gruppenelemente sind Drehungen — gilt sinngemäß

$$f(A) = B \cup C, \quad g(A) = B, \quad \bar{g}(A) = C.$$

Somit sind A, B, C und $B \cup C$ alle kongruent zueinander. Dies erlaubt uns, A kongruent zu $B \cup C$ (man verwende die Kongruenz zwischen A und $B \cup C$ als Schnittmuster) in zwei Teile zu zerlegen: $A = A_1 \cup A_2$ mit A_1 kongruent B , A_2 kongruent C , also A_1, A_2 beide kongruent zu A . Ebenso $B = B_1 \cup B_2$, $C = C_1 \cup C_2$, alles mittels kongruenter Mengen.

Nun ist

$$\begin{aligned} B^3 &= A \cup B \cup C \cup D = (A_1 \cup A_2) \cup (B_1 \cup B_2) \cup (C_1 \cup C_2) \cup D \\ &= (A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D) \cup (A_2 \cup B_2 \cup C_2) = B^3 \cup B^3 \setminus D. \end{aligned}$$

Nach Korollar 7 ist $B^3 \setminus D$ zerlegungsgleich zu B^3 !

Somit ist B^3 in zwei Mengen disjunkt so zerlegt, daß diese Mengen zerlegungsgleich zu B^3 sind. \square

3 Uniform ausgebreitete Mengen

Uniform ausgebreitete Mengen, d.h. Punktmengen in der Ebene, welche in der Nähe des Gitters \mathbb{Z}^2 liegen [La 90], gehen zentral in den Beweis von Laczkovich über die Quadratur des Kreises ein. Der volle Beweis des Satzes von Laczkovich würde den Rahmen dieses Aufsatzes sprengen, zumal er mit seinen zahlentheoretischen und maßtheoretischen Argumentationen einige Stufen tiefer liegt.

Definition: Sei $Q = \mathbb{Z}^2$ das Quadratgitter. Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **uniform ausgebreitet** (bezüglich Q), falls eine Bijektion $\varphi : X \leftrightarrow Q$ existiert mit

$$|\varphi(x) - x| < k \text{ für ein geeignetes } k \in \mathbb{R} \text{ und alle } x.$$

Eine Punktmenge X ist also uniform ausgebreitet, falls X mittels einer Bijektion in Q "hineingewackelt" werden kann, wobei beim Wackeln jeder Punkt höchstens k weit bewegt wird.

Beispiele: Natürlich ist \mathbb{Q} selbst uniform ausgebreitet. Entfernt man aus \mathbb{Q} eine endliche Punktmenge D so ist $\mathbb{Q} \setminus D$ uniform ausgebreitet. Ebenso führt das Weglassen von endlich vielen Gittergeraden aus \mathbb{Q} wieder zu einer uniform ausgebreiteten Menge. Uniform ausgebreitete Mengen sind abzählbar und diskret, d.h. jede beschränkte Teilmenge ist endlich.

Uniform ausgebreitete Mengen sind im eindimensionalen Fall — man betrachte beschränkte Bijektionen $\varphi : X \leftrightarrow \mathbb{Z}$ — aus der Zahlentheorie recht gut bekannt. Die Ausdehnung des Begriffs auf die Ebene oder allgemeiner für metrische Räume ist erst in neuerer Zeit fruchtbar geworden.

Im allgemeinen wird es unmöglich sein, für eine uniform ausgebreitete Menge X eine Bijektion $\varphi : X \leftrightarrow \mathbb{Q}$ effektiv anzugeben. Man ist daher bemüht, Kriterien anzugeben, welche auf Grund lokaler Eigenschaften von X die Existenz einer globalen Bijektion $X \leftrightarrow \mathbb{Q}$ garantieren. Hierfür wird nun ein Kriterium angegeben (zu einer Menge A bezeichnet $|A|$ deren Kardinalität).

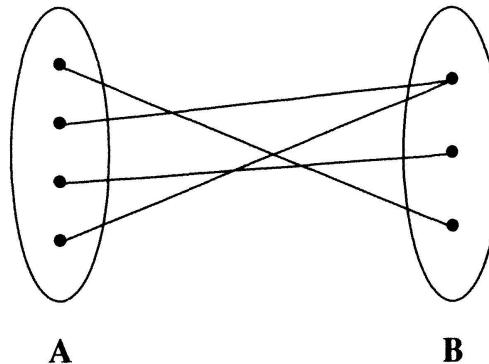
Kriterium 3.1 [La 90] Sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Punktmenge. X ist uniform ausgebreitet, genau wenn ein $k \in \mathbb{R}$ existiert mit:

- (i) Für jede endliche Teilmenge A von X enthält die k -Umgebung von A mindestens $|A|$ viele Punkte aus \mathbb{Q} .
- (ii) Für jede endliche Teilmenge B von \mathbb{Q} enthält die k -Umgebung von B mindestens $|B|$ viele Punkte aus X .

Um festzustellen, ob X uniform ausgebreitet ist, muß man also “nur” testen, ob zu jeder endlichen Teilmenge von X und \mathbb{Q} jeweils genügend viele Punkte der jeweils anderen Menge höchstens einen vorgegebenen Abstand k hierzu haben.

Wir geben nun die wesentlichen Ideen des Beweises und beginnen mit dem sogenannten Heiratssatz für endliche bipartite Graphen.

Definition: Ein Graph heißt **bipartit**, falls seine Eckenmenge so in zwei Teilmengen (typischerweise A, B) zerlegbar ist, daß alle Kanten von der einen zur anderen Teilmenge verlaufen.



Im Rahmen der Soziomathematik werden bipartite Graphen modelliert, indem die Gesellschaft in zwei Geschlechter zerfällt und die Kanten die symmetrische Relation des “heterosexuell befreundet sein” angeben. Wir halten uns hier an die abstrakte Sprache der Mathematik und überlassen Interpretationen dem Leser.

Zu jedem $a \in A$ gibt es die Menge der benachbarten Ecken

$$B_a = \{b \in B \mid a \text{ und } b \text{ sind durch eine Kante verbunden}\}.$$

Ebenso gibt es zu $A' \subseteq A$ die Menge $B_{A'}$ der Ecken in B , die zu mindestens einem $a \in A'$ benachbart sind

$$B_{A'} = \bigcup_{a \in A'} B_a.$$

Ein **A -matching** in einem bipartitem Graphen A, B ist eine Menge von Kanten mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Jeder Punkt von A ist in genau einer Kante des matching enthalten,
- (ii) je 2 Kanten sind identisch oder haben disjunkte Endpunkte.

Der Heiratssatz von P. Hall, welcher schon im letzten Jahrhundert bei Frobenius in matrizentheoretischer Formulierung auftritt, gibt ein Kriterium dafür, daß in einem **endlichen** bipartiten Graphen ein A -matching existiert.

Satz 3.2 [Ha 35] *Sei $G = (A, B)$ ein endlicher bipartiter Graph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

- (i) *Zu G existiert ein A -matching.*
- (ii) *Für jedes $A' \subseteq A$ gilt $|B_{A'}| \geq |A'|$ (Hall'sche Bedingung).*

Beweis: “ $i \Rightarrow ii$ ” Sei M eine Kantenmenge, die ein A -matching ist. Da die Kanten in M paarweise disjunkt sind, ist für jedes $A' \subseteq A$ die Ungleichung $|B_{A'}| \geq |A'|$ erfüllt.

Der folgende Beweis für “ $ii \Rightarrow i$ ” geht auf Halmos und Vaughan [HV 50] zurück und geschieht mit Induktion nach $|A|$. Für $|A| = 1$ gibt die Hall'sche Bedingung das A -matching. Also ist $|A| \geq 2$ und für alle $A' \subset A$ der Satz schon bewiesen.

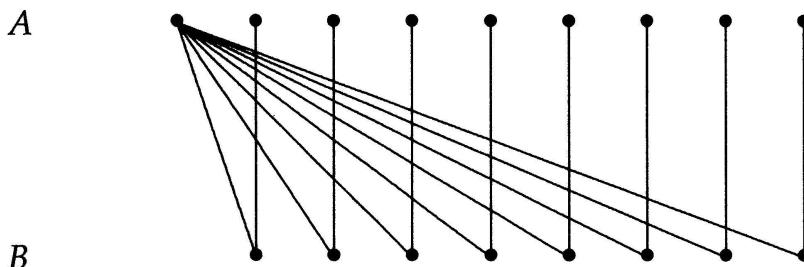
Fall (α) Jede echte nichtleere Teilmenge A' von A erfüllt $|B_{A'}| \geq |A'| + 1$. Dann wählen wir eine beliebige Kante für das matching. Der Restgraph (ohne die beiden Endpunkte der gewählten Kante) erfüllt die Hall'sche Bedingung und hat nach Induktionsannahme ein matching.

Fall (β) Es gibt eine echte nichtleere Teilmenge A' von A mit $|B_{A'}| = |A'|$. Nach Induktion gibt es ein A' -matching. Der Restgraph (ohne die vom A' -matching überdeckten Ecken) erfüllt die Hall'sche Bedingung, denn wäre diese für ein $A^* \subset A \setminus A'$ verletzt, so auch für $A^* \cup A'$. Also gibt es nach Induktionsannahme im Restgraphen auch ein matching.

Dieser Beweis ist der kürzeste mir bekannte und offenbar sehr elegant. Er hat vom Standpunkt der angewandten Mathematik den Nachteil, daß man erst in den Fall (β) kommt, nachdem man alle $2^{|A|} - 2$ nichtleeren Teilmengen A' von A ausgetestet hat, also exponentiell lange gearbeitet hat. Es gibt zum Glück Beweise, welche zu einem Algorithmus mit $O(|A|^{2.5})$ Laufzeit führen [HK 73], wobei gegebenenfalls auch gleich

ein Gegenbeispiel, falls vorhanden, produziert wird. Ob dies bestmöglich ist, ist nicht bekannt.

Der nächste Schritt besteht nun darin, den Heiratssatz auf **abzählbare bipartite Graphen** auszudehnen. Folgendes Beispiel zeigt, daß dies im allgemeinen nicht geht.



Hier ist die Hall'sche Bedingung erfüllt, aber ein A -matching existiert nicht. Dies liegt an dem einen Punkt a_0 , in welchem unendlich viele Kanten anstoßen, d.h. a_0 hat **unendliche Valenz**.

Falls man sich auf abzählbare Graphen beschränkt, in denen kein Punkt unendliche Valenz hat, d.h. auf lokalfiniten Graphen, so gilt der Heiratssatz:

Satz 3.3 Sei $G = (A, B)$ ein lokalfiniter bipartiter Graph. Dann hat G ein A -matching genau wenn für jede endliche Teilmenge A' von A die Hall'sche Bedingung erfüllt ist.

Wir wollen den Beweis hier nicht bringen, zumal wir im nächsten Abschnitt einen etwas allgemeineren Satz beweisen werden.

Als nächstes betrachten wir einen abzählbaren lokalfiniten bipartiten Graphen, in welchem die Hall'sche Bedingung auf beiden Seiten erfüllt ist. Wir wissen also, daß in $G = (A, B)$ sowohl ein A -matching als auch ein B -matching existiert. Dies heißt aber noch nicht direkt, daß ein matching gleichzeitig beide Seiten A, B überdeckt. Dies wird vielmehr erst von einem anderen klassischen Satz garantiert.

Satz 3.4 (Cantor-Bernstein) Sei $G = (A, B)$ ein bipartiter Graph, in welchem es sowohl ein A -matching M_1 , als auch ein B -matching M_2 gibt. Dann gibt es ein matching M welches gleichzeitig A und B überdeckt. Weiter ist (als Kantenmenge) $M \subset M_1 \cup M_2$.

Nun ist der Beweis des Kriteriums für das uniforme Ausbreitesein einer Menge recht leicht. Man betrachte den bipartiten Graphen mit den beiden Teilen $A = X$ und $B = \mathbb{Z}^2$. Sollten A und B nicht disjunkt sein, so verschieben wir die Punkte in A um ε und erreichen $A \cap B = \emptyset$. Zwei Punkte in A, B sind durch eine Kante zu verbinden, falls ihr Abstand höchstens k ist. Ein A und B überdeckendes matching definiert nun durch seine Kanten eine Bijektion $\varphi : A \rightarrow B$ mit $|\varphi(x) - x| < k$ für alle x . Die im Kriterium angegebenen Bedingungen sind aber gerade die Hall'schen Bedingungen für die beiden Seiten des bipartiten Graphen.

4 Paradoxe diskrete Punktmengen

Wir haben im letzten Abschnitt uniform ausgebreitete Mengen in der Ebene kennengelernt. Die dortige Definition läßt sich offenbar viel allgemeiner fassen.

Definition: Sei M ein metrischer Raum mit Metrik d . Zwei Teilmengen X, Y von M heißen äquivalent, falls eine Bijektion $\varphi : X \longleftrightarrow Y$ existiert mit

$$d(\varphi(x), x) < k$$

für ein geeignetes k und alle $x \in X$.

Wir erinnern uns, daß eine Menge X uniform ausgebreitet ist, wenn sie äquivalent zum Quadratgitter ist. Allgemein ist in einem metrischen Raum eine Menge X äquivalent zu Y falls X in Y "hineingewackelt" werden kann. Es braucht wohl nicht betont zu werden, daß es sich bei unserem Begriff auch wirklich um eine Äquivalenz handelt.

In Anlehnung an das Banach-Tarski-Padoxon wollen wir nun paradoxe Mengen definieren.

Definition: Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes heißt **paradox**, genau wenn eine Zerlegung von M in zwei Teilmengen M_1, M_2 existiert, so daß alle drei Mengen M_1, M_2, M paarweise äquivalent sind.

Beispiel 1 Sei M ein beschränkter metrischer Raum (z.B. der triviale metrische Raum mit $d(x, y) = 1$, genau wenn $x \neq y$). Dann ist X äquivalent zu Y , genau wenn sie dieselbe Kardinalität haben. M ist paradox, genau wenn M unendlich ist.

Wir haben dieses Beispiel nur angegeben um zu zeigen, ein wie weites Spektrum der Begriff der paradoxen Mengen umfaßt. In diesem Aufsatz beschränken wir uns im weiteren auf den \mathbb{R}^n mit der euklidischen Metrik.

Beispiel 2 \mathbb{R}^n ist paradox. Für $n = 2$ pflastere man die Ebene schachbrettartig mit $[0, 1]^2$ Quadraten. Die schwarzen Felder gehören zu M_1 , die weißen zu M_2 . Es ist klar, daß M_1 und M_2 äquivalent sind. Ferner ist $[0, 1]^2$ äquivalent zu $[0, 1] \times [0, 2)$, womit man stückweise eine Bijektion zwischen M_1 und M hat.

Dieses Beispiel zeigt, dass die Frage nach paradoxen Mengen erst interessant wird, wenn man sich auf möglichst "dünne" Mengen kapriziert.

Definition: $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt **diskret**, falls jede beschränkte Teilmenge von X endlich ist.

Für diskrete Mengen ist die Frage der Paradoxität nicht mehr so einfach. Immerhin gibt es noch Beispiele.

Beispiel 3 Sei $M = \{\log n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Logarithmen natürlicher Zahlen. M ist paradox: Man setze

$$\begin{aligned}M_1 &= \{\log 2n \mid n \in \mathbb{N}\} \\M_2 &= \{\log(2n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\},\end{aligned}$$

die Mengen der Logarithmen gerader resp. ungerader natürlicher Zahlen. Wegen $\log 2n = \log n + \log 2$ ist M_1 äquivalent zu M . Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log(2n + 1) - \log(2n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{2n + 1}{2n} = \log 1 = 0$$

ist auch $\varphi : M_2 \rightarrow M_1$, welches durch $\varphi(\log 2n) = \log(2n + 1)$ definiert ist, eine Wackelbijektion.

Nun liegen im Intervall $[0, x]$ ungefähr $f(x) = e^x$ viele Punkte von M , d.h. die Kardinalität von $M \cap [0, x]$ wächst exponentiell. Man könnte daher vermuten, daß die Paradoxität von M mit dessen exponentiellem Wachstum zusammenhängt. Daß dies bei geeigneter Definition zutrifft, wollen wir nun beweisen.

Definition: Eine diskrete Teilmenge M von \mathbb{R}^n hat **mindestens exponentielles Wachstum**, falls $\varepsilon > 0$ und $\bar{k} \in \mathbb{N}$ existieren, so daß für jede endliche Teilmenge X' von M gilt:

Jede \bar{k} -Umgebung von X'

$$U_{\bar{k}}(X', M) = \{z \in M \mid \exists y \in X' \ d(z, y) < \bar{k}\}$$

hat mindestens $(1 + \varepsilon)|X'|$ viele Punkte.

Wir wollen nun flugs diese etwas abstrakte Definition vereinfachen und beweisen

Lemma 4.1 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ diskret. Dann sind äquivalent

- (i) M hat mindestens exponentielles Wachstum.
- (ii) Es gibt $k \in \mathbb{N}$, so daß für jede endliche Teilmenge X' von M gilt

$$|U_k(X', M)| \geq 2|X'|.$$

Beweis: “ $i \Rightarrow ii$ ”: Habe X exponentielles Wachstum mit Parametern ε, \bar{k} , so gibt es a mit $(1 + \varepsilon)^a = 2$ und man setze $k = a\bar{k}$. Man verwende nun die Exponentialgesetze um (ii) zu zeigen.

“ $ii \Rightarrow i$ ”: Dies ist die Definition des exponentiellen Wachstums mit $\varepsilon = 1$.

Es gilt nun

Satz 4.2 [DeSiSo 91] Sei M eine diskrete Punktmenge in \mathbb{R}^n . Dann sind äquivalent

- (i) M ist paradox.
- (ii) M hat mindestens exponentielles Wachstum.

Zunächst zeigen wir, daß jede paradoxe Menge auch mindestens exponentielles Wachstum hat. Sei $M = M_1 \dot{\cup} M_2$ eine paradoxe Zerlegung mit Wackelbijektionen $\varphi_i : M \rightarrow M_i$ für $i = 1, 2$ mit zugehörigen Konstanten k_1, k_2 . Mit $k = \max(k_1, k_2)$ erhalten wir sofort für jede endliche Teilmenge X' von M

$$|U_k(X', M)| \geq |\varphi_1(X')| + |\varphi_2(X')| = 2|X'|,$$

d.h. M hat mindestens exponentielles Wachstum.

Damit ist die Wachstumsbedingung als Kriterium für Paradoxität als natürlich erkannt. Die Umkehrung ist etwas schwieriger zu beweisen. Der Beweis folgt der Linie des oben beschriebenen Heiratssatzes, benutzt jedoch einen Haremsatz.

Definition: Sei $G = (A, B)$ ein bipartiter Graph. Eine Kantenmenge m ist ein **(2,1)-matching** für G falls m jeden Punkt von A genau zweimal und jeden Punkt von B genau einmal trifft.

Wie vorher ist ein Graph lokalfinit, falls in jedem Punkt nur endlich viele Kanten anstoßen. Weiter sind B_a und A_b die Mengen der mit a , resp. b verbundenen Punkte ($a \in A, b \in B$), sowie $B_{A'}, A_{B'}$ die Mengen der mit $A' \subset A$ resp. $B' \subset B$ verbundenen Punkte. Es gilt nun der folgende Haremsatz.

Satz 4.3 Sei $G = (A, B)$ ein lokalfiniter bipartiter abzählbarer Graph. Es gibt genau dann ein (2,1)-matching, wenn

- (i) $|B_{A'}| \geq 2|A'|$ für jede endliche Teilmenge A' von A , sowie
- (ii) $|A_{B'}| \geq |B'|$ für jede endliche Teilmenge B' von B gilt.

Bemerkungen:

1. Der Satz gilt (mit austauschbarem Beweis) für (k, ℓ) -matchings (k, ℓ natürliche Zahlen).
2. Die Lokalfinitheit ist wesentlich, nicht jedoch die Abzählbarkeit, welche hier der Einfachheit halber gefordert wurde. Im allgemeinen Fall wird das Auswahlaxiom benötigt.

Der Beweis des Satzes, daß eine diskrete Menge M von mindestens exponentiellem Wachstum paradox ist, ist nun ganz leicht:

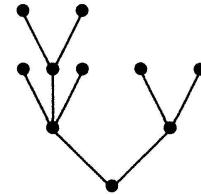
Man betrachte den bipartiten Graphen mit $A = M$ und $B = M$ und verbinde zwei Punkte, falls ihr Abstand höchstens k ist. Die Bedingung für exponentielles Wachstum ergibt unmittelbar die Existenzbedingungen für ein (2,1)-matching. Dieses zerlegt B in zwei Mengen M_1, M_2 , welche entlang der Kanten des matchings äquivalent zu M sind, womit M als paradox erkannt ist. \square

Der Beweis des Haremsatzes folgt ähnlichen Gedankengängen wie derjenige des Heiratssatzes. Allerdings brauchen wir eine etwas technischere Version für den Beweis von Satz 4.2. welcher wiederum keine neuen Ideen braucht, sondern im formalen Rahmen des Heiratssatzes bewiesen werden kann.

Bemerkung: Ist $G = (A, B)$ ein abzählbarer lokalfiniter bipartiter Graph, sind $A^* \subset A, B^* \subset B$ endliche Mengen und gelten die Bedingungen (i) (ii) des Haremsatzes für Teilmengen A' von A^* und B' von B^* , dann gibt es in G ein "lokales" (2,1)-matching m , d.h. eine Kantenmenge welche A^* genau zweifach und B^* genau einfache überdeckt. Man bemerke, daß die Kanten von m nicht zwischen A^* und B^* verlaufen müssen.

Wir wenden uns nun der Übertragung des endlichen Falles des Haremsatzes, den wir voraussetzen, auf den abzählbaren Fall zu und werden hierfür das Baumlemma von König anwenden.

Definition: Ein Baum ist ein ungerichteter zusammenhängender Graph ohne Kreise (s. Bild).



Satz 4.4 (Baumlemma von König) [Kö 27]: Sei T ein abzählbarer lokalfiniter Baum. Dann gibt es von jedem Punkt aus einen unendlich langen Weg.

Beweis: Seien T ein Baum und eine Ecke t_0 gegeben. Da T lokalfinit ist, gibt es einen Nachbarn t_1 von t_0 , über welchen unendlich viele Wege laufen. Aus demselben Grund gibt es einen Nachbarn t_2 von t_1 , über ... usw. $t_0 - t_1 - t_2 \dots$ ist dann ein unendlich langer Weg. \square

Um das Baumlemma anzuwenden, gehen wir von einem bipartiten lokalfiniten abzählbaren Graph $G = (A, B)$ aus und zählen $A = \{a_1, a_2, \dots\}, B = \{b_1, b_2, \dots\}$ auf. Für jede natürliche Zahl n betrachten wir den endlichen Graphen G_n , welcher aus allen Kanten besteht, die in $A_n^* = \{a_1 \dots a_n\}$ oder $B_n^* = \{b_1 \dots b_n\}$ anstoßen. Nun erfüllt G_n die Bedingung der Bemerkung zum Haremsatz. Also gibt es in jedem G_n ein lokales (2,1)-matching m für A_n^*, B_n^* . Da G_n endlich ist, gibt es nur endlich viele solche (2,1)-matchings, aber mindestens eines, also insgesamt abzählbar viele.

Nun bauen wir den Baum: Die Ecken des Baumes sind die soeben angegebenen lokalen (2,1)-matchings. Baumkanten werden wie folgt definiert: Sind m_1, m_2 zwei lokale Matchings, wobei m_1 zu G_n und m_2 zu G_{n+1} gehören, so verbinden wir m_1 mit m_2 durch eine Kante, falls $m_1 \subseteq m_2$ gilt. Schließlich verbinden wir alle (2,1)-matchings, welche zu G_1 gehören, artifiziell mit einer Extraecke 0.

Es ist ein allgemeines Phänomen, daß solche sorgfältig definierte Extensionsgraphen lokalfinit Bäume ergeben, eine Tatsache, die wir hier nicht im einzelnen nachrechnen. Vielmehr wenden wir nun Königs Baumlemma an und erhalten einen in 0 beginnenden unendlich langen Weg von matchings

$$0 \subset m_1 \subset m_2 \subset m_3 \subset \dots,$$

also eine aufsteigende Kette.

Nun genügt es, die Vereinigung aller in den m_i vorkommenden matching-Kanten zu nehmen, um ein $(2,1)$ -matching von $G = (A, B)$ zu erhalten. Damit ist der Satz bewiesen. Es war für uns zunächst erstaunlich, daß die Paradoxität der diskreten Teilmengen, welche durch die Arbeiten von Laczkovich zur Quadratur des Kreises motiviert waren, im \mathbb{R}^n mit einem solch einfachen Kriterium behandelt werden kann und dabei der Beweis derart klassischen Linien folgt. Natürlich haben wir hier an einigen Stellen die technischen Nachrechnungen weggelassen, welche in der Originalliteratur zu finden sind. Dadurch hoffen wir, wenigstens die Ideen verdeutlicht zu haben, die in diesem klassischen Gebiet der Mathematik neue Fortschritte gebracht haben.

Literaturverzeichnis

- [DeSiSo 91] Deuber, W., Simonovits, M., Sós, V., Discrete paradoxical sets in metric spaces. (Manuscript).
- [Bl 84] Blass, A., Existence of bases implies the axiom of choice. Axiomatic Set Theory, ed. by Baumgartner, Martin and Shelah. Contemporary Mathematics Series, Vol. 31, A.M.S. (1984), 31–33.
- [BT 24] Banach, S., Tarski, A., Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents. Fund. Math. 6 (1924), 244–277.
- [Ha 35] Hall, P., On representatives of subsets. J. London Math. Soc. 10 (1935), 26–30.
- [HK 73] Hopcroft, J.E. and Karp, R.M., An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. SIAM J. Comput. 2, (1973), 225–231.
- [HV 50] Halmos, P.R., Vaughan, H.E., The marriage problem. Amer. J. Math. 72 (1950), 214–215.
- [Kö 27] König, D., Über eine Schlußweise aus dem Endlichen ins Unendliche. Acta Sci. Math. (Szeged) 3 (1927), 121–130.
- [La 90] Laczkovich, M., Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle squaring problem. J. Reine Angew. Math. (Crelles Journal), 404 (1990), 77–117.
- [La 91] Laczkovich, M., Uniformly spread discrete sets in \mathbb{R}^d . Manuscript 1991.
- [Wa 85] Wagon, St., The Banach Tarski Paradox. Cambridge University Press 1985.

Walter Deuber

Fakultät für Mathematik
 Universität Bielefeld
 Postfach 100131
 D-4800 Bielefeld 1