

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 47 (1992)

**Rubrik:** Bücher und Computersoftware

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

---

## Bücher und Computersoftware

---

---

**S.Gallot, D.Hulin and J.Lafontaine, Riemannian Geometry, 2nd ed., Springer Verlag (Universitext) 1990, 284 pp., Softcover DM 48.–, ISBN 3-540-52401-0**

Die Riemannsche Geometrie ist im 19. Jahrhundert vor allem aus der Untersuchung von Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum  $R^3$  hervorgegangen. Die Tangentialebene  $T_pM$  an eine solche Fläche  $M$  in einem beliebigen Punkt  $p$  kann mit einem zweidimensionalen Unterraum des  $R^3$  identifiziert werden und trägt daher ein Skalarprodukt, also eine euklidische Struktur. Die Längen von auf der Fläche verlaufenden Kurven, und damit auch über die Fläche gemessene Abstände, lassen sich allein mit Hilfe dieser Familie von Skalarprodukten berechnen. Man erhält eine Krümmungsgrösse, die beschreibt, wie rasch der Umfang eines Abstandskreises auf  $M$  mit dessen Radius gegen Null konvergiert, die folglich allein durch Messungen in der Fläche definiert ist. Es erweist sich als günstig, diese "innere" Geometrie der Flächen vom Aspekt ihrer Einbettung in den  $R^3$  zu trennen, und indem man die Beschränkung auf die Dimensionszahl zwei fallen lässt, definiert man eine Riemannsche Mannigfaltigkeit als eine differenzierbare Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Riemannschen Metrik, also einer Familie von Skalarprodukten — eines für jeden Tangentialraum  $T_pM$ , und differenzierbar abhängig vom Punkt  $p$ . Die Riemannsche Metrik ermöglicht es, Eigenschaften von  $M$  und von auf  $M$  definierten Objekten zu quantifizieren, wie man es vom euklidischen Raum her gewohnt ist. Es ist daher nicht verwunderlich, dass die Grundbegriffe der Riemannschen Geometrie in weiten Bereichen der Mathematik verwendet werden. Dennoch besteht kein Überfluss an Lehrbüchern dieses Gebietes.

Traditionelle Einführungen in die Riemannsche Geometrie (wie zum Beispiel [L]) folgen in etwa der historischen Entwicklung und beginnen mit einer Einführung in die Theorie der Flächen im  $R^3$ . Das hat bei geeigneter Darstellungsweise den Vorteil, dass allgemeine Begriffe zunächst in einer weniger komplizierten und der unmittelbaren Anschauung zugänglichen Situation eingeführt und motiviert werden, ganz abgesehen davon, dass dieser Zweig der Differentialgeometrie selbst nach wie vor eine Fülle interessanter offener Fragen bietet. Andererseits kann man formalen Aufwand sparen und erzielt einen Gewinn an konzeptioneller Klarheit, wenn man sofort allgemeine differenzierbare und Riemannsche Mannigfaltigkeiten behandelt und die klassische Flächentheorie als eine von mehreren reichhaltigen Quellen interessanter Beispiele benutzt. Die Autoren des vorliegenden Buches haben diesen zweiten Weg gewählt.

Einige Vorkenntnisse über differenzierbare Mannigfaltigkeiten werden vorausgesetzt, das erste Kapitel enthält aber in knapper Form das im folgenden Benötigte, wobei für Einzelheiten auf die ausgezeichneten Bücher [W] und [S], Band 1 verwiesen wird. Im zweiten und der ersten Hälfte des dritten Kapitels werden die Grundlagen der Riemannschen Geometrie entwickelt: Riemannsche Metriken, kovariante Ableitung, Geodätische, Krümmungstensor, Jacobifelder und Räume konstanter Krümmung. Die Darstellung enthält dabei mehr Beispiele als vergleichbare Texte. Die grundlegenden Rauchschen Vergleichssätze werden nicht behandelt, auf Jacobifeldabschätzungen beruhende Vergleichsmethoden werden aber anhand von Volumenabschätzungen illustriert. Die zweite Hälfte des dritten Kapitels behandelt eine Reihe von Einzelfragen und Sätze über Krümmung und Topologie Riemannscher Mannigfaltigkeiten. In der zweiten Auflage ist dieses Kapitel um je einen Abschnitt über zweidimensionale hyperbolische Geometrie und konforme Geometrie erweitert worden. Das vierte Kapitel gibt unter dem sehr allgemein gewählten Titel "Analysis on manifolds and the Ricci curvature" auf 35 Seiten eine Einführung in die Geometrie des Laplaceoperators auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Die Untersuchung der Beziehungen zwischen dem Spektrum dieses Operators und der Geometrie der Mannigfaltigkeit ist eines der am weitesten entwickelten Gebiete der sogenannten globalen Analysis. Im Anschluss an dieses Kapitel sollte der Übersichtsartikel [G] zugänglich sein, für eine etwas breitere Sicht der Analysis auf Mannigfaltigkeiten sei etwa auf [A] verwiesen. Das abschliessende fünfte Kapitel behandelt auf nur fünfzehn Seiten Hyperflächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, insbesondere Flächen im  $R^3$ , sowie Minimalflächen.

Das Buch ist aus Vorlesungsausarbeitungen hervorgegangen und hat in vieler Hinsicht den Charakter einer solchen Ausarbeitung behalten. Es handelt sich um "Lecture Notes", nicht um ein über Jahre hinweg gewachsenes und sorgfältig konstruiertes Lehrbuch. Die Darstellung gewinnt durch eingestreute Beispiele, Anmerkungen und weiterführende Literaturhinweise. Der Stil ist häufig zugleich knapp und informell, was dem an Einzelheiten interessierten Leser bisweilen Schwierigkeiten bereiten dürfte. Sprachliche Mängel und gelegentlich auftretende missverständliche Formulierungen sind in der zweiten Auflage nicht beseitigt worden. Das Buch ist nicht ganz frei von inhaltlichen Fehlern (S.153, Zeile 19f). Dem fortgeschrittenen Studenten und dem mit der Differentialgeometrie nicht vertrauten Mathematiker kann es aber als rasche und technisch nicht überladene Einführung in interessante Themen der Riemannschen Geometrie dienen, von denen manche in der übrigen Lehrbuchliteratur nur schwer zu finden sind.

Einige Hinweise auf diese Literatur sind vielleicht von Nutzen. [K-N] ist das Standard- und Nachschlagewerk zur Differentialgeometrie und behandelt die Riemannsche Geometrie in einem allgemeineren Kontext, gilt aber als für den Anfänger schwierig. [S] ist ein fünfbändiges, ausführliches und daher leicht lesbares Lehrbuch mit Schwerpunkt auf der Riemannschen Geometrie. [G-K-M], [C-E] und [C] betonen Jacobifeldmethoden und dringen bis zu tieferliegenden Resultaten der globalen Riemannschen Geometrie vor. Von diesen drei Werken ist das letzte wohl das am einfachsten lesbare. Es hat bereits in seiner 1979 erschienenen portugiesischen Originalversion weite Verbreitung gefunden. [K] umfasst im wesentlichen den Stoff der drei letztgenannten Bücher und enthält darüber hinaus ein langes Kapitel über den geodätischen Fluss. Da von Beginn an unendlichdimensionale Mannigfaltigkeiten zugelassen werden, gilt es, vielleicht zu Unrecht, als etwas schwierige Lektüre. [B] setzt Kenntnisse der Riemannschen Geometrie voraus und ist scheinbar ein Buch über ein spezielles Thema, enthält aber eine Fülle von Informationen von allgemeinerem Interesse. Als eine rasche Einführung für den, der nur das Wichtigste über Riemannsche Mannigfaltigkeiten wissen will, sei das zweite Kapitel von [M] erwähnt.

- [A] T.Aubin, *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*, Springer-Verlag, Berlin u.a. 1982
- [B] A.Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, Berlin u.a. 1987
- [C] M. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Basel 1991
- [C-E] J.Cheeger, D.Ebin, *Comparison theorems in Riemannian Geometry*, North Holland Publishing Company, Amsterdam und Oxford, 1975
- [G] S.Gallot, *Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes*, Astérisque 163-164 (1988), 33-91
- [G-K-M] D.Gromoll, W.Klingenberg, W.Meyer, *Riemannsche Geometrie im Grossen*, 2.Auflage, Springer-Verlag, Berlin u.a. 1975
- [K] W.Klingenberg, *Riemannian Geometry*, de Gruyter, Berlin 1982
- [K-N] S.Kobayashi, K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, 2 Bände, John Wiley & Sons, New York 1963, 1969
- [L] D.Laugwitz, *Differentialgeometrie*, 3.Auflage, Teubner, Stuttgart 1977
- [M] J.Milnor, *Morse Theory*, 2.Auflage, Princeton University Press, Princeton 1969
- [S] M.Spivac, *A comprehensive introduction to Differential Geometry*, 5 Bände, 2.Auflage, Publish or Perish, Wilmington, Delaware 1979
- [W] F.Warner, *Foundations of differential manifolds and Lie groups*, 2.Auflage, Springer-Verlag, Berlin u.a. 1983  
Patrick Ghanaat, Basel

**Michael Monastyrsky: Riemann, Topology, and Physics. With a foreword by Freeman J. Dyson.** Translated from the Russian by James King and Victoria King. Edited by R.O. Wells, Jr. Birkhäuser Verlag, Boston/Basel/Stuttgart, 1987. xiii, 158 S. ISBN 0-8176-3262-X.

Der vorliegende Band enthält eine englische Übersetzung von Monastyrskys Riemann-Biographie und seiner Abhandlung über topologische Themen in der modernen Physik. Wie der Autor in der Einleitung betont, sind die beiden, vom Birkhäuser Verlag aus editionstechnischen Gründen zu einem Band vereinigten Abhandlungen völlig unabhängig voneinander entstanden; sie können damit ohne weiteres auch einzeln gelesen oder rezensiert werden. Die erste versprach eine dringend benötigte, höchst wünschenswerte Ergänzung zur Biographie Riemanns zu geben, weshalb sie hier ausführlich besprochen werden soll; für die zweite verweise ich aus Platzgründen auf die bereits erschienenen Rezensionen in MR 88d:01023 und Zbl. 626.01033.

Seit dem Erscheinen von Richard Dedekinds meisterhaftem, leider aber etwas knappen Riemannschen Lebenslauf (Riemann, Gesammelte Werke, 2. Auflage, S. 539–558) ist neben den in Mathematiker-Kreisen kaum bekannten Aufsätzen von Ernst Schering (Schering, Gesammelte Werke, Bd. 2, S. 161–168, 367–383, usw.) bisher nur wenig Eigenständiges und Umfassendes zu Riemanns Biographie erschienen. Scherings Aufsätze sind vor kurzem in der von R. Narasimhan herausgegebenen erweiterten Nachdruck-Ausgabe von Riemanns Gesammelten Werken (Springer/Teubner 1990) beinahe vollständig wieder abgedruckt worden und stehen damit endlich an unübersehbarer Stelle einem breiteren mathematischen Publikum zur Verfügung. Trotzdem sind zahlreiche wichtige Dokumente zu Riemanns Leben und Werk noch immer unedierte, so dass es sehr zu wünschen wäre, wenn endlich eine kritische und umfassende Biographie und Quellensammlung zu Riemann erarbeitet würde.

Leider erfüllt das hier zu besprechende Werk derartige Wünsche nur zum Teil. Es enthält zwar manche mathematisch anregende Interpretation von Riemanns Gedanken, stützt sich aber in biographischer Hinsicht fast ausnahmslos auf die alten, bekannten Publikationen von Dedekind und Felix Klein, ohne Schering und zahlreiche andere neuere Arbeiten auch nur mit einem Wort zu würdigen. Hinzu kommt, dass durch die Übersetzung der Quellen ins und aus dem Russischen zahlreiche Aussagen falsch oder ungenau geworden sind. Beginnen wir zunächst mit einigen typischen, exemplarisch vorgestellten Mängeln. Auf S. 8 behauptet der Autor zum Beispiel, dass im neugegründeten mathematisch-physikalischen Seminar an der Universität Göttingen neben mathematischen und physikalischen Werken auch philosophische Schriften behandelt wurden und dass Riemanns Interesse an Herbart auf diese Zeit zurückgehe. Dies ist eine vereinfachende fehlerhafte Verschmelzung von Angaben aus Dedekinds Lebenslauf: Wie eine sorgfältige Analyse zeigt, besuchte Riemann im Herbst 1850 neben dem mathematisch-physikalischen auch das pädagogische Seminar bei K.F. Hermann und es war gemäss Dedekind in dem letzteren, wo sich die ersten Keime von Riemanns naturphilosophischen Ideen offenbarten (vgl. Riemann, Gesammelte Werke, 2. Auflage, S. 545). Riemanns detaillierteres Studium von Herbarts Schriften dürfte allerdings erst im Sommer 1853 begonnen haben, als er mit seinem Lüneburger Studienfreund August Ritter wieder in näheren Kontakt kam, wie man der Liste seiner Buchentlehnungen aus der Universitätsbibliothek Göttingen entnehmen kann. Auf S. 21 unten behauptet Monastyrsky, dass sich zwei der drei Themen, die Riemann der Fakultät für den Habilitationsvortrag einreichte, mit seinen Untersuchungen zur Elektrizitätslehre befasst haben sollen. Dies ist rundweg falsch: Wie man den Fakultätsakten entnehmen kann, schlug Riemann neben dem von Gauss ausgewählten berühmten geometrischen Thema “Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen”, die nachfolgenden zwei mathematischen (und nicht physikalischen) Themen vor: “Geschichte der Frage über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe” und “Über die Auflösung zweier Gleichungen zweiten Grades mit zwei unbekanntem Größen”.

Daneben findet man zahlreiche weitere, teils geringfügigere Unstimmigkeiten, bzw. Übersetzungs- oder Druckfehler, die hier in seitenmässiger Reihenfolge bloss aufgelistet werden sollen: Riemanns Mutter starb als er 16 Jahre alt war und nicht 20, wie Monastyrsky (S. 3 Mitte) behauptet. Riemann immatrikulierte sich in Göttingen nicht als Student der Theologie (S. 5), sondern als solcher der Philologie und Theologie. Die auf S. 18 gegebene Beschreibung der Habilitationsschrift als “competitive composition [...], which was presented as a small course of lectures on any special branch of knowledge” ist unzureichend. Dabei wird in diesem Zusammenhang, wie auch an mehreren weiteren Stellen, in der Übersetzung stets vom “University Council” statt von der “Philosophischen Fakultät” gesprochen. Riemanns berühmtes Beispiel einer zwischen je zwei noch so engen Grenzen unendlich oft unstetigen, aber dennoch integrierbaren Funktion wird von Riemann (Gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 242) durch den Ausdruck  $\sum_1^{\infty} \frac{(nx)}{nn}$  definiert und nicht durch  $R(x) = \frac{1}{q}$  für  $x$  rational von der Form  $\frac{p}{q}$ , und  $= 0$  für  $x$  irrational, wie Monastyrsky (S. 20 unten) behauptet. Die von Dedekind postum publizierte Fassung des Riemannschen Habilitationsvortrags wurde von Riemann selbst redigiert und nicht von Dedekind, wie dies Monastyrskys Darstellung (S. 28 Mitte) nahelegt. Riemanns fortgeschrittenere Vorlesungen zur Funktionentheorie aus den späteren Jahren (v.a. 1858ff., nicht WS 1855/56) wurden von M. Noether und W. Wirtinger (nicht Dedekind und Weber) in den “Nachträgen” zu den Gesammelten Werken publiziert (Der vorliegende englische Text auf S. 33 Mitte ist völlig verdorben.). Auf S. 62 und im Index sollte es “Sartorius” statt “Santorius (von Waltershausen)” heissen usw.

Selbstverständlich ist sich der Rezensent bewusst, welchen enormen, finanziell kaum verantwortbaren Zeitaufwand eine sachlich einwandfreie Übersetzung verlangt, und er kann auch verstehen, dass sich der Verlag die Gelegenheit nicht entgehen lassen wollte, hier erstmals eine umfangreichere, anregend geschriebene englischsprachige Riemann-Biographie vorzulegen. Andererseits ist es gerade deshalb besonders schade, dass dies nicht mit etwas mehr Sorgfalt geschehen ist.

E. Neuenschwander, Zürich

**Wurzel, Zeitschrift für Mathematik.** 26. Jahrgang 1992. Erscheint monatlich. Heftumfang ca. 24 Seiten A5. Einzelheft DM 1,00. Vierteljahresabonnement DM 3,00. Herausgeber: Wurzel, Verein zur Förderung der Mathematik an Schulen und Universitäten. FSU Jena. ISSN: 0232-4539

Das Zielpublikum dieser in bescheidener Aufmachung herausgegebenen Zeitschrift sind Gymnasiallehrer und in der Lehrerbildung Tätige, welche an Informationen über die mathematische Schullandschaft in der Bundesrepublik interessiert sind. Die Zeitschrift enthält neben Berichten über Tagungen, Kurse und Mathematik-Wettbewerbe auch Einzelartikel über Themen der Elementarmathematik, insbesondere auch Artikel, die von Schülern verfasst sind.

Hans Walser, Frauenfeld

**K. Jacobs: Discrete Stochastics;** Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 1992, pp. 283; sFr. 78.–.  
ISBN 3-7643-2591-7 (Basel ...) ISBN 0-8176-2591-7 (Boston)

Contents: 1. Introduction, 2. Markovian Dynamics, 3. Discrete Probability Spaces, 4. Independent Identically Distributed Random Variables, 5. Statistics, 6. Markov Processes, 7. Elements of Information Theory, 8. Fluctuation Theory, 9. Optimal Strategies in Casinos: Red and Black, 10. Foundational Problems.

This book is about the mathematical theory of probability measures with countable support (i.e. discrete distributions). In this case, one can derive many of the basic results in probability theory without having to rely on measure theory. The normal distribution (as a continuous distribution) of course has to slip in through the Central Limit Theorem (CLT). The special structure of discreteness allows to probe deeper into the basic theory with elementary (often combinatorial) techniques. Examples of this are the Lindeberg CLT, ergodic theory for stochastic matrices or fluctuation theory for random walks. Throughout the text, examples of discrete stochastic systems are presented or even treated in a special chapter (e.g. chapter 9). Short excursions try to give a broader view on the general field of stochastics, as there are for instance the discussions on strong convergence (LIL) and chapter 5 on Statistics. The usual university curriculum in stochastics starts with an elementary introduction into probability and statistics followed later by a measure theoretic course of probability, mathematical statistics, stochastic processes and various advanced courses on selected topics. I find it hard to place the current textbook in such a scheme. It definitely cannot replace the first introductory course: too many topics and techniques are missing. At a later stage, having measure theory available, one can do various subjects much more generally. Some of the chapters may however be used to fill some gaps in (or add some topics to) more advanced courses. Also, I found the large numbers of misprints disturbing. The book would definitely have benefited from some more proofreading.

Paul Embrechts, Zürich