

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 47 (1992)

**Artikel:** Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen  
**Autor:** Kirchgraber, Urs  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43920>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

## Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen

---

Urs Kirchgraber, ETH Zürich

Urs Kirchgraber wurde 1945 in Zürich geboren. Er studierte Mathematik und Physik an der ETH Zürich und promovierte bei Professor E. Stiefel mit einem Thema aus der Himmelsmechanik. Neben seiner Tätigkeit als Oberassistent und später Titularprofessor am Departement Mathematik der ETH unterrichtete er seit 1970 auch als Lehrbeauftragter an der Kantonsschule Hohe Promenade (Zürich). An der Universität Würzburg, an der Brown University in Providence R.I. und an der TH Darmstadt führte Urs Kirchgraber längere Forschungsaufenthalte durch. In seiner Forschung beschäftigt er sich u.a. mit Anwendungen der qualitativen Theorie dynamischer Systeme in der numerischen Mathematik und mit dem Einsatz von mathematischen Methoden in den Ingenieurwissenschaften. Seit seiner Wahl zum Professor an der ETH Zürich betreut Urs Kirchgraber an dieser Hochschule die Ausbildung der angehenden Mathematiklehrer.

Man geht im täglichen Leben in fast selbstverständlicher Weise davon aus, dass eine grössere Erfahrung einen in die Lage versetzt, die Zukunft genauer vorausszusagen. Und auch in der Naturwissenschaft nimmt man im allgemeinen an, dass man den Ausgang eines Experimentes umso genauer vorhersagen kann, je länger man das Experiment bereits beobachtet hat. Im Lichte neuerer Untersuchungen von chaotischem Verhalten muss man diese Auffassung möglicherweise modifizieren oder sogar revidieren: Es gibt mathematisch beschreibbare Experimente, deren Ausgang sich durch eine 0-1-Folge darstellen lässt und die sich chaotisch "im Sinne des Münzwurfs" verhalten. Dies bedeutet, dass kein noch so langes endliches Teilstück der 0-1-Folge es dem Beobachter erlaubt, das nächste Glied in der Folge vorausszusagen. Die "Erfahrung", sei sie auch noch so gross, hilft hier nicht weiter! — In seinem Beitrag geht Urs Kirchgraber auf die mathematische Beschreibung von einigen einfachen derartigen Modellen ein. Er behandelt anschliessend den Satz von Poincaré-Smale, welcher in vielen Fällen den Nachweis dieser chaotischen Eigenschaft ermöglicht. Natürlich lässt sich der Beweis dieses wichtigen Satzes hier nicht vollständig darstellen; der Artikel vermittelt aber, in einem entsprechenden Abschnitt, wenigstens die dem Beweis zugrunde liegenden Ideen. *ust*

## Einführung

Es ist ja selten so, dass mathematische Theorien das Interesse der Öffentlichkeit erregen. Dass es im Zusammenhang mit sog. chaotischen Verhalten doch in verhältnismässig grossem Ausmass dazu gekommen ist (Artikel in Tageszeitungen, Fernsehsendungen, populärwissenschaftliche Bücher zeugen davon), hat zumindest zwei Gründe. Der Gegenstand hat eine prinzipielle Komponente: es geht um Prognosefähigkeit — eine Thematik, die jeden irgendwie anspricht! Der zweite Grund ist, dass einige Effekte schon mit einem PC, oder sogar mit einem Taschenrechner visualisierbar und damit auch für einen Laien unmittelbar erfahrbar sind.

In diesem Artikel geht es darum, einen grundlegenden mathematischen Satz über chaotisches Verhalten zu beschreiben und die Elemente seines Beweises zu skizzieren: den *Satz von Poincaré-Smale*, wie man ihn nennen könnte.

Der Satz von Poincaré-Smale bezieht sich auf sog. diskrete dynamische Systeme, d.h. auf Bewegungsvorgänge, die durch Abbildungen erzeugt werden. Die Idee, durch Abbildungen definierte dynamische Systeme zu betrachten, geht auf Poincaré und Birkhoff zurück. Sie ist weitreichender als man vielleicht zunächst meinen könnte. Beispielsweise können Differentialgleichungen mit Hilfe von diskreten dynamischen Systemen erfasst werden. Wir gehen auf diesen Zusammenhang im letzten Abschnitt dieses Artikels ein. Dort präsentieren wir auch eine typische Differentialgleichung, auf die sich der Satz von Poincaré-Smale anwenden lässt. Vorläufig wenden wir uns dem Begriff des diskreten dynamischen Systems zu, wobei für unsere Zwecke die Betrachtung ebener Systeme genügt.

Es sei  $P$  eine Abbildung der Ebene  $\mathbb{R}^2$  auf sich mit Inverser  $P^{-1}$ , wobei  $P$  und  $P^{-1}$  hinreichend regulär seien. Das Paar  $(\mathbb{R}^2, P)$  definiert ein *diskretes dynamisches System*, wobei die Punkte von  $\mathbb{R}^2$  die *Zustände*,  $\mathbb{R}^2$  daher der *Zustandsraum*, und  $P$  das *Bewegungsgesetz* ist. Eine doppelt unendliche Folge  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  von Punkten aus  $\mathbb{R}^2$  ist eine *Bahn*, falls  $x_{i+1} = P(x_i)$  für  $i \in \mathbb{Z}$  gilt. Das prinzipielle Ziel ist das Studium des Verhaltens der Gesamtheit der Bahnen von  $(\mathbb{R}^2, P)$ . Das ist i.a. jedoch eine viel zu schwierige Fragestellung und man muss sich mit Teilantworten zufrieden geben. Mit ein Grund dafür ist, dass das Bahnverhalten überraschend kompliziert sein kann.

Wir erwähnen zunächst zwei Formen sehr einfachen Bahnverhaltens.

**Gleichgewichte.** Ist  $a \in \mathbb{R}^2$  Fixpunkt von  $P$ , d.h. gilt  $P(a) = a$ , dann ist  $x_i = a$ , für alle  $i$ , eine Bahn, ein sog. Gleichgewicht.

**Periodische Bahnen.** Gilt für eine Bahn  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$

$$x_N = x_0$$

für ein  $N \in \mathbb{N}$ , dann heisst die Bahn periodisch mit Periode  $N$ , denn dann ist  $x_{i+N} = x_i$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$ .

**Chaotisches Verhalten.** Gleichgewichte und periodische Bahnen beschreiben sehr regelmässiges, d.h. vorhersehbares Bahnverhalten. Nun hat man entdeckt, dass ebene diskrete dynamische Systeme auch sehr "irreguläres" Verhalten zeigen können. Eine mathematische Theorie erfordert eine Formalisierung des Begriffs irregulär, unvorhersehbar,

chaotisch. Die folgende Definition ist ein Ansatz in diese Richtung: Wir sagen,  $(\mathbb{R}^2, P)$  sei *chaotisch im Sinne des Münzwurfs*, falls es zwei zueinander fremde, nichtleere Teilmengen  $X_0, X_1$  von  $\mathbb{R}^2$  gibt, welche in jeder denkbaren Reihenfolge besucht werden, d.h. zu jeder zweifach unendlichen Folge von Nullen und Einsen  $s = \{s_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, s_i \in \{0, 1\}$ , gibt es eine Bahn  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ , so dass gilt:

$$x_i \in X_{s_i} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Um einzusehen, dass ein System, das chaotisch im Sinne des Münzwurfs ist, tatsächlich in gewisser Weise unprognostizierbar ist, kann man z.B. folgende Überlegung machen. Von einer (ansonsten unbekannten) Bahn seien hunderttausend Glieder der zugehörigen 0-1-Folge bekannt; der Ausschnitt laute beispielsweise 01 01 01 01 ... 01. Lassen sich daraus, sagen wir, die nächsten 10 Glieder der 0-1-Folge prognostizieren? Die Antwort ist nein: es gibt offenbar  $2^{10} = 1024$  Möglichkeiten, die obige 0-1-Folge fortzusetzen, und zu jeder gibt es gemäß Definition eine dazugehörige Bahn!

Bevor wir zur zentralen Frage kommen, noch eine eher technische Bemerkung. Oft betrachtet man anstelle von  $(\mathbb{R}^2, P)$  das diskrete dynamische System  $(\mathbb{R}^2, P^m)$ , wobei  $m$  eine natürliche Zahl und  $P^m$  die  $m$ -te Iterierte von  $P$  ist. Das neue dynamische System erzeugt ein *stroboskopisches Bild* des alten: statt dass man jeden Punkt  $\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$  einer Bahn von  $(\mathbb{R}^2, P)$  betrachtet, beobachtet man nur jeden  $m$ -ten Punkt:  $\dots, x_{-m}, x_0, x_m, \dots$ . Falls  $(\mathbb{R}^2, P^m)$  chaotisch im Sinne des Münzwurfs ist, wird man immer noch sagen können,  $(\mathbb{R}^2, P)$  verhalte sich chaotisch. Wir werden die Freiheit,  $m$  wählen zu können, später benötigen.

Es stellt sich folgende Hauptfrage: Unter welchen Bedingungen für das Bewegungsgesetz  $P$  ist  $(\mathbb{R}^2, P)$  oder  $(\mathbb{R}^2, P^m)$  chaotisch im Sinne des Münzwurfs?

Von Poincaré stammt der Begriff des *transversalen homoklinen Punktes*. Die Existenz eines transversalen homoklinen Punktes impliziert, dass  $(\mathbb{R}^2, P^m)$ ,  $m$  geeignet gewählt, chaotisch im Sinne des Münzwurfs ist. Das ist im wesentlichen der Satz von Poincaré-Smale. Ziel dieses Artikels ist es, zu erklären, was ein transversaler homokliner Punkt ist und den Beweis des Satzes von Poincaré-Smale zu skizzieren. Dabei geht es in erster Linie darum, die prinzipiellen Begriffe und Überlegungen herauszuarbeiten. Technische Details werden hingegen weggelassen. Der interessierte Leser findet sie in Kirchgraber und Stoffer (1990).

## Hyperbolische Gleichgewichte

Es sei 0 ein Gleichgewicht von  $(\mathbb{R}^2, P)$ , d.h. es gilt  $P(0) = 0$ . Um die Dynamik von  $P$  in der Umgebung von 0 zu untersuchen, entwickeln wir  $P$  mit der Taylor-Formel nach  $x$

$$P(x) = P(0) + dP(0)x + \dots = Ax + \dots \quad (1)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_+}{\partial x_+}(0,0) & \frac{\partial P_+}{\partial x_-}(0,0) \\ \frac{\partial P_-}{\partial x_+}(0,0) & \frac{\partial P_-}{\partial x_-}(0,0) \end{pmatrix}$$



und  $x = (x_+, x_-)^T$ ,  $P = (P_+, P_-)^T$  gesetzt ist. Es sei  $\sigma(A) = \{\lambda_+, \lambda_-\}$  das Spektrum von  $A$ , d.h.  $\lambda_{\pm}$  sind die beiden Eigenwerte von  $A$ . Wir nennen 0 ein *hyperbolisches Gleichgewicht*, falls  $\lambda_+$  und  $\lambda_-$  beide reell sind, und überdies

$$0 < \lambda_+ < 1 < \lambda_- \quad (2)$$

gilt. Wir setzen voraus, dass 0 hyperbolisch ist. Um  $(\mathbb{R}^2, P)$  in der Nähe von 0 zu untersuchen, bietet es sich an, in der Entwicklung (1) zunächst die Terme zweiter und höherer Ordnung zu vernachlässigen und als Approximation das lineare diskrete dynamische System  $(\mathbb{R}^2, Ax)$  zu betrachten. Ohne Verlust an Allgemeinheit wollen wir annehmen, dass  $A$  in Normalform ist, d.h. es gilt:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} =: \text{diag}(\lambda_+, \lambda_-) \quad (3)$$

(Falls diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, muss man eine Koordinatentransformation durchführen. Es seien  $v_{\pm}$  die Eigenvektoren zu  $\lambda_{\pm}$ , d.h. es gilt  $Av_{\pm} = \lambda_{\pm}v_{\pm}$ ; dann definieren wir die  $2 \times 2$ -Matrix  $T = [v_+ v_-]$ ; es ist leicht einzusehen, dass  $\bar{A} := T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_+, \lambda_-)$  gilt; nun führen wir neue Koordinaten gemäss  $x = T\bar{x}$  ein; in den neuen Koordinaten ausgedrückt wird die lineare Abbildung  $x \rightarrow Ax$  durch die Matrix  $\bar{A}$  beschrieben, d.h. es gilt  $\bar{x} \rightarrow \bar{A}\bar{x}$ ).

Untersuchen wir nun die Dynamik zum linearen Bewegungsgesetz

$$x = \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow x' = Ax = \begin{pmatrix} \lambda_+ x_+ \\ \lambda_- x_- \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

Die wichtigsten Eigenschaften sind folgende, cf. Fig. 1:

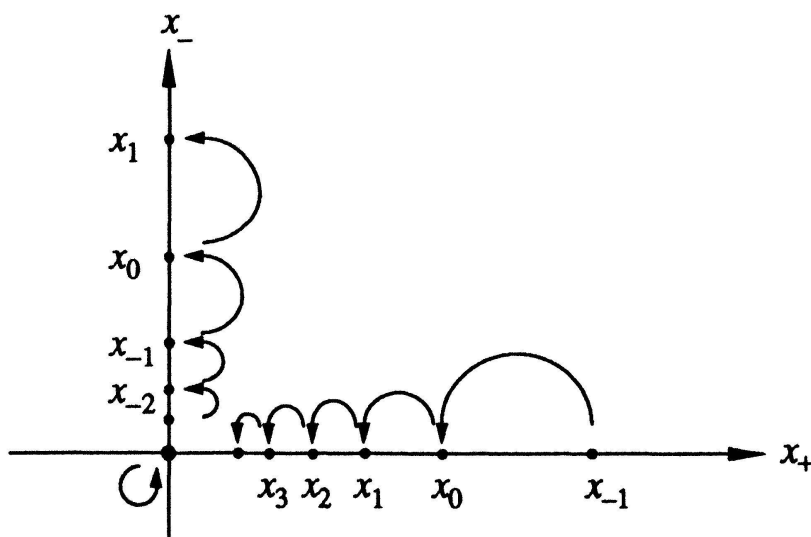


Fig. 1

- der Punkt 0 ist Gleichgewicht
- jede Bahn, die auf der  $x_+$ -Achse startet, liegt ganz auf der  $x_+$ -Achse und strebt (vorwärts) gegen das Gleichgewicht 0; also: mit  $x_0 \in x_+$ -Achse, folgt  $x_i \in x_+$ -Achse für  $i \in \mathbb{Z}$ , und  $x_i \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$

- c) jede Bahn, die auf der  $x_-$ -Achse startet, liegt auf der  $x_-$ -Achse und strebt (rückwärts) gegen 0, also: mit  $x_0 \in x_-$ -Achse, folgt  $x_i \in x_-$ -Achse für  $i \in \mathbb{Z}$ , und  $x_i \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow -\infty$ .

Die  $x_+$ -Achse wird als (globale) *stabile*, die  $x_-$ -Achse als (globale) *instabile Mannigfaltigkeit* zum Gleichgewicht 0 bezüglich der linearen Abbildung (4) bezeichnet. Nebenbei bemerkt sei, dass für jede Bahn  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  mit  $x_0$  weder auf der  $x_+$ -, noch auf der  $x_-$ -Achse, gilt:  $x_i \rightarrow \infty$  sowohl für  $i \rightarrow \infty$ , als auch für  $i \rightarrow -\infty$ .

Nun sollten wir ja nicht das durch (4) beschriebene lineare diskrete dynamische System, sondern das nichtlineare System mit Bewegungsgesetz

$$x \longrightarrow P(x) = Ax + \dots \quad (5)$$

untersuchen, wobei diese Darstellung für  $P$  in der Nähe von  $x = 0$  gilt. Die Frage ist also: Wieviel bleibt übrig vom oben beschriebenen Bild, wenn wir die Terme zweiter und höherer Ordnung, also die nichtlinearen Terme wieder hinzufügen? Da die Entwicklung von  $P$  nur in einer Umgebung von  $x = 0$  gilt, d.h. weil  $P(x)$  nur in der Nähe von  $x = 0$  durch  $Ax$  approximiert wird, können wir Ähnlichkeit höchstens in der Nähe von  $x = 0$  erwarten. Dort aber verhalten sich die beiden Systeme tatsächlich gleich, wie der folgende Satz zeigt, cf. Fig. 2.

**Satz 1** (*Über die lokale stabile und instabile Mannigfaltigkeit eines hyperbolischen Gleichgewichtes*).

**Voraussetzung.** Es sei  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Diffeomorphismus, 0 ein hyperbolisches Gleichgewicht mit

$$dP(0) = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}.$$

**Behauptung.** Es gibt eine Zahl  $\delta > 0$  und zwei skalare Funktionen  $s_+, s_-$ , die Kurvenstücke  $M_+, M_-$  wie folgt definieren:

$$M_+ = \{(x_+, s_+(x_+)) \mid |x_+| < \delta\}, \quad M_- = \{(s_-(x_-), x_-) \mid |x_-| < \delta\}$$

und so dass gilt:

- $\alpha$ ) das Gleichgewicht 0 liegt auf  $M_+$  und auf  $M_-$ ;  $M_+$  ist in 0 tangential an die  $x_+$ -Achse,  $M_-$  an die  $x_-$ -Achse.

Es bezeichne  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  wie üblich eine Bahn von  $(\mathbb{R}^2, P)$ .

- $\beta$ ) Gilt  $x_0 \in M_+$ , dann folgt  $x_i \in M_+$  für  $i \in \mathbb{N}$ , (d.h.  $M_+$  ist invariant für  $P$ ) und es gilt:

$$x_i \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad i \rightarrow \infty.$$

Gilt  $x_0 \in M_-$ , dann folgt  $x_i \in M_-$  für  $i \in -\mathbb{N}$  (d.h.  $M_-$  ist invariant für  $P^{-1}$ ) und es gilt:

$$x_i \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad i \rightarrow -\infty$$

Man nennt eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^2$  invariant für  $P$  (bzw.  $P^{-1}$ ), falls aus  $x \in M$  folgt  $P(x) \in M$  (bzw.  $P^{-1}(x) \in M$ ).  $M_+$  (bzw.  $M_-$ ) heisst (lokale) stabile (bzw. instabile,) Mannigfaltigkeit des hyperbolischen Gleichgewichts 0.

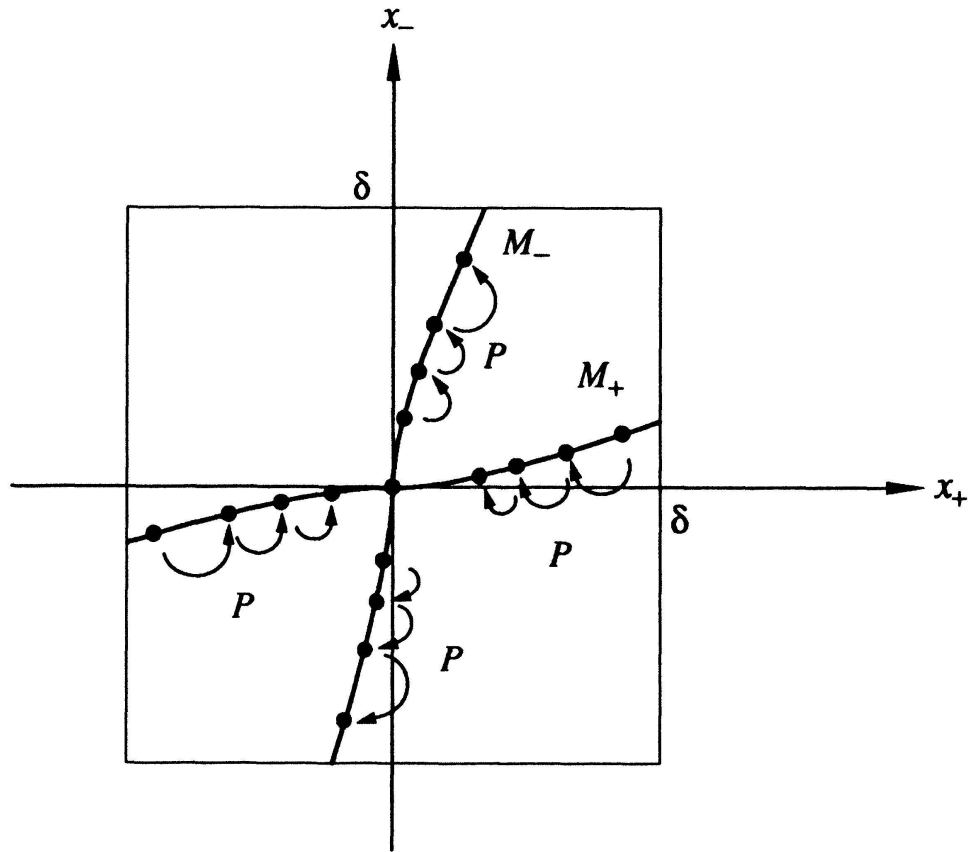


Fig. 2

Dieser Satz, der auf Poincaré und Hadamard zurückgeht, ist, so naheliegend er erscheint, ein Existenzsatz: es wird die Existenz zweier Kurven mit gewissen Eigenschaften behauptet. Leider kann man die Funktionen  $s_+$ ,  $s_-$ , die die Kurven bestimmen, nicht explizit, etwa durch eine Formel, angeben. Die Definition erfolgt indirekt, als Resultat eines Grenzprozesses, wie wir nun zeigen. Wir benutzen die folgende Beschreibung der Abbildung  $P$ , vergleiche Gl. (4).

$$P : x = \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} \longrightarrow x' = P(x) = \begin{pmatrix} \lambda_+ x_+ + \hat{P}_+(x_+, x_-) \\ \lambda_- x_- + \hat{P}_-(x_+, x_-) \end{pmatrix} \quad (6)$$

und nehmen für den Moment an,  $s_+$ , und damit  $M_+$  sei schon bekannt. Betrachten wir einen Punkt  $(\xi, s_+(\xi))^T$  auf  $M_+$  und sein Bild unter  $P$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ s_+(\xi) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_+ \xi + \hat{P}_+(\xi, s_+(\xi)) \\ \lambda_- s_+(\xi) + \hat{P}_-(\xi, s_+(\xi)) \end{pmatrix}$$

Weil mit  $(\xi, s_+(\xi))^T$  auch der Bildpunkt auf  $M_+$  liegen muss, erhalten wir folgende Beziehung

$$\lambda_- s_+(\xi) + \hat{P}_-(\xi, s_+(\xi)) = s_+ \left( \lambda_+ \xi + \hat{P}_+(\xi, s_+(\xi)) \right)$$

oder die dazu äquivalente Form

$$s_+(\xi) = \frac{1}{\lambda_-} s_+ \left( \lambda_+ \xi + \hat{P}_+ (\xi, s_+(\xi)) \right) - \frac{1}{\lambda_-} \hat{P}_- (\xi, s_+(\xi)) . \quad (7)$$

Die Idee ist nun, Gl. (7) als Gleichung für die unbekannte Funktion  $s_+$  aufzufassen und die Gleichung mit der Methode der sukzessiven Approximation zu lösen, d.h. man bildet eine Folge  $s_0, s_1, s_2, \dots$  von Funktionen wie folgt

$$\begin{cases} s_0(\xi) &= 0 \\ s_{n+1}(\xi) &= \frac{1}{\lambda_-} s_n \left( \lambda_+ \xi + \hat{P}_+ (\xi, s_n(\xi)) \right) - \frac{1}{\lambda_-} \hat{P}_- (\xi, s_n(\xi)) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

Man kann zeigen, dass die Folge von Funktionen  $\{s_i(\cdot)\}$  tatsächlich wohldefiniert ist, dass sie konvergiert, dass die Grenzfunktion Gl. (7) erfüllt und dass auch die übrigen Eigenschaften gelten, für weitere Details, cf. z.B. Hartman (1982).

### Transversale homokline Punkte

Sei  $(\mathbb{R}^2, P)$  ein diskretes dynamisches System mit hyperbolischem Gleichgewicht 0,  $M_\pm$  die lokale stabile, bzw. instabile Mannigfaltigkeit. Wir betrachten nun das Bild von  $M_-$  unter  $P$ ,  $P^2 = P \circ P$ ,  $P^3 = P \circ P^2, \dots$ , d.h. die Kurvenstücke

$$M_-^0 = M_-, \quad M_-^1 = P(M_-), \quad M_-^2 = P^2(M_-), \dots \quad (8)$$

und analog

$$M_+^0 = M_+, \quad M_+^1 = P^{-1}(M_+), \quad M_+^2 = P^{-2}(M_+), \dots \quad (9)$$

Die  $M_\pm^i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , haben, wie wir sogleich zeigen wollen, folgende Eigenschaften:

$$M_\pm^0 \subset M_\pm^1 \subset M_\pm^2 \subset \dots \quad (10)$$

$$M_-^i \text{ (bzw. } M_+^i) \text{ ist invariant bezüglich } P^{-1} \text{ (bzw. } P) . \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{Gilt } x_0 \in M_-^i \text{ (bzw. } x_0 \in M_+^i), \text{ so folgt für die Bahn } \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \text{ durch } x_0: \\ x_j \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow -\infty \text{ (bzw. für } j \rightarrow +\infty) . \end{aligned} \quad (12)$$

Es sei  $x \in M_-^i$ , dann gilt  $x = P^i(\tilde{x})$  für ein  $\tilde{x} \in M_-$ ; infolge der Invarianz von  $M_-$  bezüglich  $P^{-1}$  also  $\tilde{x} := P^{-1}(\tilde{x}) \in M_-$  und daher  $x = P^i(\tilde{x}) = P^{i+1}(\tilde{x})$ , d.h.  $x \in M_-^{i+1}$ ; hieraus folgt Gl. (10) für die  $M_-^i$ . Zum Beweis von Gl. (11) bemerken wir, für  $i \geq 1$ ,

$$P^{-1}(M_-^i) = P^{-1}(P^i(M_-)) = P^{i-1}(M_-) = M_-^{i-1} \subset M_-^i .$$

Gl. (12) schliesslich folgt aus der Tatsache, dass  $x_j \in M_-$  gilt für  $j \leq -i$  und der entsprechenden Eigenschaft von  $M_-$ .

Im allgemeinen ist  $M_\pm^{i+1}$  echt grösser als  $M_\pm^i$  und es ist deshalb interessant, den Verlauf der  $M_\pm^i$  zu studieren. Von grösstem Interesse ist insbesondere der Fall, in dem sich  $M_+^N$  und  $M_-^N$  für ein gewisses  $N \in \mathbb{N}$  schneiden, cf. Fig. 3.

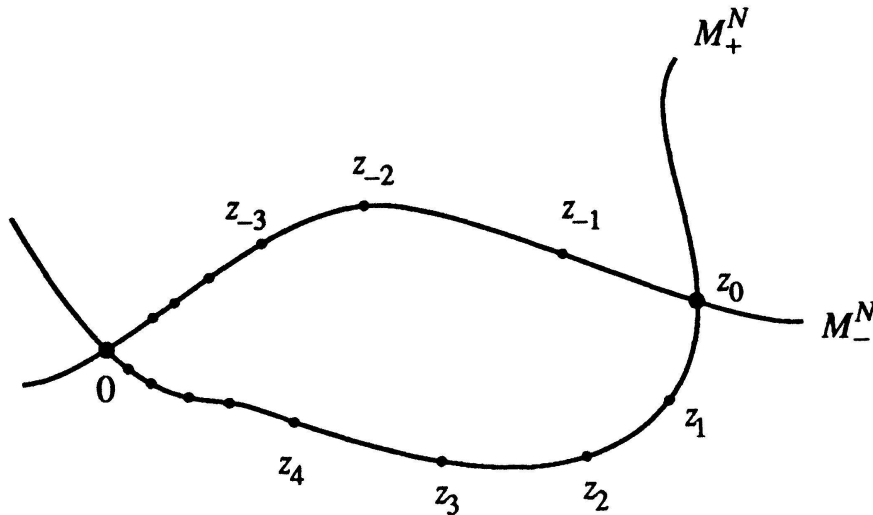


Fig. 3

Einen solchen Schnittpunkt  $z_0$  nennt man nach Poincaré *homoklin* und *transversal homoklin*, falls die Tangenten in  $z_0$  an  $M_+^N$  und  $M_-^N$  nicht-kollinear sind.

Es folgen einige Bemerkungen.

1. Es ist möglich, dass  $M_+^i$  und  $M_-^i$  für jedes  $i$  keinen gemeinsamen Punkt haben (abgesehen von  $x = 0$ ).
2. Die Vereinigung aller  $M_+^i$  bzw. aller  $M_-^i$ , i.e.

$$W^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} M_+^i, \quad W^- = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} M_-^i$$

wird als *globale stabile* bzw. *instabile Mannigfaltigkeit* des hyperbolischen Gleichgewichts 0 bezeichnet. Die Gestalt von  $W^+$  und  $W^-$  ist im Falle der Existenz eines transversalen homoklinen Punktes ausserordentlich kompliziert, indem sich  $W^+$  und  $W^-$  in sehr verwickelter Weise sogar unendlich oft schneiden. Diese Tatsache und ihre Bedeutung hat schon Poincaré erkannt. In seinen berühmten “Méthodes nouvelles de la mécanique céleste” schrieb er:

“On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n’est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et, en général de tous les problèmes de dynamique où il n’y a pas d’intégral uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes”.

3. Die Bestimmung von  $M_\pm^N$  ist nicht einfach, meistens muss man sich mit Approximationen zufrieden geben. Häufig wird z.B.  $M_-^N$  wie folgt numerisch approximiert: Man legt ein kleines Geradenstück durch das Gleichgewicht 0 in Richtung des Eigenvektors zu  $\lambda_-$  fest und wählt darauf hinreichend viele Punkte aus; diese Punkte, zusammen mit ihren Bildern unter  $P, P^2, P^3, \dots, P^N$  ergeben i.a. eine gute Approximation für  $M_-^N$ . Vielleicht möchte die Leserin dieses Verfahren an folgendem Beispiel ausprobieren. Die Abbildung  $P$  sei wie folgt definiert

$$P : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x^2 + y - 2 \\ x \end{pmatrix} \quad (13)$$

$P$  besitzt im ersten Quadranten ein hyperbolisches Gleichgewicht. Die Berechnung von Stücken der zugehörigen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit ergibt folgendes

Bild, cf. Fig. 4. (Die Abbildung  $P$  ist Mitglied einer Familie von Abbildungen, die von M. Hénon 1976 vorgeschlagen wurde. Trotz numerischer Evidenz à la Fig. 4 ist bis heute nicht *bewiesen*, dass die Hénon-Abbildung transversale homokline Punkte besitzt.)

Im Abschnitt “Eine Anwendung” beschreiben wir eine Situation, in der es gelingt,  $M_+^N$  und  $M_-^N$  analytisch hinreichend gut zu approximieren, um die Existenz eines transversalen homoklinen Punkts zu garantieren.

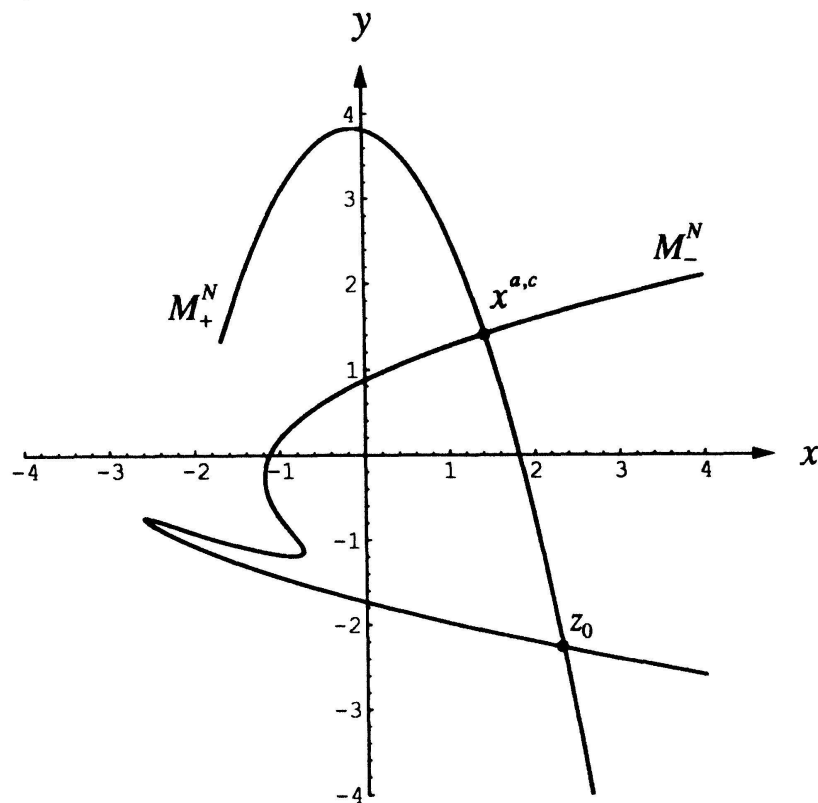


Fig. 4

4. Betrachten wir die Bahn  $\{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  durch den transversalen homoklinen Punkt  $z_0$ . Aufgrund der Eigenschaften der Mengen  $M_+^N$ ,  $M_-^N$  gilt

$\alpha)$   $z_i \in M_-^N$  für  $i \leq 0$  und  $z_i \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow -\infty$

$\beta)$   $z_i \in M_+^N$  für  $i \geq 0$  und  $z_i \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow +\infty$

cf. Fig. 3.  $\{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  heisst *homokline Bahn*. Diese Bahn, zusammen mit dem hyperbolischen Gleichgewicht, d.h. die Menge

$$\Lambda = \{0\} \cup \{z_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

spielt im folgenden eine grosse Rolle.

### Die hyperbolische Menge $\Lambda$

Es sei wie bis anhin 0 ein hyperbolisches Gleichgewicht von  $(\mathbb{R}^2, P)$ ,  $z_0$  transversaler homoklinen Punkt,  $\{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  die Bahn durch  $z_0$  und  $\Lambda = \{0\} \cup \{z_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ . Das Charakteristische an einem hyperbolischen Gleichgewicht ist, dass es eine Richtung gibt, in

der  $P$  kontrahierend ist und eine andere Richtung, in der  $P$  expandierend ist. Besitzt ein hyperbolisches Gleichgewicht einen transversalen homoklinen Punkt  $z_0$ , so vererbt das Gleichgewicht diese Eigenschaft in gewissem Sinn auch auf die Punkte der homoklinen Bahn  $\{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ . Die Präzisierung dieser Bemerkung führt zum Begriff der hyperbolischen Menge und zum Satz:  $\Lambda = \{0\} \cup \{z_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$  ist eine hyperbolische Menge. Wieder werden wir nicht alle technischen Details ausführen.

Im folgenden spielt die *Tangentialabbildung*  $dP$  von  $P$  eine grosse Rolle: sei  $x \in \mathbb{R}^2$  und  $t$  ein Vektor aus  $\mathbb{R}^2$ , den wir uns in  $x$  angeheftet denken; dem Paar  $(x, t)$  ordnen wir das Paar  $(P(x), dP(x)t)$  zu, wobei  $dP(x)$  die Jacobische Matrix von  $P$  am Punkt  $x$  bezeichnet; den Vektor  $dP(x)t$  denken wir uns in  $P(x)$  angeheftet. Die Bedeutung von  $dP(x)t$  ist folgende: beschreibt  $\gamma(\tau)$  die Bewegung eines Punktes in  $\mathbb{R}^2$ , der zur Zeit  $\tau = 0$  im Punkt  $x$  ist und den Geschwindigkeitsvektor  $t$  hat, dann ist der Bildpunkt  $P(\gamma(\tau))$  zur Zeit  $\tau = 0$  in  $P(x)$  und sein Geschwindigkeitsvektor ist  $dP(x)t$ . Insbesondere folgt: Ist eine Kurve  $\Gamma$  invariant unter  $P$  und  $t$  Tangentialvektor an  $\Gamma$  in  $x \in \Gamma$ , so ist  $dP(x)t$  Tangentialvektor an  $\Gamma$  in  $P(x)$ .

Um das hyperbolische Gleichgewicht  $0$  gemeinsam mit den Punkten  $z_i$  der homoklinen Bahn behandeln zu können, führen wir die Bezeichnungen  $z_\infty = 0$ ,  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  und die Konvention  $\infty + 1 = \infty$  ein.

In jedem Punkt  $z_i$  von  $\Lambda$  definieren wir ein Paar von linear unabhängigen Vektoren  $t_i^+$ ,  $t_i^-$ , also ein *Zweibein*, das wir später als lokales Koordinatensystem in der Umgebung des Punktes  $z_i$  benutzen werden. Wir behaupten, dass folgende Wahl möglich ist:

- a) *Das Feld der Zweibeine ist stetig.* Da  $z_\infty = 0$  der einzige Häufungspunkt von  $\Lambda$  ist, bedeutet das

$$\lim_{i \rightarrow -\infty} t_i^\pm = t_\infty^\pm, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} t_i^\pm = t_\infty^\pm$$

- b) *Das Feld der Zweibeine ist invariant bezüglich der Tangentialabbildung*, d.h.  $dP(z_i)t_i^\pm$  ist parallel zu  $t_{i+1}^\pm$ , für  $i \in \mathbb{Z}^*$ ; wir bezeichnen die Proportionalitätskonstanten mit  $\lambda_i^\pm$ , es gilt also

$$dP(z_i)t_i^\pm = \lambda_i^\pm t_{i+1}^\pm \quad i \in \mathbb{Z}^*$$

- c)  $dP$  ist kontrahierend in Richtung der  $t_i^+$ , bezogen auf die durch die  $t_i^+$  vermittelte Metrik und expandierend in Richtung der  $t_i^-$ , bezogen auf die durch die  $t_i^-$  vermittelte Metrik, d.h. es gibt eine Zahl  $\vartheta \in (0, 1)$ , so dass gilt

$$|\lambda_i^+| \leq \vartheta, \quad |\lambda_i^-| \geq \frac{1}{\vartheta} \quad i \in \mathbb{Z}^*$$

Diese drei Eigenschaften sind gemeint, wenn man sagt,  $\Lambda$  sei eine *hyperbolische Menge*. Wir beschreiben die Konstruktion der Vektoren  $t_i^-$ ,  $i \in \mathbb{Z}^*$ . Aufgrund von b) für  $i = \infty$  ist klar, dass  $t_\infty^-$  Eigenvektor von  $dP(0)$  sein muss und im Hinblick auf c) wählen wir einen Eigenvektor zum grösseren Eigenwert  $\lambda_-$ ; seine Länge (bezüglich einer ein für allemal fixierten Norm  $|\cdot|$  in  $\mathbb{R}^2$ ; um etwas Konkretes vor Augen zu haben, wählen wir die Maximumnorm:  $|x| = \max(|x_+|, |x_-|)$ ) sei 1, die Orientierung wird beliebig festgelegt.



Wir erinnern daran, dass  $t_\infty^-$  aufgrund des Satzes über die lokale stabile und instabile Mannigfaltigkeit im Punkte  $z_\infty = 0$  tangential an  $M_-^N$  ist. Schliesslich halten wir fest, dass  $\lambda_\infty^- = \lambda_-$  gilt. Auch alle übrigen Vektoren  $t_i^-$  sollen (möglicherweise einstweilen, cf. weiter unten) Einheitsvektoren sein (bezüglich der oben eingeführten Norm in  $\mathbb{R}^2$ ).  $t_0^-$  sei Tangentialvektor an  $M_-^N$  in  $z_0$ , seine Orientierung wird beliebig festgelegt. Im Hinblick auf die Invarianzbedingungen für das Feld der Zweibeine transportieren wir  $t_0^-$  mit der Tangentialabbildung vor- und rückwärts:

$$\begin{array}{lll} t_{i-1}^- & \text{ist parallel zu} & dP^{-1}(z_i)t_i^- \quad \text{für } i \leq 0 \\ t_{i+1}^- & \text{ist parallel zu} & dP(z_i)t_i^- \quad \text{für } i \geq 0 \end{array}$$

Damit sind die  $t_i^-$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , bis auf die Wahl der Orientierung, über die später verfügt wird, rekursiv festgelegt. Durch unsere Definition ist die Eigenschaft b) erfüllt.

Da  $M_-^N$  bezüglich  $P^{-1}$  invariant ist und weil  $t_0^-$  nach Konstruktion Tangentialvektor an  $M_-^N$  im Punkt  $z_0$  ist, folgt:  $t_i^-$  ist Tangentialvektor an  $M_-^N$  im Punkte  $z_i$  für  $i \leq 0$ , cf. Fig. 5.

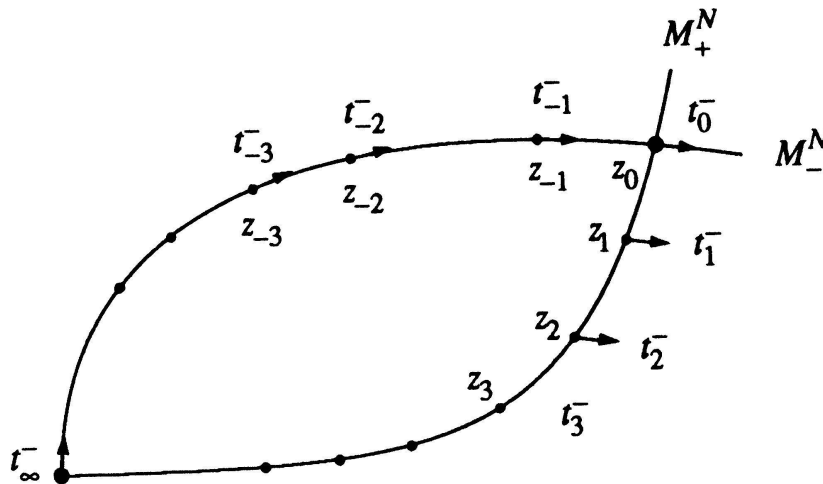


Fig. 5

Weil  $z_i \rightarrow z_\infty = 0$  für  $i \rightarrow -\infty$ , folgt, im Hinblick auf die Tatsache, dass  $t_\infty^-$  Tangentialvektor an  $M_-^N$  in  $z_\infty = 0$  und Einheitsvektor ist: Bei geeigneter Orientierung der  $t_i^-$  für alle  $i$  hinreichend klein, gilt  $\lim_{i \rightarrow -\infty} t_i^- = t_\infty^-$ . Damit ist der erste Teil der Stetigkeitsbedingung a) nachgewiesen. Wir zeigen jetzt den verbleibenden Teil von a) und dass c) für alle  $i$ ,  $|i|$  genügend gross, gilt. Dazu machen wir die folgende *Modellannahme*: In einer Umgebung  $U$  von 0 stimmt  $P$  mit seiner Linearisierung am Nullpunkt überein, d.h.  $P(x) = dP(0)x$  für  $x \in U$ . Ferner nehmen wir an, dass  $dP(0)$  in Diagonalform ist,  $dP(0) = \text{diag}(\lambda_+, \lambda_-)$ , und setzen  $t_\infty^+ = (1, 0)^T$ ,  $t_\infty^- = (0, 1)^T$ , cf. Fig. 6.

Sei  $N > 0$  so gross, dass  $z_N \in U$  und  $z_{-N} \in U$  ist. Weil  $t_0^-$  transversal zu  $M_+^N$  ist, ist  $t_N^-$  transversal zur  $x_+$ -Achse, d.h. die  $x_-$ -Komponente von  $t_N^-$  ist von 0 verschieden und OBdA wollen wir annehmen, dass sie grösser sei, als die  $x_+$ -Komponente; weil  $t_N^-$  Einheitsvektor ist, gilt  $t_N^- = (\tau, 1)^T$ , mit  $|\tau| \leq 1$ . Hieraus ergibt sich

$$t_i^- = \begin{pmatrix} \tau(\lambda_+ / \lambda_-)^{i-N} \\ 1 \end{pmatrix} \quad i \geq N.$$

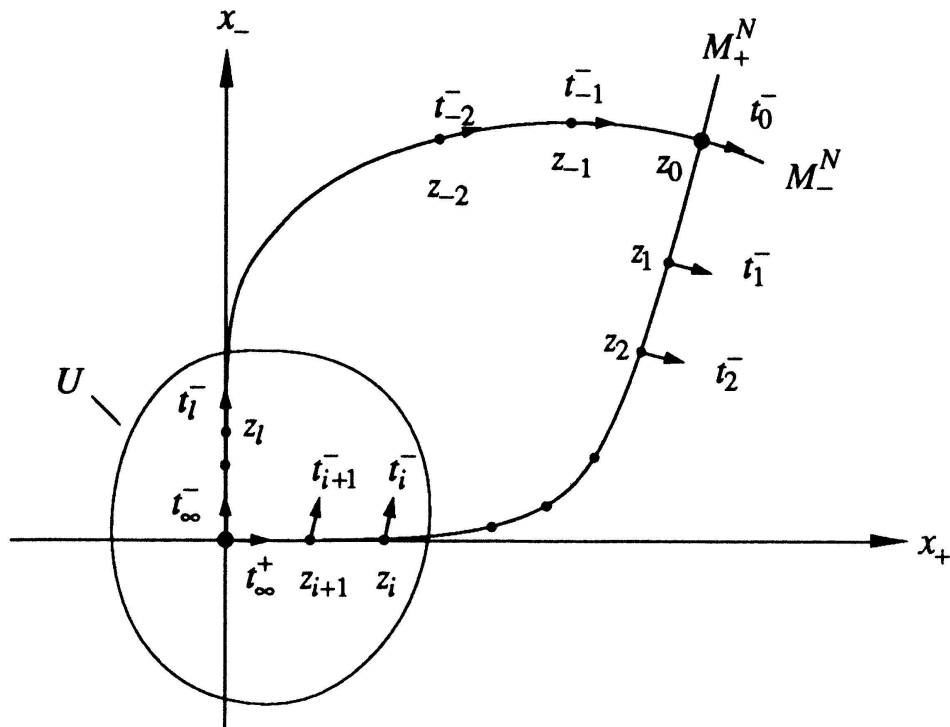


Fig. 6

Daraus folgt zweierlei:

1.  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i^- = (0, 1)^T = t_\infty^-$ , womit der noch ausstehende Teil von a) nachgewiesen ist, und
2.  $\lambda_i^- = \lambda_-$  für  $i \geq N$ , woraus sich die gewünschte Abschätzung in c) für alle hinreichend grossen  $i$  ergibt. Wir zeigen, dass sie auch für alle hinreichend kleinen  $i$  gilt. Weil  $z_i \in U$  für  $i \leq -N$  gilt, folgt  $t_i^- = (0, 1)^T$  für  $i \leq -N$  und es ist  $\lambda_i^- = \lambda_-$  und die Behauptung folgt.

Um die Abschätzung  $|\lambda_i^-| \geq 1/\vartheta > 1$  für alle  $i$  zu bekommen (und nicht nur für alle genügend kleinen und alle genügend grossen Werte von  $i$ ), muss man eventuell endlich viele der Vektoren  $t_i^-$ , nämlich die Vektoren

$$t_{-M}^-, \dots, t_{-1}^-, t_0^-, t_1^-, \dots, t_M^-$$

abändern, dabei ist  $M$  eine hinreichend grosse Zahl. Die abgeänderten Vektoren haben dieselbe Richtung und denselben Richtungssinn wie die alten; aber es sind keine Einheitsvektoren mehr. Der interessierte Leser findet diese (einfache) Konstruktion in Kirchgraber und Stoffer (1990), Lemma 3. Hier soll es genügen, folgendes zu bemerken: sei  $A$  eine  $2 \times 2$ -Matrix,  $t, t'$  Vektoren, so dass  $t'$  parallel zu  $At$  ist, d.h. es gilt  $At = \lambda t'$ ; durch Veränderung der Länge von  $t'$  kann man offenbar erreichen, dass  $\lambda$  gleich einer beliebig vorgebbaren Zahl ungleich 0 ist!

Falls die Modellannahme nicht erfüllt ist, müssen die Terme höherer Ordnung in der Entwicklung von  $P(x)$  nach  $x$  berücksichtigt werden. Die Überlegungen sind dann etwas komplizierter, aber das Resultat bleibt unverändert. Die Vektoren  $t_i^+$  werden analog konstruiert. Damit folgt:

**Satz 2** Ist 0 ein hyperbolisches Gleichgewicht von  $P$ ,  $z_0$  ein dazu transversaler homokliner Punkt und  $\{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  seine Bahn, dann ist  $\Lambda = \{0\} \cup \{z_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$  eine hyperbolische Menge, d.h. es gibt ein Feld von Zweibeinen  $t_i^+$ ,  $t_i^-$ , so dass die Eigenschaften a), b), c) gelten.

### Das Schattenbahnlemma und der Satz von Poincaré-Smale

Die Folge  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  heisst Bahn des diskreten dynamischen Systems  $(\mathbb{R}^2, P)$ , falls

$$|x_{i+1} - P(x_i)| = 0 \quad \text{für } i \in \mathbb{Z}$$

gilt, wie man sich erinnert. Eine Folge  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  mit  $y_i \in \Lambda, i \in \mathbb{Z}$ , wobei  $\Lambda$  die oben beschriebene hyperbolische Menge ist, heisst  $\varepsilon$ -Pseudobahn, falls gilt

$$|y_{i+1} - P(y_i)| \leq \varepsilon \quad \text{für } i \in \mathbb{Z}.$$

Eine  $\varepsilon$ -Pseudobahn ist also *fast* eine Bahn, eine Bahn sozusagen, bis auf einen kleinen Fehler, cf. Fig. 7.

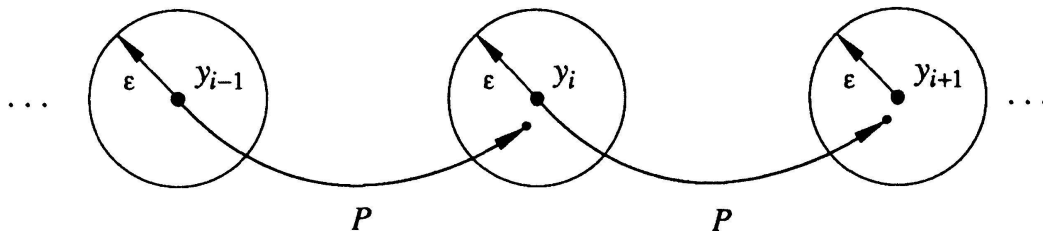


Fig. 7

Der zentrale Hilfssatz dieses Abschnitts ist das *Schattenbahnlemma* (Satz 3), das besagt, dass es zu einer Pseudobahn eine benachbarte Bahn (die sog. *Schattenbahn*) gibt. Pseudobahnen sind also sozusagen Spuren wirklicher Bahnen, und es ist daher interessant, möglichst viele verschiedene Pseudobahnen zu finden.

Betrachten wir unsere hyperbolische Menge  $\Lambda$ , die 0 als einzigen Häufungspunkt hat, cf. Fig. 8.

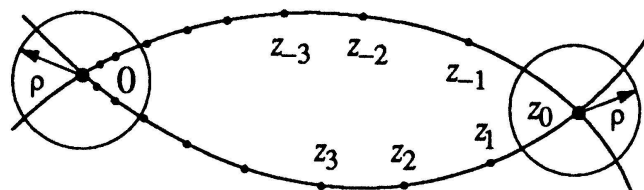


Fig. 8

Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $N > 0$  so gross, dass einerseits  $|z_{-N} - 0| \leq \varepsilon$  und andererseits  $|0 - z_{N+1}| \leq \varepsilon$  gilt. Dann betrachten wir die (endliche) Folge

$$Y_1 := 0, z_{-N}, z_{-N+1}, \dots, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \dots, z_N, 0.$$

$Y_1$  besteht aus  $m := 2N + 3$  Punkten und kann offenbar Segment einer  $\varepsilon$ -Pseudobahn sein. Neben  $Y_1$  betrachten wir

$$Y_0 := 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0,$$



#### Satz 4

**Voraussetzung.**  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  hat ein hyperbolisches Gleichgewicht und einen dazu transversalen homoklinen Punkt.

**Behauptung.** Es gibt eine natürliche Zahl  $m$ , so dass  $(\mathbb{R}^2, P^m)$  chaotisch im Sinne des Münzwurfs ist.

Der Vollständigkeit halber führen wir die klassische Formulierung des Satzes von Poincaré-Smale an. Dazu bezeichnen wir mit  $\Sigma$  die Menge aller zweiseitig unendlichen 0-1-Folgen und führen in  $\Sigma$  durch  $d(s, s') := \max \{2^{-|i|} \mid s_i \neq s'_i, i \in \mathbb{Z}\}$  eine Metrik ein.  $\Sigma$  ist dann ein kompakter vollständiger metrischer Raum. Nun definieren wir eine Abbildung  $\tau$  von  $\Sigma$  nach  $\mathbb{R}^2$  durch

$$\tau : s \in \Sigma \longrightarrow x_{N+1}^s \in \mathbb{R}^2.$$

Man kann zeigen, dass  $\tau$  ein Homöomorphismus von  $\Sigma$  auf  $S := \tau(\Sigma)$  ist. Weiter ist  $(S, \bar{P})$  ein diskretes dynamisches System! Dazu muss gezeigt werden, dass  $S$  unter  $\bar{P}$  invariant ist. Wenn  $\{x_i^s\}_{i \in \mathbb{Z}}$   $\rho$ -Schattenbahn zu  $y^s = \dots Y_{s-1}; Y_{s_0} \dots$  ist, so ist  $\{x_{i+m}^s\}_{i \in \mathbb{Z}}$   $\rho$ -Schattenbahn zu  $y^{s'} = \dots Y_{s_0}; Y_{s_1} Y_{s_2} \dots$ , wobei  $s' := \sigma(s) = \{s_{i+1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$  gesetzt wird. Weil nach dem Schattenbahnlemma jede  $\varepsilon$ -Pseudobahn genau eine Schattenbahn besitzt, gilt

$$\tau(\sigma(s)) = x_{N+1+m}^s = \bar{P}(x_{N+1}^s) = \bar{P}(\tau(s)).$$

Damit ist die Behauptung nachgewiesen. Die letzte Formel beinhaltet noch ein wesentliches Resultat. Sie zeigt, dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \tau(s) \in S & \xrightarrow{\bar{P}} & \bar{P}(\tau(s)) \in S \\ \tau \uparrow & & \uparrow \tau \\ s \in \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \sigma(s) \in \Sigma \end{array}$$

Das hat folgende Bedeutung: Wir führen  $(\Sigma, \sigma)$  als weiteres diskretes dynamisches System ein, d.h. wir wählen den Raum der zweiseitig unendlichen 0-1-Folgen als Zustandsraum und die sog. *Bernoulli-* oder *Shift-Abbildung*

$$\sigma : s = (\dots s_{-1}; s_0 s_1 s_2 \dots) \longrightarrow s' = \sigma(s) = (\dots s_0; s_1 s_2 \dots)$$

als Bewegungsgesetz. Dann besagt das Diagramm, dass  $\tau$  eine *Koordinatentransformation* ist, die die beiden diskreten dynamischen Systeme  $(S, \bar{P})$  und  $(\Sigma, \sigma)$  ineinander überführt. Man sagt  $(S, \bar{P})$  und  $(\Sigma, \sigma)$  seien *konjugiert* zueinander.

#### Satz 5 (Satz von Poincaré-Smale).

**Voraussetzung.**  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  hat ein hyperbolisches Gleichgewicht und einen dazu transversalen homoklinen Punkt.

**Behauptung.** *Es gibt eine natürliche Zahl  $m$  und eine unter  $P^m$  invariante Teilmenge  $S \subset \mathbb{R}^2$ , so dass das diskrete dynamische System  $(S, P^m)$  und das Bernoulli-System  $(\Sigma, \sigma)$  zueinander konjugiert sind.*

Das Bernoulli-System ist der Prototyp eines chaotischen dynamischen Systems. Seine Eigenschaften sind sehr leicht zu entdecken. Sie übertragen sich auf dazu konjugierte Systeme, cf. Kirchgraber und Stoffer (1989).

Smale (1967) bewies Satz 5 mit Hilfe seiner berühmten Hufeisenkonstruktion, cf. Moser (1973). Quellen für das Schattenbahnlemma sind Anosov (1967), Bowen (1975). Für weitere Referenzen, cf. Kirchgraber und Stoffer (1990).

### Beweisskizze zum Schattenbahnlemma

Im Prinzip ist das Schattenbahnlemma ein einfaches Resultat. Dennoch begnügen wir uns auch hier mit einer Beweisskizze.

Wir beginnen mit einer etwas allgemeineren Formulierung der Hyperbolizitätseigenschaft einer Menge  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ .

*Die kompakte (d.h. abgeschlossene und beschränkte) Teilmenge  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ , die überdies bezüglich  $P$  und  $P^{-1}$  invariant ist, heisst hyperbolisch, falls folgendes gilt. Zu  $x \in \Lambda$  gibt es zwei Vektoren  $t^+(x), t^-(x) \in \mathbb{R}^2$ ,  $t^+(x)$  und  $t^-(x)$  sind linear unabhängig und stetig in  $x$ , und es gilt:*

i) zu  $x \in \Lambda$  gibt es reelle Zahlen  $\lambda^+(x)$  und  $\lambda^-(x)$ , so dass

$$dP(x)t^\pm(x) = \lambda^\pm(x)t^\pm(P(x))$$

ii) es gibt eine Zahl  $\vartheta \in (0, 1)$ , so dass

$$|\lambda^+(x)| \leq \vartheta, \quad |\lambda^-(x)| \geq \frac{1}{\vartheta} \quad \text{für } x \in \Lambda.$$

Es sei  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  eine  $\varepsilon$ -Pseudobahn; Ziel ist die Konstruktion einer zugehörigen  $\rho$ -Schattenbahn  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ .

Wir benützen  $t^+(x), t^-(x)$  als lokales Koordinatensystem in der Nähe von  $x$  und definieren die  $2 \times 2$ -Matrix  $T(x) := [t^+(x) \ t^-(x)]$ . Sodann suchen wir  $x_i$  in der Form

$$x_i = y_i + T(y_i)\Delta_i \quad i \in \mathbb{Z},$$

wobei wir erwarten, dass  $\Delta_i$  klein ist, weil ja  $x_i$  nahe bei  $y_i$  liegen soll. Nun ist  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  eine Bahn, genau wenn  $x_{i+1} = P(x_i)$ , d.h. wenn

$$y_{i+1} + T(y_{i+1})\Delta_{i+1} = P(y_i + T(y_i)\Delta_i) \approx P(y_i) + dP(y_i)T(y_i)\Delta_i \quad i \in \mathbb{Z}$$

gilt, dabei haben wir die Terme vernachlässigt, die klein von zweiter Ordnung in  $\Delta_i$  sind. Die letzte "Gleichung" lässt sich wie folgt schreiben

$$\Delta_{i+1} \approx [T(y_{i+1})]^{-1} dP(y_i) T(y_i)\Delta_i + \delta_i \quad i \in \mathbb{Z},$$

wo  $\delta_i = [T(y_{i+1})]^{-1} [P(y_i) - y_{i+1}]$ .  $\delta_i$  ist klein, weil  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  eine  $\varepsilon$ -Pseudobahn ist, d.h. es gilt  $|P(y_i) - y_{i+1}| \leq \varepsilon$ . Als nächstes ersetzen wir  $y_{i+1}$  in  $T(y_{i+1})$  durch  $P(y_i)$ . Das ist gerechtfertigt, weil die Differenz zwischen  $y_{i+1}$  und  $P(y_i)$  klein ist und weil  $[T(y_{i+1})]^{-1}$  dann noch mit  $\Delta_i$  multipliziert wird. Das ergibt

$$\Delta_{i+1} \approx [T(P(y_i))]^{-1} dP(y_i) T(y_i) \Delta_i + \delta_i \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Führen wir eine kleine Hilfsrechnung durch. Es sei  $[T(P(x))]^{-1} dP(x) T(x) \Delta =: d$ , also  $dP(x) T(x) \Delta = T(P(x)) d$ . Mit der Eigenschaft i) einer hyperbolischen Menge ergibt sich für die linke Seite

$$\begin{aligned} dP(x) T(x) \Delta &= dP(x) [t^+(x) t^-(x)] \Delta \\ &= [dP(x) t^+(x) dP(x) t^-(x)] \Delta \\ &= [\lambda^+(x) t^+(P(x)) \lambda^-(x) t^-(P(x))] \Delta \\ &= [t^+(P(x)) t^-(P(x))] \begin{bmatrix} \lambda^+(x) & 0 \\ 0 & \lambda^-(x) \end{bmatrix} \Delta. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite folgt:  $[t^+(P(x)) t^-(P(x))] d$  und somit

$$d = \begin{bmatrix} \lambda^+(x) & 0 \\ 0 & \lambda^-(x) \end{bmatrix} \Delta.$$

Unsere letzte "Gleichung" vereinfacht sich demnach und lautet jetzt

$$\Delta_{i+1} \approx \begin{bmatrix} \lambda^+(y_i) & 0 \\ 0 & \lambda^-(y_i) \end{bmatrix} \Delta_i + \delta_i.$$

Wir setzen  $\lambda_i^+ := \lambda^+(y_i)$ ,  $\lambda_i^- := \lambda^-(y_i)$  und erinnern, dass

$$|\lambda_i^+| \leq \vartheta, \quad |\lambda_i^-| \geq \frac{1}{\vartheta} \quad i \in \mathbb{Z}$$

gilt. Weiter führen wir Komponenten für  $\Delta_i$  und  $\delta_i$  ein:  $\Delta_i = (\Delta_i^+, \Delta_i^-)^T$ ,  $\delta_i = (\delta_i^+, \delta_i^-)^T$ . Damit lautet die obige Beziehung, die wir nun als Gleichung schreiben:

$$\Delta_{i+1}^+ = \lambda_i^+ \Delta_i^+ + \delta_i^+, \quad \Delta_{i+1}^- = \lambda_i^- \Delta_i^- + \delta_i^- \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Es handelt sich um zwei unendliche lineare Gleichungssysteme, einerseits für die  $\Delta_i^+$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , und andererseits für die  $\Delta_i^-$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . Es ist nicht schwer einzusehen, dass jedes dieser Gleichungssysteme genau eine Lösung besitzt, die einer Abschätzung der Form  $|\Delta_i^\pm| \leq c\varepsilon$  genügt, wobei  $c$  eine von  $i$  und  $\varepsilon$  unabhängige Konstante ist. Wir zeigen, wie man z.B.  $\Delta_0^+$  erhält. Aus den obigen Rekursionsgleichungen folgt:

$$\Delta_0^+ = \delta_{-1}^+ + \lambda_{-1}^+ \Delta_{-1}^+, \quad \Delta_{-1}^+ = \delta_{-2}^+ + \lambda_{-2}^+ \Delta_{-2}^+$$



also

$$\Delta_0^+ = \delta_{-1}^+ + \lambda_{-1}^+ \delta_{-2}^+ + \lambda_{-1}^+ \lambda_{-2}^+ \Delta_{-2}^+.$$

Mit  $\Delta_{-2}^+ = \delta_{-3}^+ + \lambda_{-3}^+ \Delta_{-3}^+$  folgt

$$\Delta_0^+ = \delta_{-1}^+ + \lambda_{-1}^+ \delta_{-2}^+ + \lambda_{-1}^+ \lambda_{-2}^+ \delta_{-3}^+ + \lambda_{-1}^+ \lambda_{-2}^+ \lambda_{-3}^+ \Delta_{-3}^+.$$

Natürlich vermutet man, dass gilt

$$\Delta_0^+ = \delta_{-1}^+ + \lambda_{-1}^+ \delta_{-2}^+ + \lambda_{-1}^+ \lambda_{-2}^+ \delta_{-3}^+ + \dots$$

Tatsächlich konvergiert die Reihe geometrisch, weil die  $|\lambda_i^+|$  durch  $\vartheta < 1$  beschränkt sind und die  $\delta_i^+$  einer Abschätzung der Form  $|\delta_i^+| \leq c' \varepsilon$  genügen, wo  $c'$  eine von  $i$  und  $\varepsilon$  unabhängige Konstante bezeichnet. In ähnlicher Weise erhält man Reihen für die übrigen  $\Delta_i^+$  und es ist nicht schwierig, nachzuprüfen, dass das unendliche lineare Gleichungssystem erfüllt wird.

Führt man die vernachlässigten Terme mit, erhält man das Resultat mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation, cf. die Konstruktion der Funktion  $s_+$  im Satz über die lokale stabile und instabile Mannigfaltigkeit.

## Eine Anwendung

In diesem abschliessenden Abschnitt stellen wir den Zusammenhang zwischen Differentialgleichungen und diskreten dynamischen Systemen her und untersuchen eine (typische) Differentialgleichung, auf die sich der Satz von Poincaré-Smale anwenden lässt.

Wir betrachten ein zwei-dimensionales gewöhnliches Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (14)$$

Dabei ist also  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , hinreichend regulär,  $' = d/dt$ . Ferner setzen wir voraus, dass  $f$  in  $t$   $2\pi$ -periodisch ist:

$$f(t + 2\pi, x) = f(t, x) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (15)$$

Man spricht von *ebenen periodischen Systemen*. Die Periodizitätseigenschaft hat eine wichtige Konsequenz, wie sich bald zeigen wird. Wir bezeichnen mit  $\Phi(t, x)$  diejenige Lösung von (14), die sich zur Zeit  $t = 0$  am Punkt  $x$  befindet, d.h. es gilt  $\Phi(0, x) = x$ .

Aufgrund der Periodizitätseigenschaft von  $f$  folgt, dass mit  $\Phi(t, x)$  für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  auch  $\Phi(t + k2\pi, x)$  Lösung von Gl. (14) ist; da Gl. (14) zu jeder Anfangsbedingung genau eine Lösung besitzt, folgt

$$\Phi(t + k2\pi, x) = \Phi(t, \Phi(k2\pi, x)) \quad (16)$$

für beliebiges  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ . Definieren wir nun die sog. *Perioden-* oder *Poincaré-Abbildung* von (14)

$$P : x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Phi(2\pi, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Natürlich definiert  $(\mathbb{R}^2, P)$  ein diskretes dynamisches System. Der springende Punkt ist, dass seine Bahnen *stroboskopische Bilder* der Lösungen des ebenen periodischen Systems (14) sind; aus (16) folgt nämlich

$$\Phi(n \, 2\pi, x) = P^n(x) \quad (17)$$

für  $n \in \mathbb{Z}$  und  $x \in \mathbb{R}^2$ . Damit ist klar, dass es genügt, das diskrete dynamische System  $(\mathbb{R}^2, P)$  zu betrachten, um sich einen Überblick über das Verhalten der Lösungen des Differentialgleichungssystems (14) zu verschaffen. Dieser Zusammenhang ist eine der wesentlichen Motivationen für das Studium ebener diskreter dynamischer Systeme.

Die interessante Frage ist nun natürlich, unter welchen Bedingungen an  $f$  die Abbildung  $P$  ein hyperbolisches Gleichgewicht und einen dazu transversalen homoklinen Punkt besitzt. Im folgenden beschreiben wir eine solche Situation. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\ddot{y} - y + 2y^3 = \mu \cos t, \quad (18)$$

wobei  $\mu \in \mathbb{R}$  ein Parameter ist. Gl. (18) ist ein sehr vereinfachtes Modell für die Beschreibung der Schwingungen eines Balkens, cf. Holmes (1979). Indem wir  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  setzen, können wir (18) in der Form (14) schreiben

$$\dot{x} = f(t, x) = f^0(x) + \mu f^1(t, x) \quad (19)$$

mit  $f^0(x) = (x_2, x_1 - 2x_1^3)^T$ ,  $f^1(t, x) = (0, \cos t)^T$ . Weil das Differentialgleichungssystem (19) vom Parameter  $\mu$  abhängt, hängt auch die Lösung und die Periodenabbildung von  $\mu$  ab; um das zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir  $\Phi_\mu$  und  $P_\mu$ . Im folgenden werden wir uns für kleine Werte von  $|\mu|$  interessieren und deshalb untersuchen wir zunächst  $\Phi_0(t, x)$  und  $P_0(x)$ . In Fig. 10 ist das sog. Phasenportrait von Gl. (19) für  $\mu = 0$  gezeichnet, d.h. die Kurven  $x = \Phi_0(t, \xi)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , für einige Werte von  $\xi$ .

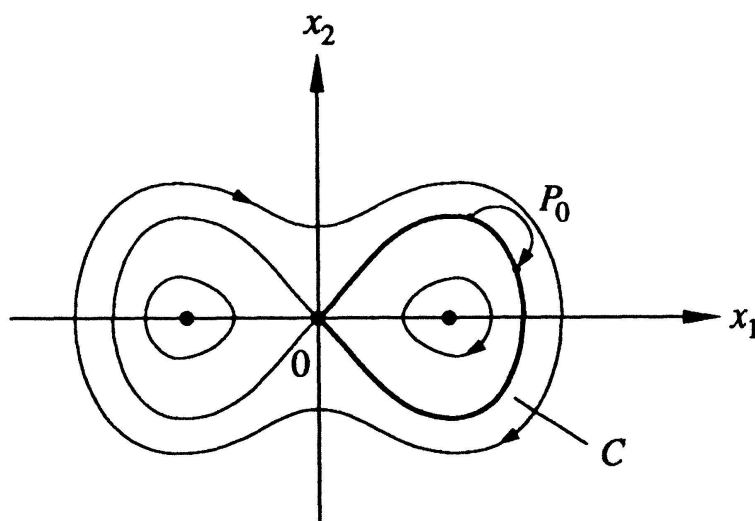


Fig. 10

Offensichtlich ist  $x = (x_1, x_2)^T = (0, 0)^T = 0$  eine Lösung von (19) für  $\mu = 0$ , und zwar eine Gleichgewichtslösung; d.h. es gilt  $\Phi_0(t, 0) = 0$  und folglich  $P_0(0) = 0$ , d.h. 0 ist

*Gleichgewicht für  $P_0$ .* Betrachten wir nun die Linearisierung  $\dot{x} = df^0(0)x$  von (19) für  $\mu = 0$ , die entsteht, indem man in der Entwicklung von  $f^0(x) = df^0(0)x + \dots$  die höheren Terme weglässt; d.h. wir untersuchen das lineare System

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{cases} . \quad (20)$$

(20) besitzt offenbar die folgende Fundamentallatrixlösung

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} .$$

Weil  $d\Phi_0(t, 0) = \chi(t)$  gilt, folgt  $dP(0) = \chi(2\pi)$  und somit  $\lambda_{\pm} = e^{\pm 2\pi}$ , d.h. 0 ist *hyperbolisches Gleichgewicht* von  $P_0$ . Betrachten wir als nächstes die Funktion

$$X(t) = \left( \frac{1}{\cosh t}, -\frac{\tanh t}{\cosh t} \right)^T .$$

Es ist nicht schwierig, nachzuprüfen, dass  $X(t)$  eine Lösung der Gl. (19) für  $\mu = 0$  ist. Überdies gilt  $X(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \pm\infty$ . Die Lösungskurve  $C : x = X(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ist in Fig. 10 fett gezeichnet. Sie heisst *Separatrixlösung*. Natürlich gilt für jedes  $t \in \mathbb{R}$

$$P_0^{\pm 1}(X(t)) = X(t \pm 2\pi) . \quad (21)$$

Aufgrund von Gl. (21) folgt:  $C$  ist invariant bezüglich  $P_0$  und  $P_0^{-1}$ , und für jedes  $x \in C$  gilt einerseits  $P_0^i(x) \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow +\infty$  und andererseits  $P_0^i(x) \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow -\infty$ , d.h.  $C$  ist *sowohl* Teil der globalen stabilen Mannigfaltigkeit von 0 (bezüglich  $P_0$ ), als auch Teil der globalen instabilen Mannigfaltigkeit von 0 (bezüglich  $P_0$ ). Das bedeutet: Jeder Punkt  $x$  von  $C$  ist homokliner Punkt zu 0 bezüglich  $P_0$ , aber *keiner* ist transversaler homokliner Punkt! Dies ist typisch für Abbildungen, die durch autonome, d.h. von  $t$  unabhängige, Differentialgleichungen erzeugt werden (man beachte, dass  $P_0$  zu (19) mit  $\mu = 0$  gehört; für  $\mu = 0$  reduziert sich (19) auf das autonome System  $\dot{x} = f^0(x)$ ; die Zeitabhängigkeit entsteht erst durch den Term  $\mu f^1(t, x)$ ). Die Frage ist nun, was das Zuschalten der Störung  $\mu f^1(t, x)$  bewirkt. Auskunft gibt der folgende allgemeine Satz.

### Satz 6

#### Voraussetzungen.

- (i)  $f^0$  (cf. Gl. (19)) ist hamiltonsch, d.h. es gibt eine skalare Funktion  $H(x)$ , so dass gilt

$$f^0(x) = \left( \partial H / \partial x_2, -\partial H / \partial x_1 \right)^T .$$

- (ii) 0 ist hyperbolische Gleichgewichtslösung von (19) für  $\mu = 0$ , d.h. es ist  $f^0(0) = 0$  und für die Eigenwerte  $\gamma_{\pm}$  von  $df^0(0)$  gilt  $\gamma_- < 0 < \gamma_+ = -\gamma_-$  (man beachte, dass die Spur von  $df^0$  wegen (i) verschwindet).
- (iii) 0 besitzt eine Separatrixlösung, d.h. es gibt eine Lösung  $X(t)$  von Gl. (19) für  $\mu = 0$ , für die

$$X(t) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad t \rightarrow \pm\infty$$

gilt.

(iv) *Die sog. Melnikov-Funktion*

$$d : \sigma \in \mathbb{R} \rightarrow d(\sigma) := \int_{-\infty}^{\infty} f^0(X(t)) \wedge f^1(t - \sigma, X(t)) dt$$

*besitzt eine nicht-degenerierte Nullstelle, d.h. es gibt ein  $\sigma^*$  mit  $d(\sigma^*) = 0$  und  $d'(\sigma^*) \neq 0$ . ( $\wedge$  bezeichnet das Vektorprodukt in der Ebene, i.e. die Fläche des Parallelogramms, das zwei Vektoren aufspannen.)*

**Behauptung.** Für  $\mu \neq 0$ ,  $|\mu|$  hinreichend klein, besitzt die Poincaré-Abbildung  $P_\mu$  zu (19) ein hyperbolisches Gleichgewicht  $x^\mu$  (in der Nähe von 0) und einen dazu transversalen homoklinen Punkt  $z^\mu$  (in der Nähe von  $X(\sigma^*)$ ); d.h.  $P_\mu$  erfüllt die Voraussetzung des Satzes von Poincaré-Smale.

Die Voraussetzung (iv) garantiert also, dass die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit von  $x^\mu$  für  $\mu \neq 0$ ,  $|\mu|$  hinreichend klein, nicht zusammenfallen (wie für  $\mu = 0$ ), sondern sich in der Nähe von  $X(\sigma^*)$  transversal schneiden. Tatsächlich ist die Melnikov-Funktion  $d$  einfach ein Mass für den Abstand zwischen den beiden Mannigfaltigkeiten. Aus Platzgründen verzichten wir auf die Herleitung von Satz 6, die der interessierte Leser z.B. in Kirchgraber und Stoffer (1990) finden kann.

Wenden wir Satz 6 abschliessend auf Gl. (18) an.  $f^0$  ist hamiltonsch mit  $H = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^4$ . Dass die Voraussetzungen (ii), (iii) erfüllt sind, wissen wir schon. Für die Melnikov-Funktion erhält man

$$d(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t - \sigma) X_2(t) dt = -\frac{\pi}{\cosh(\pi/2)} \sin \sigma.$$

Offenbar ist Voraussetzung (iv) mit  $\sigma^* = 0$  erfüllt. Für  $\mu \neq 0$ ,  $|\mu|$  hinreichend klein, zeigt Gl. (18) demzufolge chaotisches Verhalten.

Die Anwendung von Satz 6 auf das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt findet man in Kirchgraber und Stoffer (1990).

## Literaturverzeichnis

- D.V. Anosov: Geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature, Proc. Steklov Inst. Math. 90, 1967.
- R. Bowen: On Axiom A Diffeomorphisms, NSF-CBMS Regional Conference Series 35, AMS, 1978.
- P. Hartman: *Ordinary Differential Equations*, 1982
- R. Holmes: A nonlinear oscillator with a strange attractor, Phil. Trans. Roy. Soc. 292, 1979.
- U. Kirchgraber und D. Stoffer: On the definition of chaos, Z. Angew. Math. Mech. 69, 1989.
- U. Kirchgraber und D. Stoffer: Chaotic Behaviour in Simple Dynamical Systems, SIAM Review 32, 1990.
- U. Kirchgraber: Mathematik im Chaos: Ein Zugang auf dem Niveau der Sekundarstufe II, Mathematische Semesterberichte 39, 1992.
- J. Moser: *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, 1973.
- S. Smale: Differentiable Dynamical Systems, Bull. AMS 73, 1967.

U. Kirchgraber  
Mathematik, HG G 37.3  
ETH Zentrum  
CH-8092 Zürich