

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 47 (1992)  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Aufgaben

### Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Februar 1993 an:

- Dr. P. Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma  
oder
- Dr. H. Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

**Aufgabe 1065:** Genau für welche Winkelwerte  $\varphi$  sind die folgenden Vektoren (mit  $s := 2 \cdot \sin \varphi$ ) linear abhängig?

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ s \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{v}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

Hansjürg Stocker, Wädenswil, CH

**Aufgabe 1066:** Für die verallgemeinerte unendliche geometrische Reihe

$$S_m(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k^m \cdot x^k \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

kennt man die Summenfunktion, nämlich  $S_m(x) = \frac{A_m(x)}{(1-x)^{m+1}}$  mit den "Euler-Polynomen" (Eulerian Polynomials)  $A_0(x) = x$  und  $A_m(x) = \sum_{n=1}^m a_{m;n} \cdot x^n$  ( $m > 0$ ), deren Koeffizienten  $a_{m;n}$  Euler-Zahlen (Eulerian Numbers) heissen (nicht zu verwechseln mit den Euler'schen Zahlen  $E_p$  :  $E_1 = E_2 = 1$ ,  $E_3 = 5$  usw.). Die Euler-Zahlen genügen der folgenden Rekursionsformel:  $a_{1;1} = 1$ ,  $a_{m;n} = 0$  für  $n \leq 0$  und  $n > m$ ,  $a_{m;n} = (m - n + 1) \cdot a_{m-1;n-1} + n \cdot a_{m-1;n}$  und lassen sich auch explizit angeben:

$$a_{m;n} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{m+1}{j} \cdot (n-j)^m .$$

Ordnet man die Euler-Zahlen  $a_{m;n}$  in einer Matrix an mit  $m$  als Zeilen- und  $n$  als Spaltenindex, so ergibt sich für  $m \leq 6$  folgendes symmetrisches Zahlendreieck:

m	n	1	2	3	4	5	6
1		1					
2	1	1	1				
3	1	1	4	1			
4	1	1	11	11	1		
5	1	1	26	66	26	1	
6	1	1	57	302	302	57	1

Bei gewissen Modellen in der Theorie der stochastischen Prozesse tritt gelegentlich die zur verallgemeinerten geometrischen Reihe gehörige endliche Summe auf. Sie wird in der Regel einfach stengelassen. Ein expliziter Ausdruck für die Summenfunktion scheint nicht bekannt zu sein. Man zeige nun:

Für die endliche Summe  $G_m(x) := \sum_{k=0}^N k^m \cdot x^k$  gilt die symbolische Gleichung:

$$G_m(x) = S_m(x) - x^N \cdot [N + S(x)]^{\{m\}} \text{ für } m = 0, 1, 2, \dots$$

Der symbolische Exponent  $\{m\}$  dient lediglich dem "Ausmultiplizieren" nach der binomischen Formel und hat folgende Bedeutung: In bezug auf  $N$  handelt es sich um einen gewöhnlichen Exponenten, bezogen auf  $S(x)$  ist er als Index aufzufassen, also:

$$\begin{aligned} G_0(x) &= S_0(x) - x^N \cdot S_0(x) \\ G_1(x) &= S_1(x) - x^N \cdot [N \cdot S_0(x) + S_1(x)] \\ G_2(x) &= S_2(x) - x^N \cdot [N^2 \cdot S_0(x) + 2N \cdot S_1(x) + S_2(x)] \\ G_3(x) &= S_3(x) - x^N \cdot [N^3 \cdot S_0(x) + 3N^2 \cdot S_1(x) + 3N \cdot S_2(x) + S_3(x)] \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Renate Golombek, Marburg, D

### Lösungen

**Aufgabe 1055.** Man betrachte das hypothetische Tonsystem, das aus einer verhältnismäßigen Teilung der Oktave in  $n$  Intervalle hervorgeht ( $n \geq 2$ ; charakteristisches Verhältnis  $\sqrt[n]{2}$ ) und denke sich dann analog wie beim Zwölftonsystem  $n$ -Ton-Reihen gebildet.

- a) Man zeige: Allintervall-Reihen existieren nur für gerade Indizes  $n$ .
- b) Man zeige: Die Differenzen-Reihen zu den  $n$ -Ton-Allintervall-Reihen haben stets ein Anfangsglied, das von  $\frac{1}{2}n$  verschieden ist.
- c) Anstelle der Allintervall-Reihen vom Index  $n$  kann man auch die Differenzen-Reihen betrachten, aus denen Allintervall-Reihen hervorgehen. Es sind dies in der Sprache

der Kombinatorik bestimmte injektive Wörter der Länge  $n - 1$  über dem Alphabet  $1, 2, \dots, n - 1$  (Permutationen mit einer sehr speziellen Art von eingeschränkter Stellenbelegung). Zu jeder solcher Differenzen-Reihe gehört eine Klasse aus  $n$  Allintervall-Reihen, die durch Transponieren aus einer einzelnen Allintervall-Reihe erhalten werden können. Man zeige: Unter den Differenzen-Reihen, die Allintervall-Reihen vom Index  $n$  festlegen, gibt es je gleichviele, die mit  $a$  und mit  $n - a$  beginnen, wobei

$$a \in \left\{ 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1 \right\}.$$

- d) Zur Zeit ist noch keine Formel für die Anzahl  $f_n$  der Differenzen-Reihen bekannt, die Allintervall-Reihen vom Index  $n$  implizieren. Man kann daher die Zahlen  $f$  nur auf dem Umweg über eine vollständige Auflistung der betreffenden Figuren-Mengen bestimmen.

Man stelle einen Auflist-Algorithmus für die Differenzen-Mengen zu den Allintervall-Reihen vom Index  $n$  auf.

M. Jeger, Zürich/Luzern

*Lösung.* (Im Andenken für meinen verehrten Lehrer M. Jeger) Eine bestimmte Klasse von  $n$ -Ton-Reihen wird für festes  $g \in \{1, 2, \dots, n\}$  (Grundton) durch die Menge aller Folgen

$$(t_k) = \left( g + \sum_{j=1}^k d_j \right) \quad k = 1, 2, \dots, n - 1$$

mit verschiedenen  $d_j \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  (Permutationen) gebildet, wobei die Additionen in  $\mathbb{Z}_n$  (modulo  $n$ ) vorzunehmen sind.

Ein Ton in der Folge  $(t_k)$  wiederholt sich also genau dann, wenn irgendeine Partialsumme der Differenzenfolge  $(d_j)$  modulo  $n$  verschwindet; im andern Fall ergibt sich eine  $n$ -Ton-Allintervall-Reihe.

Für ungerade Indizes  $n$  gilt aber

$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j = \sum_{j=1}^{n-1} j = \left( \frac{n-1}{2} \right) n \equiv 0 \pmod{n},$$

so dass für  $n$ -Ton-Allintervall-Reihen  $n$  geradzahlig sein muss (Beweis a)). Ist insbesondere  $d_1 = \frac{1}{2}n$ , so ist

$$\sum_{j=2}^{n-1} d_j = \sum_{j=1}^{n-1} d_j - \frac{1}{2}n = \sum_{j=1}^{n-1} j - \frac{1}{2}n = \left( \frac{n-2}{2} \right) n \equiv 0 \pmod{n},$$

so dass eine Differenzenreihe zu einer  $n$ -Ton-Allintervall-Reihe nicht mit  $\frac{1}{2}n$  beginnen kann (Beweis b)).

Zu jeder Differenzenfolge  $(d_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, n - 1$ ) ( $d_1 \neq \frac{1}{2}n$ ) mit lauter Partialsummen  $\not\equiv 0 \pmod{n}$  gibt es genau eine Differenzenfolge  $(d_j^*)$  mit  $d_j + d_j^* \equiv 0 \pmod{n}$  (Inverselemente der additiven Gruppe  $\mathbb{Z}_n$ ) mit der gleichen Eigenschaft ihrer Partialsummen (Beweis c)).

Zu d) bietet sich ein rekursiver Auflist-Algorithmus mit einer minimalen Anzahl von Tests an; er liefert die Anzahlen 1, 2, 4, 24, 288, 3856, 89328, ....

Programm DIFFERENZENFOLGE

```

Beginn
  Eingabe  $n$  (geradzahlig)
  Setze Menge  $\mathbb{A} = \{1, 2, \dots, n - 1\}$ 
  Zähler  $f = 0$ 
  Permutation(1,  $\mathbb{A}$ )
  Ausgabe  $f$ 
Ende.

```

Prozedur **Permutation**( $k, \mathbb{A}$ )

```

Beginn
  Für  $i = 1$  bis  $n - 1$  wiederhole
    Beginn
      Falls  $i \in \mathbb{A}$  dann
        Beginn
           $d_k = i$ 
          Für  $j = 1$  bis  $k - 1$  und  $k > 1$  wiederhole
            Teste  $d_k + d_{k-1} + \dots + d_{k-j} \not\equiv 0 \pmod{n}$ 
            Falls Test erfolgreich dann
              Beginn
                Falls  $k < n - 1$  dann Permutation ( $k + 1, \mathbb{A} \setminus \{i\}$ )
                Falls  $k = n - 1$  dann
                  Beginn
                     $f = f + 1$ 
                    Ausgabe  $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ 
                  Ende
                Ende
              Ende
            Ende
          Ende
        Ende
      Ende
    Ende
  Ende.

```

R. Wyss, Flumenthal

Weitere Lösungen sandten A. Müller (Bures-sur-Yvette, F), R. Tschiersch (Frankfurt am Main, BRD).

**Aufgabe 1056.** Let  $\mu > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  and let  $(a_n)$  be a real sequence recursively defined by  $a_0 = \alpha$  and

$$a_{n+1} = a_n(1 - a_n^\mu); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Show that

$$a_n \sim (\mu n)^{-1/\mu} \quad \text{for } n \rightarrow \infty.$$

A.A. Jagers, Enschede, NL

*Lösung.* Der Rekursionsformel der Folge  $(a_n)$  entnimmt man unmittelbar die Eigenschaft  $1 > a_0 > a_1 > \dots > a_n > \dots > 0$  ebenso wie die Konvergenz gegen Null. Damit ist  $(b_n)$  mit  $b_n := a_n^{-\mu}$  eine streng monoton wachsende, unbeschränkte Folge von Zahlen  $> 1$ , die der Rekursion

$$(1) \quad b_{n+1} = b_n(1 - b_n^{-1})^{-\mu} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

genügt. Durch Taylorentwicklung von  $(1 - x)^{-\mu}$  um 0 erkennt man

$$(2) \quad (1 - x)^{-\mu} > 1 + \mu x \quad \text{für } 0 < x < 1$$

und

$$(3) \quad (1 - x)^{-\mu} = 1 + \mu x + O(x^2) \quad \text{bei } x \downarrow 0.$$

(1) und (2) implizieren  $b_{n+1} > b_n + \mu$  für  $n = 0, 1, \dots$ , also  $b_n > \mu n$  für dieselben  $n$ . Kombiniert man nun (1) und (3) so sieht man  $b_{n+1} = b_n + \mu + O(b_n^{-1})$ , also  $b_{n+1} = b_n + \mu + O(n^{-1})$  für alle genügend großen  $n$ , was sofort  $b_n = \mu n + O(\log n)$  bei  $n \rightarrow \infty$  liefert und somit

$$a_n = (\mu n + O(\log n))^{-1/\mu} = (\mu n)^{-1/\mu} \left( 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right),$$

was noch schärfer als die behauptete asymptotische Äquivalenz ist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr.A. Meyer (Bern), H.J. Seiffert (Berlin, BRD), M. Vowe (Therwil).