Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 47 (1992)

Rubrik: Bücher und Computersoftware

El. Math., *47*, (1992) 0013-6018/92/030133-04$1.50 + 0.20/0

Bücher und Computersoftware

K. Ireland, M. Rosen: A Classical Introduction to Modern Number Theory. Second edition. Graduate Texts in Mathematics 84. 394 Seiten, DM 98,–. Springer-Verlag 1990.

Dies ist die zweite, erweiterte Auflage eines Buches über eine Einführung in die moderne Zahlentheorie, welches zum ersten Mal im Jahre 1980 erschien. Die vorliegende Ausgabe wurde um die Kapitel 19 und 20 ergänzt, auf welche im folgenden vor allem eingegangen werden soll. In den Kapiteln 1 bis 18 wird zunächst das Rechnen mit Kongruenzen und das quadratische Reziprozitätsgesetz behandelt. Später werden die Riemannsche ζ-Funktion und die Dirichletschen L-Reihen eingeführt und der Satz über Primzahlen in einer arithmetischen Progression bewiesen. An geeigneter Stelle wird ein Abriss über die algebraische Zahlentheorie gegeben; insbesondere werden quadratische Zahlenkörper und Kreisteilungskörper diskutiert. Im restlichen Teil des Buches wird der Leser mit der Behandlung von Problemen der arithmetischen Geometrie vertraut gemacht. Zunächst werden die Lösungen algebraischer Gleichungen über endlichen Körpern und damit auch die Kongruenzzetafunktion studiert. Anschliessend werden Lösungen gewisser algebraischer Gleichungen im ganzzahligen bzw. rationalzahligen Bereich untersucht. Kapitel 18 führt schliesslich in die Theorie elliptischer Kurven $E/\mathbb{Q}$ ein.

Das neue Kapitel 19 ist eine ausgezeichnete Fortsetzung; hier wird mit minimalem Aufwand ein vollständiger Beweis des Satzes von Mordell-Weil gegeben: Zunächst werden die Additionsformeln auf E bestimmt, danach wird die Endlichkeit der Gruppe $E/2E$ bewiesen, aus welcher mit dem üblichen Descent-Argument der Satz von Mordell-Weil folgt, dass die Menge $E(\mathbb{Q})$ der $\mathbb{Q}$-rationalen Punkte auf E eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist.

In Kapitel 20 erhält der Leser eine Übersicht über die neuesten Fortschritte in der arithmetischen Geometrie: Zuerst folgt eine genaue Formulierung des Satzes von Faltings (Vermutung von Mordell), dass nämlich die Menge der K-rationalen Puntke einer projektiv algebraischen glatten Kurve C vom Geschlecht $g > 1$, definiert über einem algebraischen Zahlkörper K, endlich ist. Die Komplexität des Falting'schen Beweises lässt leider keinen Überblick über den Beweisgang zu. Es sei aber erwähnt, dass nach dem Erscheinen dieses Buches von E. Bombieri (cf. [1]) ein elementarer Beweis des Satzes von Faltings gefunden wurde. Eine Übersicht über die neuesten Entwicklungen auf diesem Gebiet wird als Anhang in der neuen Auflage des Buches [2] über rationale Punkte von G. Faltings und G. Wüstholz erscheinen.

In der zweiten Hälfte von Kapitel 20 werden dann die neuesten Resultate über die Arithmetik elliptischer Kurven diskutiert, insbesondere die Sätze von Kolyvagin, Rubin und Gross-Zagier, welche zusammengenommen für modulare elliptische Kurven $E/\mathbb{Q}$ in gewissen Fällen die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer bestätigen. Beide Kapitel besitzen eine historische Übersicht und ein ausführliches Literaturverzeichnis.

[1] Bombieri, E.: The Mordell Conjecture Revisited, Annali Scuola Normale Superiore Pisa, Cl. Sci., IV, 17, 615–640 (1990).

[2] Faltings, G./Wüstholz, G. et al.: Rational Points, 3. Auflage, Aspects of Mathematics, Vieweg-Verlag, Braunschweig (1992).

J. Kramer

Miles Reid: Undergraduate Algebraic Geometry. London Math. Soc. Student Texts, No 12, Cambridge Univ. Press 1988, Cambridge

Es ist die erklärte Absicht des Autors, nur die fundamentalsten Grundbegriffe der Algebraischen Geometrie einzuführen (Affine Varietäten, Nullstellensatz, Zariski-Topologie, reguläre und rationale Funktionen, Morphismen und rationale Abbildungen, projektive Varietäten, birationale Äquivalenz, Tangentialraum, Dimension).

Die Besonderheit des Büchleins liegt also nicht in seiner begrifflichen Dichte oder Vollständigkeit, sondern in der Art und Weise, wie der Leser an die Grundkonzepte der Algebraischen Geometrie herangeführt wird. Dies geschieht nämlich durch eine Reihe konkreter, anschaulich dargestellter und nicht-trivialer Beispiele (Kegelschnitte, ebene Kubiken, Hyperflächen, Aufblasungen, kubische Flächen). Die zahlreichen Übungsaufgaben sind vom selben Typ und sind wirklich bestens geeignet, dem Lernenden ein konkretes Bild des Stoffes zu geben.

Nebst den für den Autor typischen Spässen sind seine Zwischenbemerkungen auch für den fortgeschritteneren Leser eine interessante Anregung. Insbesondere im einführenden Abschnitt "Woffle" sind Hinweise enthalten, die nicht nur für den Anfänger lesenswert sind. Ein Blick in den Abschnitt "Final Comments" ist sogar dem Spezialisten zu empfehlen — auch dann, wenn seine Sicht der Dinge von der des Autors abweicht (was leicht der Fall sein könnte).

Im Vergleich zu den unten angeführten einführenden Lehrbüchern [1]–[8] lässt sich sagen:

- Reids Text ist in Stil und Anschaulichkeit vergleichbar mit [1], enthält aber — entsprechend dem viel geringeren Umfang — wesentlich weniger Stoff.
- In [2] wird weniger Vorbildung vorausgesetzt und mehr Stoff behandelt, natürlich ebenfalls bei wesentlich grösserer Seitenzahl.
- Vergleichbar in Umfang und Anspruch ist [3], allerdings etwas theoretischer und abstrakter.
- Das im Stil vergleichbare Buch [4] ist aus dem Blickwinkel der komplexen Analysis geschrieben und setzt entsprechend mehr Grundkenntniss in diesem Gebiet voraus.
- Im ebenfalls sehr klar und anschaulich geschriebenen Buch [5] wird der Kommutativen Algebra ein wesentlich grösseres Gewicht gegeben.
- Das erste Kapitel von [6] bietet eine sehr dichte Einführung in die Grundbegriffe der Algebraischen Geometrie, stellt aber an den Leser höhere Ansprüche.
- In [7] wird der "halb-klassische" garbentheoretische Zugang im Sinne von Serre gewählt. Dabei wird vom Leser grössere Vertrautheit mit der Algebra verlangt.
- In [8] wird, bei wesentlich grösserem Stoff- und Seitenumfang ebenfalls der klassische Zugang gewählt. Dabei wird in [8] mehr an Algebra vorausgesetzt.

Reids Büchlein ist hervorragend geeignet für Studenten, welche Grundkenntnisse der Algebra erworben haben und einen ersten Blick in die Algebraischen Geometrie werfen wollen. Dieser Blick wird sicher viele Leser dazu verlocken, tiefer in die Materie einzudringen. Genau diese "Verführung" zur Algebraischen Geometrie scheint die Absicht des Autors zu sein, und sie ist ihm hervorragend gelungen.

[1] Brieskorn, E., Knörrer, H., Ebene algebraische Kurven, Birkhäuser, Basel 1981

[2] Brodmann, M., Algebraische Geometrie — eine Einführung, Basler Lehrbücher Nr. 1, Birkhäuser, Basel 1989

[3] Fulton, R., Algebraic Curves, Benjamin, New York 1969

[4] Kendig, K., Elementary Algebraic Geometry, Springer, New York 1977

[5] Kunz, E., Einführung in die Algebraische Geometrie und Kommutative Algebra, Vieweg, Braunschweig 1980

[6] Hartshorne, R., Algebraic Geometry (Chapter I), Springer, New York 1977

[7] Mumford, D., Introduction to Algebraic Geometry ("the Red Book"), Harvard University Press 1965

[8] Shafarevich, I.R., Basic Algebraic Geometry, Springer, New York 1974

M. Brodmann, Universität Zürich

R.-H. Schulz: Codierungstheorie, Eine Einführung, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1991;
ISBN 3-528-06419-6; DM 38.–

Das Werk von etwas mehr als zweihundert Seiten ist aus einer vom Autor an der Freien Universität Berlin gehaltenen Vorlesung entstanden. Es bietet eine angenehm lesbare, auch zum Selbststudium geeignete Einführung in die Codierungstheorie für Studenten und Lehrer der Mathematik und Informatik, die über einige (wenige!) Vorkenntnisse in elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung, Algebra und Linearer Algebra verfügen. Die vorausgesetzten Kenntnisse aus diesen drei Gebieten sind in einem zweckmässigen Anhang zusammengestellt.

Die Wahl des besprochenen Stoffes bewegt sich mehr oder weniger in dem für Bücher dieser Art üblichen Rahmen. Formal und inhaltlich ist aber der behandelte Stoff viel breiter dargelegt als in anderen Werken mit vergleichbarer Zielsetzung (vergleiche etwa van Lints "Introduction to Coding Theory") und damit geeignet, auch Leser mit (noch) beschränkten mathematischen Kenntnissen in die Grundlagen des faszinierenden Gebietes der Codierungstheorie einzuführen.

Das vorliegende Buch behandelt Fragen der Digitalisierung von Bild und Ton (für elektronische Kommunikation), Methoden der Datenkompression (Quellencodierung), ausserdem Prüfzeichenverfahren, fehlererkennende und fehlerkorrigierende Codes sowie klassische und öffentliche Verschlüsselungsverfahren. Jedes Kapitel enthält neben einer Einführung ins entsprechende Teilgebiet eine Vielzahl von Literaturhinweisen zum selbständigen Weiterlesen. Die Abschnitte des Buches, in denen weitergehende Kenntnisse der Algebra (zumeist aus der Theorie der endlichen Körper) herangezogen werden, sind speziell gekennzeichnet. In ihnen wird unter anderem die Theorie der zyklischen Codes, zum Beispiel als Anwendung der diskreten Fouriertransformation, entwickelt. In einem Anhang des Werkes werden noch verschiedene Zusammenhänge zwischen Codes und endlichen Geometrien dargelegt. Der behandelte Stoff ist übersichtlich gegliedert und die verwendeten Begriffe sind gut motiviert und an zahlreichen durchgerechneten Beispielen erläutert. Vermutlich hätte es jedoch der Studierende an mehreren Stellen noch geschätzt, einige erklärende Kommentare zu den verschiedenen Literaturhinweisen zu erhalten.

Der Leser wird zweifellos nach der Lektüre des Buches den Wunsch verspüren, einige der im Buch nur zitierten Resultate aus der Informationstheorie, der Codierungstheorie oder der Kryptologie noch genauer (mit Beweis?) kennenzulernen und sich mit der weiterführenden, umfangreichen Literatur vertraut zu machen. Damit dürfte das Buch aber wohl eines seiner wesentlichen Ziele erreicht haben. Alles in allem handelt es sich um ein für Studierende wie Dozenten nützliches Buch. Hans-Peter A. Künzi

E. Hlawka, J. Schoissengeier, R. Taschner. Geometric and Analytic Number Theory. 238 Seiten, Springer, Berlin/New York; ISBN 3-540-52016-3 bzw. 0-387-52016-3

Das Buch behandelt in klassischer Weise eine Auswahl klassischer Themen der Zahlentheorie (diophantische Approximation, Gleichverteilung modulo 1, Geometrie der Zahlen, arithmetische Funktionen, den Primzahlsatz, Charaktere, das quadratische Reziprozitätsgesetz), sowie einen neueren Algorithmus zur Faktorisierung von Polynomen und seine Anwendungen. Alle diese Themen werden relativ ausführlich behandelt. Zu erwähnen sind die umfangreichen Anmerkungen und Übungen (mit detaillierten Lösungen) zu jedem Kapitel, in denen oft weitere interessante Resultate präsentiert werden. Das Buch kann Studierenden, die sich mit der Zahlentheorie vertraut machen wollen, empfohlen werden, setzt es doch ausser den Grundlagen in Analysis und Algebra keine weiteren Kenntnisse voraus. P. Thurnheer

C.H. Clemens, M.A. Clemens, Geometry for the Classroom; 335 Seiten, DM 48,– (gebunden) bzw. DM 38,– (broschiert); Springer 1991 (ISBN 3-540-97564-0 bzw. 3-540-97565-9)

Nach Angabe der Autoren ist das Buch für College-Studenten und Sekundarlehrer gedacht. Ein getrennter Lösungsband ist verfügbar.

Intuition

Das Studium dieses Kapitels hat mir Freude bereitet. Es wird viel experimentell gearbeitet, an manchen Stellen auch lokal deduziert. Axiome gibt es nicht! Alles entsteht langsam — fast spielerisch — Schritt um Schritt (Musterbeispiel: Kreisinhalt).

Die wesentlichen Aussagen der klassischen Elementargeometrie sind — wenn auch ohne irgendeinen inneren Zusammenhang — behandelt. Manch anspruchsvoller Satz (Ceva, Ptolemäus, Additionstheoreme,...) wurde leider in die Übungen verwiesen. Einen Höhepunkt bilden sicher die Geometrie auf der Kugel, sowie die Geometrie im "hyperbolischen Land". So wichtig es ist, zu zeigen, daß "andere" Geometrien existieren, so wichtig wäre es auch, sinnvolle Motivationen zu geben. Im Poincaré-Modell fallen Definitionen (Längenmaßzahl) einfach vom Himmel.

Konstruktion

Da werden zunächst elementarste Konstruktionen (Winkelhalbierende, Lotfällen,...) in epischer Breite beschrieben. Dieser Teil scheint nicht für College-Studenten sondern eher für Kinder geeignet zu sein. Nach den üblichen Konstruktionen "besonderer" Punkte im Dreieck wird die Konstruktion regulärer Polygone in Angriff genommen. Wenn man die vielen hübschen Arbeiten zum regulären 5-Eck kennt, muß der entsprechende Abschnitt dieses Buches enttäuschen. Da wird ein Konstruktionsrezept angegeben und die Theorie in die Übungen (Vorzeichenfehler) geschoben. Wie ein Wunder kommt dabei der goldene Schnitt heraus. Weder die nette, aber völlig unmotivierte Näherungskonstruktion eines Schülers zum regulären 7-Eck, noch die vagen Andeutungen über reguläre Polygone, die nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, stimmen mich versöhnlicher. Schlimmer wird es sogar noch bei den regulären Polyedern. Das sind wirklich nur Rezepte aus Großmutters Kochbuch. "Man nehme..." Mir fehlt der mathematische Hintergrund. Warum gibt es genau 5 platonische Körper — nicht mehr und nicht weniger? Das wäre ein echtes Problem! Über Mängel dieser Art können auch Ausblicke (Polyedersatz) nicht hinwegtäuschen.

Die Lektüre dieses Kapitels war nicht sehr erfreulich. Positiv empfand ich lediglich, daß Schüler zu eigenem Tun angehalten werden. Bau Dir Dein eigenes Polyeder! Aber auch dazu gibt es viel Besseres.

Beweis
Letztlich geht es um die altehrwürdige analytische Geometrie. In Form dreier Axiome werden den Punkten reelle Zahlen zugeordnet und damit Begriffe — wie etwa die Längenmaßzahl — definiert (Numerierungsfehler bei den Definitionen). Zentrales Thema sind die längentreuen Abbildungen der Ebene. Es wird — zum Teil recht umständlich — nachgewiesen, daß es genau zwei Klassen solcher Abbildungen gibt. Gleichsinnige: Drehung um den Ursprung, mit Translation. Gegensinnige: Spiegelung an X-Achse, mit Drehung um Ursprung, mit Translation. Mir gefällt, daß beim zeichnerischen Zusammensetzen solcher Abbildungen immer wieder mit Transparentpapier gearbeitet wird. Insgesamt gibt es 21 Theoreme, die mit erheblichem Aufwand analytisch bewiesen werden. Die getroffene Auswahl dieser Sätze bleibt mit schleierhaft. Ich vermisse — wieder einmal — den roten Faden.

Auch dieses Kapitel konnte mich nicht zufriedenstellen.

Computer
Zunächst wird eine Begründung für die Verwendung der Programmiersprache LOGO und der "Turtle"-Graphik gegeben. Dann folgen viele Programme, mit denen man Konstruktionen ("besondere" Punkte im Dreieck) und Rechnungen aus früheren Kapiteln sichtbar machen kann. Besonders hübsch finde ich das Zusammensetzen von Abbildungen (nachträgliche Motivation für Kapitel 3?). Krönender Abschluß ist die Konstruktion zur Kreisspiegelung und damit auch die Konstruktion der Geraden durch zwei Punkte im "hyperbolischen Land".

Computerarbeit dieser Art ist künftig für die Schule unverzichtbar. Schüler finden sie sehr anregend. Es sollte aber auch deutlich werden, daß der Computer hier nur als Zeichenknecht eingesetzt wird — echte Mathematik ist das noch lange nicht.

Fazit
Dieses Buch unterscheidet sich von entsprechenden im europäischen Raum: Ungewöhnliches Format; Freier Raum zum Bearbeiten der Übungsaufgaben; Art der Überschriften; Selber entdecken; Dauernder Wechsel der Methode (Fülle aus, Nehme den Rechner,...); Fehlen einer Leitidee; "Man muß es wirklich tun";... Wir sollten Vieles für unseren Unterricht übernehmen — bei weitem aber nicht Alles. Jeder praktizierende Geometrielehrer müßte dieses "Arbeitsbuch" kennen und sollte es im Unterricht erproben. H. Zeitler, Bayreuth

Typesetting & Layout: *mathScreen online, CH-4056 Basel*