

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 48 (1993)  
  
**Artikel:** Catalan-Zahlen und Wege in einem ganzzahligen Gitter  
**Autor:** Hilton, Peter J. / Pedersen, Jean  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-44624>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

---

## Catalan-Zahlen und Wege in einem ganzzahligen Gitter

---

---

Peter J. Hilton und Jean Pedersen

Peter J. Hilton studierte in Oxford. Nach einigen Jahren Tätigkeit an Universitäten in England verlegte er seinen Wohnsitz in die Vereinigten Staaten und arbeitete seither an verschiedenen amerikanischen Universitäten. Seit 1982 ist er Distinguished Professor of Mathematics an der State University of New York in Binghamton. Er hat zahlreiche Bücher und Forschungsartikel geschrieben, vor allem in den Gebieten algebraische Topologie, homologische Algebra und Gruppentheorie. Neben der Forschung war ihm schon immer der mathematische Unterricht ein besonderes Anliegen.

Jean Pedersen gehört seit mehreren Jahren dem Lehrkörper des Mathematikdepartementes der Santa Clara University in Kalifornien an. Ihre mathematischen Interessen wurden durch den langjährigen engen wissenschaftlichen Kontakt mit G. Pólya geformt: Polyedergeometrie, Kombinatorik, mathematischer Unterricht. Ihre Arbeiten haben grosse internationale Anerkennung gefunden, wie durch Einladungen zu Vorträgen an Konferenzen in den USA, Kanada, Italien, Israel belegt wird. Peter Hilton und Jean Pedersen haben in den letzten Jahren gemeinsam eine lange Reihe von Beiträgen, insbesondere zum mathematischen Unterricht, veröffentlicht.

Entwicklungen, die in einem Gebiet der Mathematik stattfinden, haben oft unmittelbare Rückwirkungen auf davon weit entfernt liegende Gebiete und führen dort nicht selten zu unerwarteten Fortschritten. Ein Beispiel dafür, das wegen seiner grossen kulturgeschichtlichen Bedeutung eigentlich auch ausserhalb der Mathematik bestens bekannt sein müsste, wird durch die Differentialrechnung geliefert. Diese löst ja nicht nur das geometrische Problem, an eine gekrümmte Kurve eine Tangente zu legen, sondern gleichzeitig auch — und für Unvoreingenommene völlig überraschend — in der Physik das Problem, einem bewegten Massenpunkt eine Geschwindigkeit zuzuordnen. Solche verschiedenartige Interpretationen eines mathematischen Sachverhaltes kommen nicht nur in diesen grossen Zusammenhängen sondern auch "im Kleinen" vor: Auch da liefern sie regelmässig neue Einsichten. — Im vorliegenden Beitrag von Hilton und Pedersen begegnet uns ein einfaches derartiges Beispiel. Das hier ursprünglich gestellte Problem, nämlich die Abzählung  $n$ -ärer Bäume, wird auf mehrere verschiedene Arten umformuliert. Schliesslich liefert eine der neuen Interpretationen die gesuchte Anzahl auf einfache Weise. Dabei wird eine auf Désiré André zurückgehende Beweisidee eingesetzt, die sich durch Einfachheit und Eleganz auszeichnet. *usf*

## Einleitung

Zwei Eigenschaften machen die Kombinatorik zu einem mathematischen Gebiet, das sich für den Schulunterricht besonders eignet. Erstens verwendet die Kombinatorik eine Vielzahl von Begriffen aus ganz verschiedenen mathematischen Gebieten und ist so ein schönes Beispiel für die Einheit der Mathematik. Zweitens ist die in der Kombinatorik verwendete Mathematik elementar in dem Sinne, dass ihre Behandlung keine grösseren Vorbereitungen erfordert; in der Tat kommen die benötigten mathematischen Werkzeuge typischerweise sogar ohne Differentialrechnung aus.

Die *Catalan-Zahlen*, so benannt nach dem belgischen Mathematiker Eugène Charles Catalan (1814–1894), aber tatsächlich schon viel früher von Euler im 18. Jahrhundert entdeckt, lassen sehr viele verschiedene Interpretationen zu. In dieser Arbeit geben wir drei davon an, die als grundlegend angesehen werden können, indem sie sich auf offensichtlich wichtige Konzepte der Graphentheorie, der Informatik und der Geometrie beziehen. Ferner behandeln wir eine vierte Interpretation, welche die Catalan-Zahlen mit Wegen in einem ganzzahligen Gitter in der Koordinatenebene verbindet; dies erlaubt es uns, die Catalan-Zahlen in das grosse Gebiet der klassischen Algebra einzuordnen.

Wir haben an anderer Stelle über dieses Thema bereits publiziert (siehe [HP 1,2]), einmal um Hintergrundinformation zu liefern, dann aber auch, um einen attraktiven Beitrag für Mathematiker zu schreiben, deren Hauptinteresse ausserhalb der Kombinatorik liegt. Hier ist unsere Zielrichtung davon verschieden; wir möchten mit diesem schönen Beispiel aus der Kombinatorik den Mathematiklehrern Ideen liefern, die zur Motivation ihrer Schüler für mathematische Einsichten und Techniken dienen können. Aus diesem Grunde bemühen wir uns hier, die verschiedenen kombinatorischen Operationen explizit und ausführlich zu beschreiben.

In unserem Text stellen wir ein Argument dar, welches im Laufe des 19. Jahrhunderts vom französischen Mathematiker Désiré André entdeckt worden ist, und das, wie wir glauben, eine der schönsten und stimulierendsten mathematischen Einsichten beinhaltet, welche in der Schule voll gewürdigt werden können. Dieses Argument wurde von André entwickelt, um eine Lösung des sogenannten Abstimmungsproblems zu geben, aber es zeigt sich, dass es auch als wichtiges Werkzeug für das Studium der Catalan-Zahlen in ihrer vierten Interpretation dienen kann. Im letzten Abschnitt unseres Beitrags geben wir schliesslich eine ausführliche Diskussion des Abstimmungsproblems.

Wir danken Professor Pere Mumbrú von der Universität Barcelona für die Einladung, eine Folge von Vorträgen zu halten, aus denen dieser Beitrag entwickelt worden ist.

## 1 Bäume, Klammerausdrücke und konvexe Vielecke

Wir beginnen mit einer Darstellung von drei natürlichen kombinatorischen Begriffen, die in völlig verschiedenen Zusammenhängen auftreten, die sich aber später als mathematisch äquivalent herausstellen werden.

Es sei  $n$  eine feste ganze Zahl,  $n \geq 2$ . Dann definieren wir drei Folgen von positiven ganzen Zahlen, die von  $n$  abhängen:

$a_k$ :  ${}_na_0 = 1$ ,  ${}_na_k$  = Anzahl der  $n$ -ären Bäume mit  $k$  Verzweigungspunkten,  $k \geq 1$ ;

$b_k$ :  ${}_nb_0 = 1$ ,  ${}_nb_k$  = Anzahl der Klammerausdrücke, die durch  $k$  Anwendungen einer  $n$ -ären Operation erhalten werden können,  $k \geq 1$ ;

$c_k$ :  ${}_nc_0 = 1$ ,  ${}_nc_k$  = Anzahl der verschiedenen Unterteilungen eines konvexen Vielecks in  $k$   $(n+1)$ -Ecke durch Diagonalen, die sich nicht schneiden,  $k \geq 1$ .

Man beachte, dass für  $k \geq 1$  das Folgende gilt:

- (i) ein  $n$ -ärer Baum mit  $k$  Verzweigungspunkten hat  $(n-1)k+1$  Endpunkte und im ganzen  $nk+1$  Punkte (siehe Figur 1(a,b));

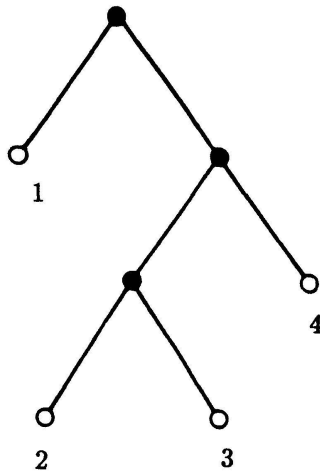


Fig. 1a)  $n = 2$ ,  $k = 3$ . Ein binärer Baum ( $n = 2$ ) mit 3 ( $k = 3$ ) Verzweigungspunkten (•) und 4 Endpunkten (○).

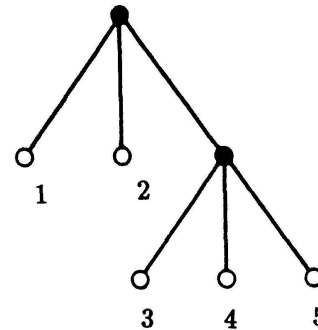


Fig. 1b)  $n = 3$ ,  $k = 2$ . Ein ternärer Baum ( $n = 3$ ) mit 2 ( $k = 2$ ) Verzweigungspunkten (•) und 5 Endpunkten (○).

- (ii) die  $n$ -äre Operation wird, durch Setzen von Klammern,  $k$ -mal auf eine Folge von  $(n-1)k+1$  Symbolen angewendet (siehe Figur 1(a',b'));

$$(s_1 ((s_2 s_3) s_4))$$

Fig. 1a')  $n = 2$ ,  $k = 3$ . Klammerausdruck, erhalten durch 3 ( $k = 3$ ) Anwendungen einer binären ( $n = 2$ ) Operation auf 4 Symbole

$$(s_1 s_2 (s_3 s_4 s_5))$$

Fig. 1b')  $n = 3$ ,  $k = 2$ . Klammerausdruck erhalten durch 2 ( $k = 2$ ) Anwendungen einer ternären ( $n = 3$ ) Operation auf 5 Symbole

- (iii) das Vieleck hat  $(n-1)k+2$  Seiten und wird durch  $k-1$  Diagonalen in  $k$  disjunkte  $(n+1)$ -Ecke zerlegt (siehe Figur 1(a'',b'')).

Ein  $((n-1)k+2)$ -Eck wird durch  $(k-1)$  Diagonalen in  $k$  disjunkte  $(n+1)$ -Ecke zerlegt.

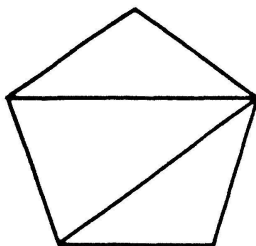


Fig. 1a'')  $n = 2$ ,  $k = 3$ . Ein 5-Eck wird durch 2 Diagonalen in drei 3-Ecke zerlegt.

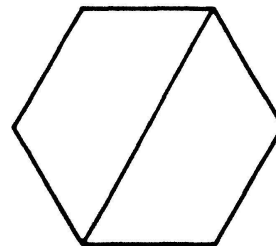


Fig. 1b'')  $n = 3$ ,  $k = 2$ . Ein 6-Eck wird durch 1 Diagonale in zwei 4-Ecke zerlegt.



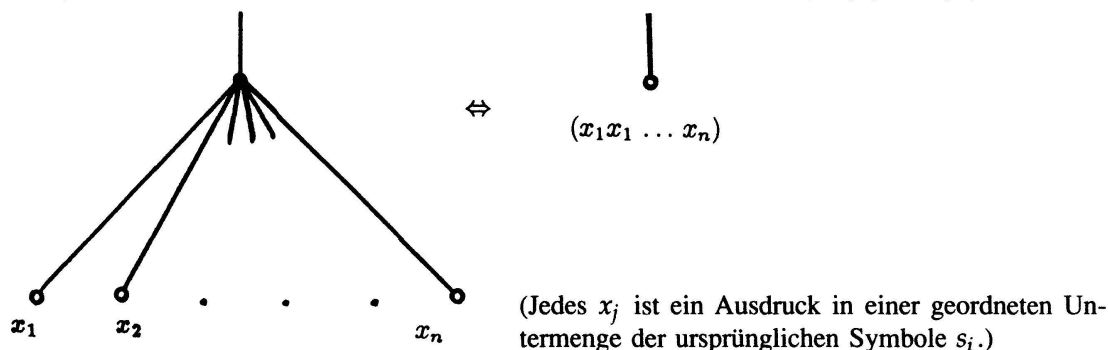
Ein gut bekanntes und leicht zu beweisendes Resultat (für den Fall  $n = 2$  siehe Sloane [S]) ist das folgende

**Theorem 1.1**

$${}_n a_k = {}_n b_k = {}_n c_k .$$

Die Bäume der Figur 1(a, b) können in die entsprechenden Klammerausdrücke der Figur 1(a', b') übersetzt werden. Dazu führen wir der Reihe nach Zuordnungen durch, wie sie in der Figur 2 beschrieben werden. Um einen gegebenen Baum in den entsprechenden

Für eine  $n$ -äre Operation ist die Zuordnung an einem im *Innern* liegenden Verzweigungspunkt gegeben durch



An einem *Anfangspunkt* ist die Zuordnung gegeben durch

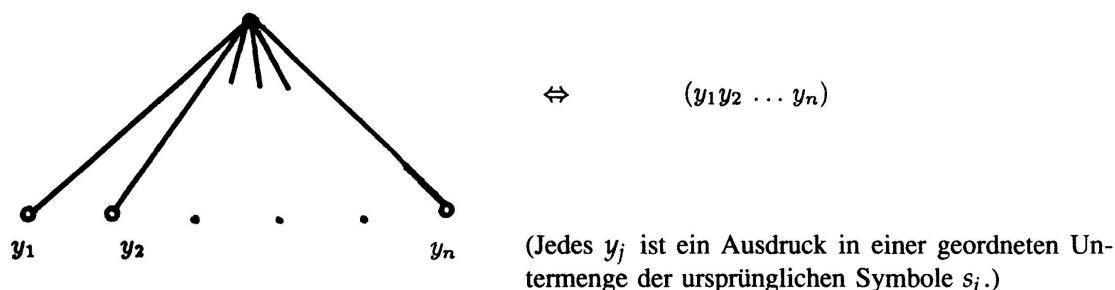


Fig. 2 Typische Schritte bei der Zuordnung eines Klammerausdrucks zu einem Baum.

Klammerausdruck überzuführen, nummeriere man als erstes die Endpunkte des Baumes "von links nach rechts" wie in den Beispielen in der Figur 1(a, b). Dann wird jeder Zahl  $i$  ein Symbol  $s_i$  zugeordnet. Schliesslich beginne man an einer Stelle bei den Endpunkten, wo ein vollständiger Satz von  $n$  Symbolen vorkommt, und führe die in der Figur 2 angegebene Zuordnung für einen im Innern liegenden Punkt aus.<sup>1)</sup> Man wiederhole diesen Prozess der Reihe nach für alle Punkte im Innern, bis man den Anfangspunkt erreicht. Für diesen führe man die zu einem Anfangspunkt gehörige Zuordnung aus, um den gewünschten Klammerausdruck zu erhalten. Die Figur 3 illustriert diesen schrittweisen Prozess an einem Beispiel. Um von einem Klammerausdruck zum entsprechenden Baum zu gelangen, geht man einfach in der umgekehrten Richtung vor.

Die Beziehung zwischen den Bäumen der Figur 1(a, b) oder der Klammerausdrücke der Figur 1(a', b') und den entsprechenden unterteilten Vielecken der Figur 1(a'', b'') ist subtiler (und der Hinweis, der in [S] für den Fall  $n = 2$  gegeben wird, erscheint

1) Falls mehr als eine Stelle dieser Art vorkommt, so können die zugehörigen Zuordnungen simultan durchgeführt werden.

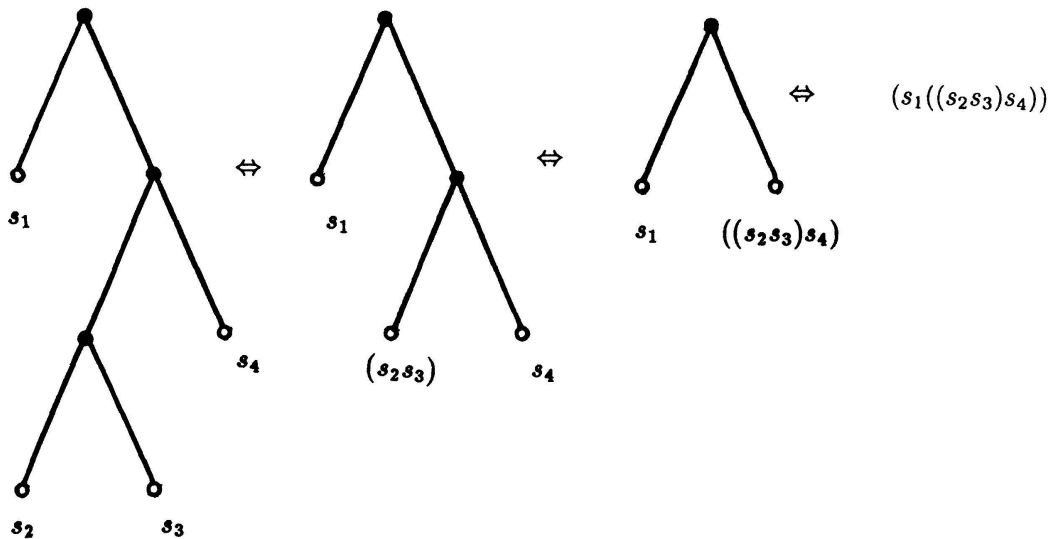


Fig. 3 Auf diese Weise wird einem Baum schrittweise ein Klammerausdruck zugeordnet.

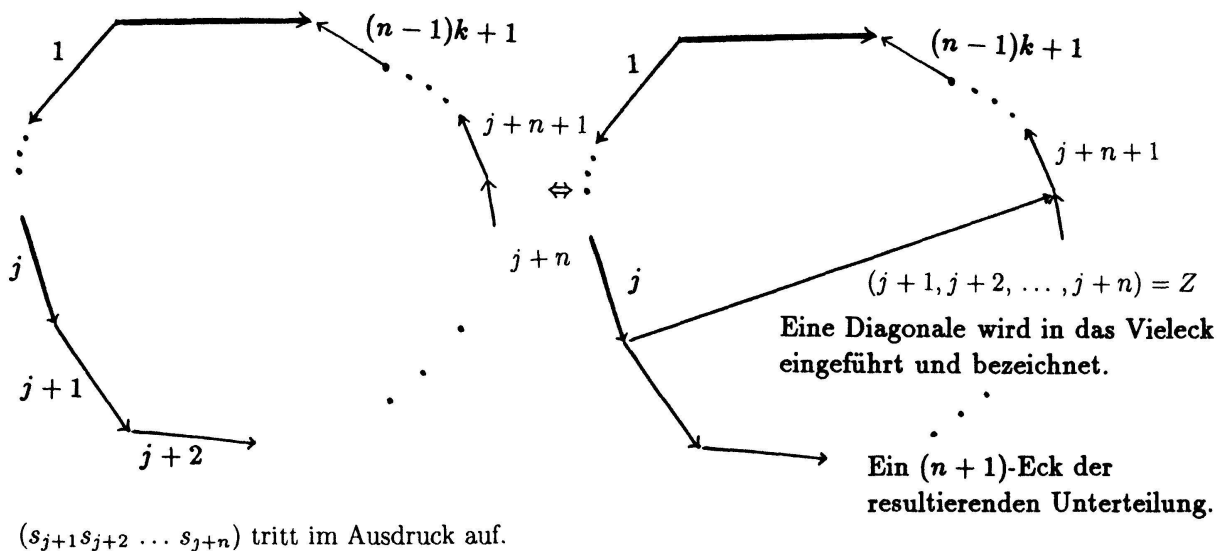


Fig. 4 Der erste Schritt der Zuordnung zwischen einem Klammerausdruck und einem unterteilten Vieleck.

uns etwas kryptisch). Deshalb gehen wir hier sehr explizit auf diese Zuordnung ein; sie wird uns schliesslich das Resultat  ${}_nb_k = {}_nc_k$  liefern. Wir nehmen an, dass uns ein Klammerausdruck vorliegt, der durch  $k$ -fache Anwendung einer  $n$ -ären Operation auf eine Folge von  $(n-1)k+1$  Symbolen entstanden ist. Wir zeichnen dann ein konvexes  $((n-1)k+2)$ -Eck und versehen dessen Seiten, mit Ausnahme der obersten, im Gegen-uhreigersinn mit den Zahlen 1 bis  $(n-1)k+1$  (siehe Figur 4). Von links beginnend finde man nun den ersten Ort im Klammerausdruck, wo eine Folge von  $n$  Symbolen in Klammern eingeschlossen ist. Falls die Indizes der eingeschlossenen Symbole von  $j+1$  bis  $j+n$  gehen, so zeichne man eine Diagonale vom Anfangspunkt der  $(j+1)$ -ten Seite zum Endpunkt der  $(j+n)$ -ten Seite und versehe diese Diagonale mit der Beschriftung  $(j+1, j+2, \dots, j+n)$ . Sie teilt das ganze Vieleck in zwei Teilvielecke auf, das eine ist ein  $(n+1)$ -Eck, wie wir es uns gewünscht haben, und das andere hat weniger Seiten als das ursprüngliche Vieleck. Wir ersetzen nun in Gedanken den zu  $(j+1, j+2, \dots, j+n)$

gehörigen Teil unseres Klammersausdruckes durch ein einzelnes Symbol, zum Beispiel  $Z$ . Wir haben damit unseren Ausdruck effektiv auf einen kürzeren reduziert, der durch  $k - 1$  Anwendungen der  $n$ -ären Operation entstanden ist. Auf diese Art und Weise fahren wir induktiv fort, um in unserem Vieleck weitere Diagonalen einzuführen. Falls die Seitenzahlen  $i$  durch die Symbole  $s_i$  ersetzt werden, so liefert die Beschriftung der letzten (obersten) Seite genau den ursprünglichen Klammersausdruck. Figur 5(a, b) illustriert, wie für den entsprechenden Ausdruck der Figur 1(a', b') die Unterteilungen des Pentagons und des Hexagons zu beschriften sind.



a) Vieleck für  $(s_1((s_2s_3)s_4))$ ,  $n = 2$ ,  $k = 3$ .

b) Vieleck für  $(s_1s_2(s_3s_4s_5))$ ,  $n = 3$ ,  $k = 2$ .

Fig. 5 Unterteilungen von Vielecken und zugehörige Klammersausdrücke.

Offensichtlich können wir auch in der umgekehrten Richtung vorgehen. Wenn ein  $((n - 1)k + 2)$ -Eck gegeben ist, das durch  $k - 1$  Diagonalen in  $k$  disjunkte  $(n + 1)$ -Ecke unterteilt ist, so können wir auf diese Weise den dazugehörigen Ausdruck und damit natürlich auch den entsprechenden Baum erhalten. Wir werden bald sehen, wie man zu einem gegebenen Baum auch direkt ein unterteiltes Vieleck zuordnen kann.

Wir illustrieren diese Korrespondenzen noch einmal an dem folgenden Beispiel, das etwas komplizierter ist als das der Figur 5.

**Beispiel 1.1** Es sei  $n = 3$  und  $k = 4$ . Wir betrachten den Ausdruck

$$(s_1(s_2s_3(s_4(s_5s_6s_7)s_8))s_9) .$$

Die entsprechende Aufteilung des konvexen 10-Ecks durch 3 Diagonalen in 4-Ecke mit der entsprechenden Beschriftung ist in Figur 6 angegeben. Der entsprechende ternäre Baum ist in Figur 7 aufgezeichnet.

Wir diskutieren zuerst, wie wir vom (unbeschrifteten) unterteilten Vieleck zum dazugehörigen Ausdruck gelangen. Die Tatsache, dass das Vieleck in 4-Ecke aufgeteilt ist, sagt uns, dass wir eine ternäre Operationen zu betrachten haben. Wir lassen die oberste Seite des ursprünglichen 10-Ecks unbeschriftet und beschriften der Reihe nach im Gegenuhrzeigersinn die andern Seiten, angefangen von der Seite zur Linken der obersten, wie dies am Rand der Figur 6 angezeigt wird. Zur selben Zeit schreiben wir das ungeklammerte Wort  $s_1s_2s_3s_4s_5s_6s_7s_8s_9$ . Unser Ziel ist es jetzt, die oberste Seite des ursprünglichen 10-Ecks so zu beschriften, dass wir daraus den gesuchten Klammersausdruck ablesen können. Wir beginnen damit, dass wir auf dem Rand des Vielecks eine Stelle (es kann mehrere geben!) suchen, wo 3 aufeinanderfolgende Seiten durch eine Diagonale verbunden sind und so ein 4-Eck bilden. Wo dies geschieht (in unserem Fall längs der Seiten 5,

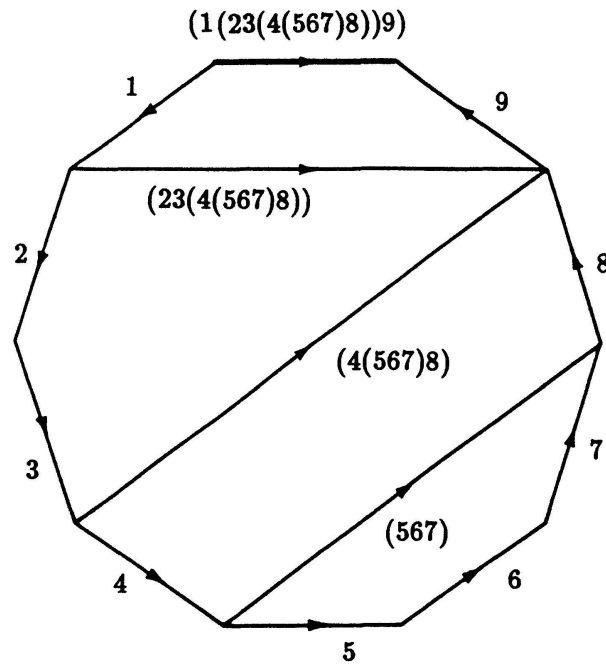


Fig. 6 Die beschriftete Unterteilung des Vielecks, welches dem Klammerausdruck  $(s_1(s_2s_3(s_4(s_5s_6s_7)s_8))s_9)$ , entspricht.

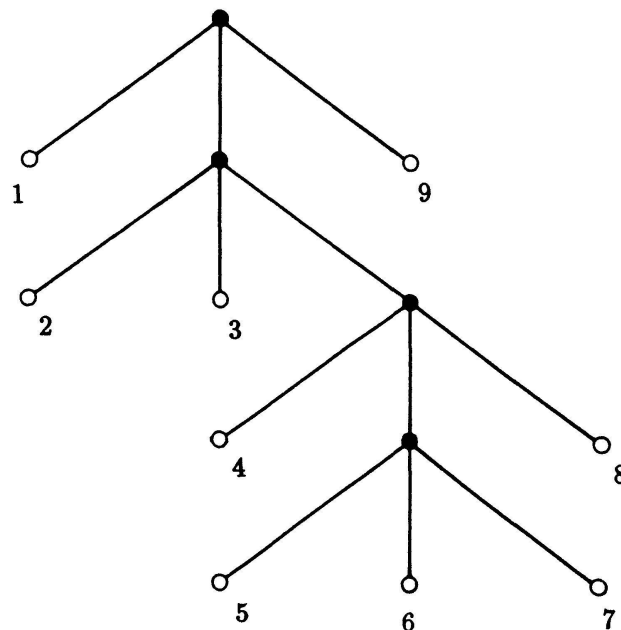


Fig. 7  $n = 3, k = 4$ . Der Baum, der zum Klammerausdruck  $(s_1(s_2s_3(s_4(s_5s_6s_7)s_8))s_9)$  gehört.

6 und 7) wird die Diagonale beschriftet (in unserem Fall mit (5, 6, 7)) und wird zur Seite eines neuen Vielecks, das zwei Seiten weniger besitzt als das ursprüngliche. Gleichzeitig setzen wir im Wort  $s_1s_2s_3s_4s_5s_6s_7s_8s_9$  Klammern um den Teilausdruck  $s_5s_6s_7$ . Wir sehen nun unser neues Vieleck als beschriftet an, wobei wir (5, 6, 7) als ein einzelnes Symbol auffassen; und analog fassen wir auch in unserem Wort den eingeklammerten Teil  $(s_5s_6s_7)$  als ein einzelnes Symbol auf. Jetzt können wir den eben beschriebenen Prozess wiederholen und wir fahren auf diese Art und Weise fort, bis auch die oberste Seite beschriftet und des Wort vollständig mit Klammern versehen ist. Wird nun in der

Beschriftung der obersten Seite jedes der Symbole  $i$  durch  $s_i$  ersetzt, so erhalten wir den gewünschten, dem unterteilten Vieleck entsprechenden Klammerausdruck.

Als nächstes überlegen wir uns, wie man das Baumdiagramm direkt aus dem unterteilten Vieleck erhalten kann, also ohne den Umweg über den entsprechenden Klammerausdruck einzuschlagen. Figur 8 liefert ein gutes Beispiel, um diesen Prozess zu illustrieren. Man

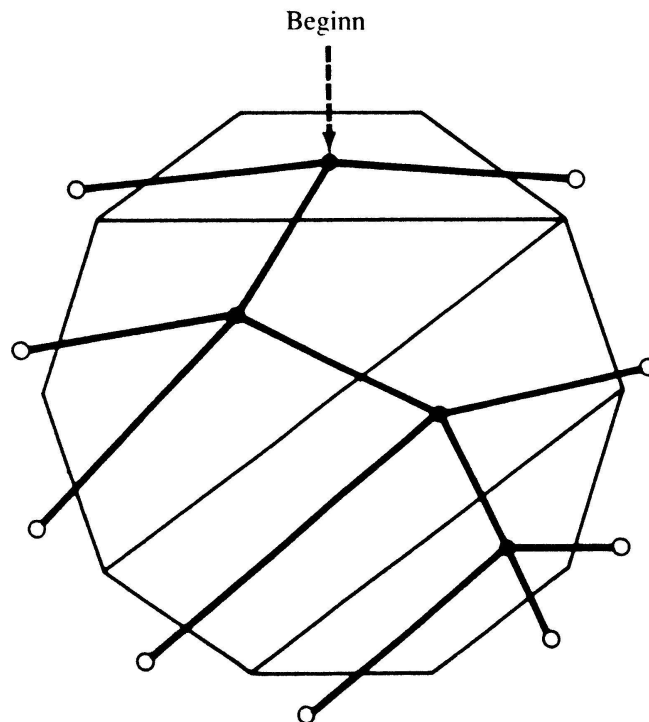


Fig. 8 Die Zuordnung eines unterteilten Vielecks zu einem Baum (der Baum der Figur 7 und das Vieleck der Figur 6). Beachte:  $\bullet$  = im Innern liegender Punkt = Verzweigungspunkt,  $\circ$  = Endpunkt.

beginnt, indem man an der obersten Seite des Vielecks in ein 4-Eck der Unterteilung hineingeht. Gleichzeitig zeichnen wir den Anfangspunkt des Baumes und zeichnen drei Äste, die von diesem Punkt ausgehen und die den 3 Seiten des 4-Ecks entsprechen. Falls ein Ast das 4-Eck durch eine der begrenzenden Seite des ursprünglichen Vielecks geht, dann ist der Endpunkt dieses Astes ein Endpunkt des Baumes (und braucht für das folgende nicht mehr beachtet zu werden). Wenn hingegen ein Ast das 4-Eck durch eine innere Diagonale verlässt, und damit in ein anderes 4-Eck der Zerlegung eintritt, dann ist der Endpunkt dieses Astes ein Verzweigungspunkt, von dem aus wiederum drei Äste ausgehen. Diese drei Äste entsprechen den drei anderen Seiten des 4-Ecks; usw.

Im Falle  $n = 2$  können die oben definierten Zahlen  $a_k, b_k, c_k$  wahlweise als Definition der *Catalan-Zahlen* genommen werden. Analog können wir  ${}_n a_k, {}_n b_k, {}_n c_k$  als Definition der *verallgemeinerten Catalan-Zahlen* betrachten. Es ist nun das folgende Resultat bekannt (siehe [K]):

### Theorem 1.2

$${}_n a_k = \frac{1}{k} \binom{nk}{k-1} = \frac{1}{(n-1)k+1} \binom{nk}{k}, \quad k \geq 1.$$

Der übliche Beweis dieses Resultates (siehe [K]), ist recht kompliziert und verwendet Argumente der Funktionentheorie. Es ist eines der Hauptziele dieses Beitrags, einen Beweis des Theorems 1.2 zu geben, der nur elementare Hilfsmittel der Algebra benötigt. Allerdings werden wir in diesem Beitrag das Theorem 1.2 nur für  $n = 2$  beweisen.<sup>2)</sup> Für unser Argument benötigen wir eine weitere, vierte Interpretation der verallgemeinerten Catalan-Zahlen. Dabei weisen wir mit besonderem Nachdruck auf die Flexibilität dieser vierten Interpretation hin, die wir jetzt beschreiben wollen.

## 2 Wege im ganzzahligen Gitter

Wir beginnen mit der Definition eines derartigen Weges. Ein *Weg* im ganzzahligen Gitter in der Koordinatenebene ist eine Folge von Punkten  $P_0, P_1, \dots, P_m$ ,  $m \geq 0$  in  $\mathbb{R}^2$ , wo jeder Punkt  $P_i$  ein Gitterpunkt ist, d.h. ganzzahlige Koordinaten besitzt, und wo  $P_{i+1}$  aus  $P_i$  erhalten wird, indem man eine Einheit nach rechts oder nach oben geht. Wir sagen, dass dieser Weg von  $P$  nach  $Q$  führt, falls  $P_0 = P$  und  $P_m = Q$  ist. Ein Weg heisst *n-gut*, falls er ganz unterhalb der Geraden  $y = (n-1)x$  verläuft, andernfalls heisst er *n-schlecht*.

Es sei  $d_k = {}_n d_k$  die Anzahl von *n*-guten Wegen von  $(0, -1)$  nach  $(k, (n-1)k - 1)$ . (Nach Konvention gilt  $d_0 = 1$ .) Wir erweitern die Aussage des Theorems 1.1 und beweisen

### Theorem 2.1

$${}_n a_k = {}_n b_k = {}_n c_k = {}_n d_k.$$

*Beweis* Wir zeigen  ${}_n b_k = {}_n d_k$ , wobei wir offenbar  $k \geq 1$  annehmen können. Wir gehen von einem Klammerausdruck aus, der durch  $k$ -malige Anwendung einer *n*-ären Operation auf eine Folge von  $(n-1)k + 1$  Symbolen erhalten worden ist. Für die Zwecke des Beweises arbeiten wir mit dem 'Ausdruck', der daraus erhalten wird, wenn man alle schliessenden Klammern weglässt. Indem wir von links her lesen, interpretieren wir eine öffnende Klammer als einen Befehl "Geh' einen Schritt nach rechts" und ein Symbol als einen Befehl "Geh' einen Schritt nach oben". Wenn wir unsern Weg in  $(0, -1)$  beginnen lassen, definiert somit jeder Arbeitsausdruck einen Weg von  $(0, -1)$  nach  $(k, (n-1)k)$ , da es  $k$  öffnende Klammern und  $(n-1)k + 1$  Symbole gibt. Wir behaupten nun:

- (i) der zweitletzte Punkt des Weges ist  $(k, (n-1)k - 1)$ ,

und

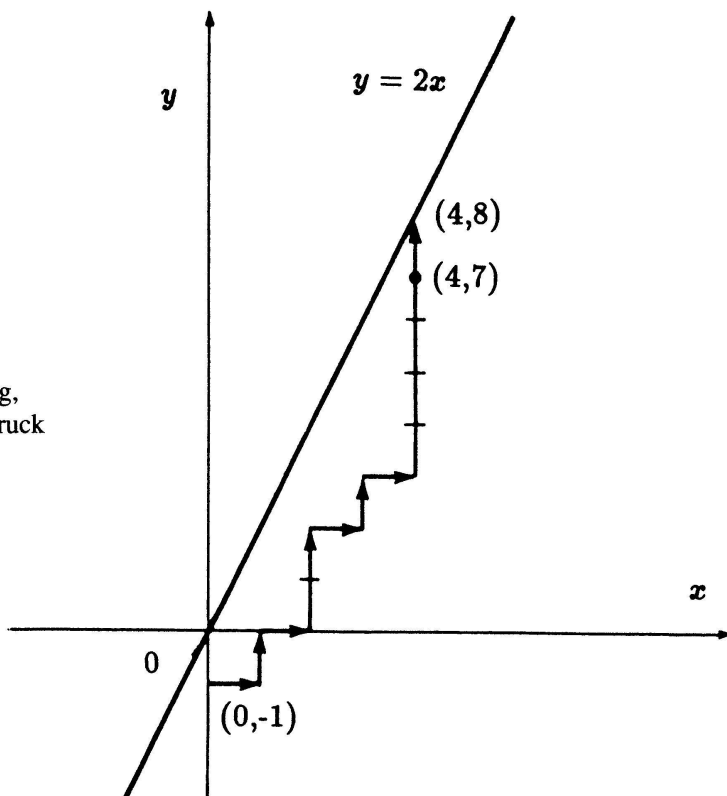
- (ii) der Teilweg von  $(0, -1)$  nach  $(k, (n-1)k - 1)$  ist *n-gut*.

Der Weg, der sich durch die Anwendung der obigen Regeln aus dem Beispiel 1.1 ergibt, ist in Figur 9 ersichtlich.

---

2) Leser, die am Beweis für Theorem 1.2 im allgemeinen Fall interessiert sind, mögen den Beitrag [HP 1,2] zu Rate ziehen.

Fig. 9  $n = 3, k = 4$ . Der Gitterweg, welcher dem Klammerausdruck  $(s_1(s_2s_3(s_4(s_5s_6s_7)s_8))s_9)$  zugeordnet ist.



Um (i) zu beweisen, brauchen wir nur zu beachten, dass unser (Arbeits-)‘Ausdruck’ nicht mit einer öffnenden Klammer enden kann. Um (ii) zu beweisen, machen wir die Induktionsvoraussetzung (bezüglich  $k$ ), die folgendes besagt: Wenn wir bis zu irgendeiner (mit Ausnahme der letzten) Stelle des (Arbeits-)‘Ausdruckes’ (von links her)  $u_i$  Klammern und  $v_i$  Symbole gezählt haben, so dass unser Weg den Punkt  $(u_i, v_i - 1)$  erreicht hat, dann gilt  $(n - 1)u_i \geq v_i$ , d.h. der Punkt liegt unterhalb der Geraden  $y = (n - 1)x$ . Die Induktionsvoraussetzung ist offensichtlich wahr für  $k = 1$ , so dass wir  $k \geq 2$  annehmen können. Ähnlich wie im Argument nach Theorem 1.1 wollen wir einen Abschnitt unseres ‘Ausdrucks’ suchen, der aus einer öffnenden Klammer gefolgt von  $n$  Symbolen besteht. Indem wir diese durch ein einzelnes Symbol ersetzen, erhalten wir einen ‘Ausdruck’ für  $k - 1$  Anwendungen der  $n$ -ären Operation. Es sei nun  $u'_i$  und  $v'_i$  in analoger Weise für diesen kürzeren ‘Ausdruck’ definiert wie  $u_i$  und  $v_i$ . Nach unserer Induktionsvoraussetzung gilt dann  $(n - 1)u'_i \geq v'_i$  (natürlich mit Ausnahme des letzten Schrittes). Für jeden Index  $i$ , welcher dem ausgewählten Abschnitt vorangeht, gilt dann offensichtlich  $(n - 1)u_i \geq v_i$ . Führen wir das neue Symbol ein, so schliessen wir für den Index  $i_0$ , welcher dem ausgewählten Abschnitt unmittelbar vorangeht,  $(n - 1)u_{i_0} \geq v_{i_0} + 1$ . Wenn wir nun den ausgewählten Abschnitt wiederherstellen, haben wir somit die Beziehungen  $u_{i_1} = u_{i_0} + 1$ ,  $v_{i_1} = v_{i_0} + n$ , so dass für  $i_1$  folgt  $(n - 1)u_{i_1} \geq v_{i_1}$ . Indem wir schliesslich einen Index  $i$  jenseits des ausgewählten Abschnittes betrachten (aber immer noch vor dem letzten Schritt), so haben wir  $u_i = u'_i + 1$ ,  $v_i = v'_i + n - 1$ , so dass wiederum folgt  $(n - 1)u_i \geq v_i$ . Daraus ergibt sich, dass wir (mit Ausnahme des letzten Schrittes) einen  $n$ -guten Weg von  $(0, -1)$  nach  $(k, (n - 1)k - 1)$  erhalten.

Wir überlassen es dem Leser, zu beweisen, dass umgekehrt ein  $n$ -guter Weg zu einem Klammerausdruck Anlass gibt. Ähnlich wie oben wird dies natürlich ein induktives Argument verlangen.



Für  $n = 2$  ist die Folge der Zahlen, die durch eine der vier gegebenen Definitionen erhalten wird, die Folge der Catalan-Zahlen  $C_k$ ; insbesondere gilt

$${}_2a_k = {}_2b_k = {}_2c_k = {}_2d_k = C_k .$$

Die Zahlen  ${}_na_k (= {}_nb_k = {}_nc_k = {}_nd_k)$  werden üblicherweise verallgemeinerte Catalan-Zahlen (siehe [HP 1,2]) genannt. Im nächsten Abschnitt wollen wir nun eine explizite Formel für  $C_k$  angeben; wir beschränken uns also ganz auf den Fall  $n = 2$ .

### 3 Berechnung der Catalan-Zahlen ( $n = 2$ ); die Spiegelungsmethode von André

Vor etwas mehr als 100 Jahren hat Désiré André, ein französischer Mathematiker, eine kurze Notiz in der angesehenen französischen Zeitschrift *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris* [A] veröffentlicht, die den Titel "Solution directe du problème résolu par M. Bertrand" trägt. Dieses Problem ist später unter dem Namen Abstimmungsproblem bekannt geworden, welches wir jetzt beschreiben und lösen wollen, indem wir eine Variante der Methode von André benützen. Zuerst allerdings wollen wir die Methode von André anwenden, um  ${}_2d_k$  zu berechnen, d.h. wir wollen die 2-guten Wege von  $(0, -1)$  nach  $(k, k - 1)$  abzählen.

Nach unserer Definition in Abschnitt 2 musste André für gegebene Punkte  $(a, b) = P$  und  $(c, d) = Q$  mit  $b < a \leq d < c$  die Anzahl  $n$ -guter Wege im ganzzahligen Gitter von  $P$  nach  $Q$  bestimmen, d.h. derjenigen, die ganz unterhalb der Geraden  $y = x$  verlaufen. Andrés Lösung dieses Problems ist wunderschön und stellt heute eines der Standardwerkzeuge der Kombinatorik dar (siehe z.B. Comtet [C]). Wir wollen sie jetzt beschreiben. Da wir in diesem ganzen Abschnitt  $n = 2$  annehmen, werden wir in unserer Notation die Angabe von  $n$  unterdrücken.

Als erstes beachten wir, dass die totale Anzahl der Wege, gute und schlechte, von  $P$  nach  $Q$  durch den Binomialkoeffizienten

$$\binom{(c+d)-(a+b)}{d-b}$$

oder, was auf dasselbe herauskommt, durch

$$\binom{(c+d)-(a+b)}{c-a}$$

beschrieben wird. Es genügt deshalb, die schlechten Wege zu zählen. Falls  $\mathcal{P}$  ein schlechter Weg ist, dann hat dieser Weg einen gemeinsamen Punkt mit der Geraden  $y = x$ . Es sei  $F$  der erste solche gemeinsame Punkt. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{P}_1$  und  $\mathcal{P}_2$  die Teilwege, die von  $P$  nach  $F$  und von  $F$  nach  $Q$  führen. Dann können wir  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$  schreiben,

wenn wir die rechte Seite als Zusammensetzung von Wegen interpretieren. Nun sei  $\bar{\mathcal{P}}_1$  der Weg, der aus  $\mathcal{P}_1$  durch Spiegelung an der Geraden  $y = x$  erhalten wird. Dann ist  $\mathcal{P}^* = \bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}_2$  ein Weg von  $\bar{P}(b, a)$  nach  $Q(c, d)$ . Die Zuordnung  $\mathcal{P} \mapsto \bar{\mathcal{P}}$  beschreibt eine eindeutige Korrespondenz zwischen der Menge der schlechten Wege von  $P$  nach  $Q$  und der Menge aller Wege von  $\bar{P}$  nach  $Q$ . Es folgt daraus, dass die totale Anzahl der schlechten Wege von  $P$  nach  $Q$  gegeben ist durch den Binomialkoeffizienten

$$\binom{(c+d)-(a+b)}{c-b}$$

oder, was dasselbe ist, durch

$$\binom{(c+d)-(a+b)}{d-a}.$$

Es wird nun klar, dass es zum mindesten vier anscheinend verschiedene (aber in Wirklichkeit identische) Arten gibt, einen expliziten Ausdruck für die Anzahl guter Wege von  $P$  nach  $Q$  anzugeben. Im Hinblick auf die Catalan-Zahlen, für die sich der Ausdruck dann wesentlich vereinfacht, wollen wir die Anzahl guter Wege von  $P(a, b)$  nach  $Q(c, d)$  durch die Formel

$$(3.1) \quad \binom{(c+d)-(a+b)}{d-b} - \binom{(c+d)-(a+b)}{d-a}$$

beschreiben. Das zugehörige Argument wird in Figur 10 illustriert, wo der Teilweg von Anzahl aller Wege – Anzahl schlechter Wege = Anzahl guter Wege =

$$= \binom{(c+d)-(a+b)}{d-b} - \binom{(c+d)-(a+b)}{d-a}$$

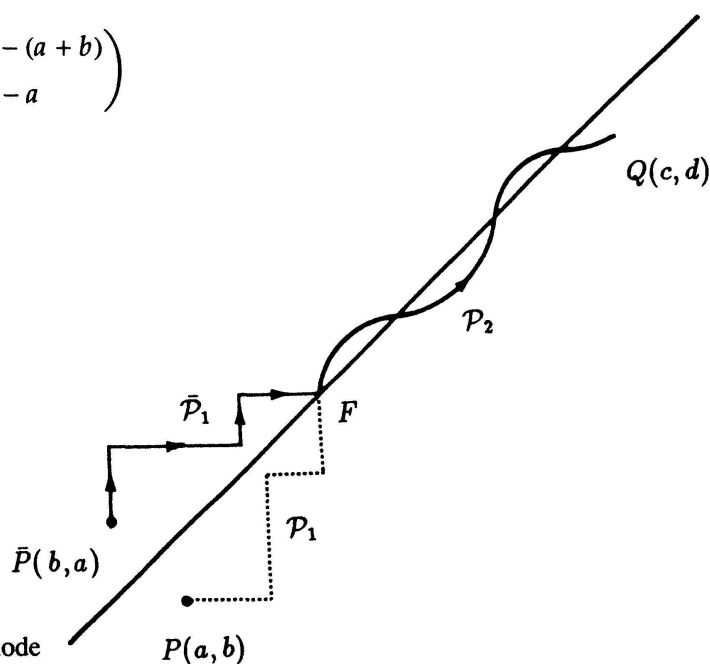


Fig. 10 Andrés Spiegelungsmethode

$F$  nach  $Q$  als Wellenlinie eingezeichnet ist, um irgendeinen Weg (in unserem eingeschränkten Sinn) von  $F$  nach  $Q$  anzudeuten.

In dem Spezialfall, der uns interessiert, liefert eine Anwendung von (3.1), dass die Zahl  $C_k$  guter Wege von  $P(0, -1)$  nach  $Q(k, k - 1)$  durch

$$(3.2) \quad C_k = \binom{2k}{k} - \binom{2k}{k-1} = \binom{2k}{k-1} \left[ \frac{k+1}{k} - 1 \right] = \frac{1}{k} \binom{2k}{k-1}, \quad k \geq 1,$$

gegeben ist. Im nächsten Abschnitt werden wir nun die Formel (3.1) und das Prinzip von André benutzen, um das berühmte Abstimmungsproblem zu lösen.

#### 4 Das Abstimmungsproblem

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts hat das sogenannte Abstimmungsproblem viele Mathematiker und besonders die Wahrscheinlichkeitstheoretiker beschäftigt. Wir nehmen an, dass eine Wahl mit zwei Kandidaten  $X$  und  $Y$  abgehalten wird und wir nehmen weiter an, dass  $X$   $a$  Stimmen erhält und  $Y$   $b$  Stimmen. Dabei gelte  $a > b$ , so dass  $X$  die Wahl gewinnt. Wir betrachten nun die folgende Frage:

Was ist die Wahrscheinlichkeit  $p$  dafür, dass während der ganzen Auszählung der Stimmen der Kandidat  $X$  mehr Stimmen aufzuweisen hat als  $Y$ ?

Natürlich übersetzt sich dieses Problem leicht in eine Frage über Wege in einem ganzzahligen Gitter in der Koordinatenebene. Jeder Weg von  $(0, 0)$  nach  $(a, b)$  stellt eine mögliche Auszählung der Stimmen dar. Es gibt offensichtlich

$$(4.1) \quad \binom{a+b}{a}$$

solche Wege. Wir wollen eine Auszählung *günstig* nennen, bei der  $X$  immer mehr Stimmen aufzuweisen hat als  $Y$ . Es ist klar, dass eine günstige Auszählung einem guten Weg entspricht (mit Ausnahme des Anfangspunktes  $(0, 0)$ ). Wir müssen deshalb nur die Anzahl dieser guten Wege bestimmen.

Man beachte, dass in einer günstigen Auszählung der Kandidat  $X$  die erste Stimme erhalten muss. Der entsprechende Weg führt deshalb im ersten Schritt von  $(0, 0)$  nach  $(1, 0)$ . Unser Problem besteht somit einfach darin, die Anzahl guter Wege von  $(1, 0)$  nach  $(a, b)$  zu bestimmen. Nach unseren früheren Überlegungen ist die Anzahl solcher Wege durch die Formel

$$(4.2) \quad \binom{a+b-1}{b} - \binom{a+b-1}{b-1} = \frac{(a+b-1)!}{a! b!} (a-b)$$

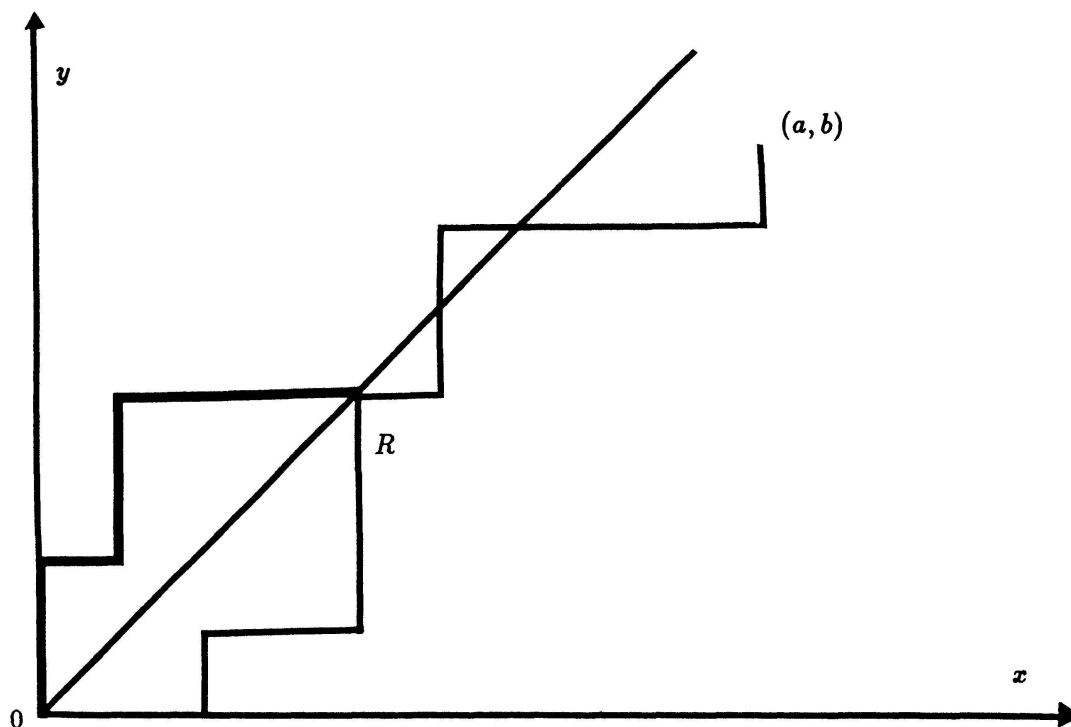
gegeben. Um die in unserem Abstimmungsproblem gesuchte Wahrscheinlichkeit  $p$  zu berechnen, müssen wir einfach (4.2) durch (4.1) dividieren, und wir erhalten

$$(4.3) \quad p = \frac{a-b}{a+b}.$$

Dieses erstaunlich einfache Resultat zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit  $p$  nur vom Verhältnis  $a/b$  abhängt und nicht von der totalen Anzahl der Stimmen. Diese Tatsache



jeder Weg, der mit einem Schritt nach oben beginnt, einem notwendigerweise schlechten Weg entspricht, der mit einem Schritt nach rechts beginnt. Diese eindeutige Beziehung zwischen Wegen, die mit einem Schritt nach oben beginnen, und schlechten Wegen, die mit einem Schritt nach rechts beginnen, wird erhalten, indem man den Teilweg von  $O$  nach  $R$  an der Geraden  $y = x$  spiegelt und den ursprünglichen Teilweg von  $R$  nach  $(a, b)$  beibehält (siehe Figur 12). Es folgt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Weg mit



**Fig. 12 Die André Spiegelung eines schlechten Weges.**

einem Schritt nach rechts beginnt, und schlecht ist, gerade gleich der Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass ein Weg mit einem Schritt nach oben beginnt, nämlich  $p_O$ . Damit erhalten wir, in Übereinstimmung mit unserem früheren Resultat:

$$\begin{aligned} p &= p(\text{guter Weg}) \\ &= p(\text{Weg beginnt mit einem Schritt nach rechts und ist gut}) , \\ &= p(\text{Weg beginnt mit einem Schritt nach rechts}) - \\ &\quad - p(\text{Weg beginnt mit einem Schritt nach rechts und ist schlecht}) \\ &= p_R - p_O \\ &= \frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b} \\ &= \frac{a-b}{a+b} . \end{aligned}$$

Wie wir bereits bemerkt haben, hängt die gesuchte Wahrscheinlichkeit nur vom Verhältnis  $a / b$  ab, z.B. ist die Wahrscheinlichkeit die gleiche, ob  $X$  80 Stimmen erhält und  $Y$  40, oder ob  $X$  800 Stimmen erhält und  $Y$  400. Allerdings folgt aus dieser Tatsache

nicht, dass die Wahrscheinlichkeit die gleiche bleibt, wenn die Stimmen in Gruppen von, sagen wir 10, aufgeteilt werden, bevor sie ausgezählt werden. Zum Beispiel ist im extremen Fall, wo sämtliche Stimmen in *einer* Gruppe zusammengefasst werden, die Wahrscheinlichkeit ganz einfach 1! Es gibt also im Anschluss an unsere Lösung des Abstimmungsproblems weitere interessante Fragen in diesem Gebiet.

### Literaturverzeichnis

- [A] D. André: Solution directe du problème résolu par M. Bertrand, Comptes Rendus 105 (1887), 436–437.
- [C] Comtet, L.: “Advanced Combinatorics”, D. Reidel Publishing Co, Netherlands, 1974.
- [HAG] A.P. Hillman, G.L. Alexanderson and R.M. Grassl: “Discrete and Combinatorial Mathematics”, Dellen/Macmillan, 1987.
- [HP1] Peter Hilton, and Jean Pedersen: Catalan numbers and their uses, in “Supplement to the Handbook of Applicable Mathematics”, John Wiley and Sons, Chichester (1990), 93–115.
- [HP2] Peter Hilton, and Jean Pedersen: Catalan numbers, their generalizations and their uses, Mathematical Intelligencer 13 (1991), 64–75.
- [K] David A. Klarner: Correspondences between Plane Trees and Binary Sequences, J. of Comb. Theory 9 (1970), 401–411.
- [S] N.J.A. Sloane, “A Handbook of Integer Sequences”, Academic Press, New York and London (1973).

### Acknowledgment

The authors wish to thank Professor Dr. U. Stambach for the care he has given to their article, especially his masterly translation.

Peter J. Hilton  
Department of Mathematical Sciences  
State University of New York  
P.O. Box 6000  
Binghamton, NY 13902-6000

Jean Pedersen  
Department of Mathematics  
Santa Clara University  
Santa Clara, CA 95053