

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 47 (1992)

Artikel: Über die Länge der Verbindungsstrecken von zwei grenzparallelen Geraden
Autor: Ruoff, Dieter
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43919>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über die Länge der Verbindungsstrecken von zwei grenzparallelen Geraden

Dieter Ruoff
University of Regina, Regina, Canada

Dieter Ruoff ist in Zürich aufgewachsen. Nach dem Universitätsstudium mit Promotion bei B.L. van der Waerden (1965) verbrachte er zwei Jahre mit einem Nationalfondsstipendium in Kiel. Seit 1968 ist er an der Universität in Regina, Kanada, tätig. Er veröffentlichte Beiträge insbesondere zur n -Ecks-Lehre und Inzidenzgeometrie.

Betrachtet man in einer hyperbolischen Ebene diejenigen Verbindungsstrecken zweier grenzparalleler Geraden, welche mit einem festen, ausserhalb der Parallelen liegenden Punkt kollinear sind, so drängt sich einem fast unwillkürlich die Frage auf, welchem Grenzwert die Längen dieser Strecken zustreben bei unbeschränktem Fortschreiten in Parallelenrichtung (Fig. 1). Intuitiv lässt sich nur schwer entscheiden, ob der besagte

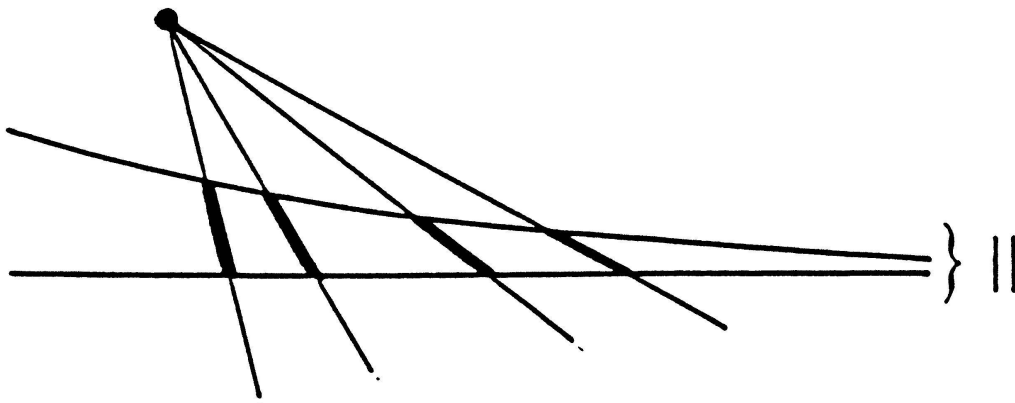


Fig. 1

Weil unsere Anschauung an der Euklidischen Welt geschult ist, fehlt uns für die hyperbolische Geometrie weitgehend die Intuition. An ihre Stelle treten hier wie in vielen vergleichbaren Fällen in der Mathematik die axiomatische Behandlung und die zugehörigen logischen Herleitungen. In seinem Beitrag behandelt Dieter Ruoff ein derartiges Beispiel, es betrifft eine Masseigenschaft in der hyperbolischen Ebene. Leicht stellt man fest, dass uns die entsprechende Frage in der Euklidischen Geometrie dank unserer Intuition keinerlei Schwierigkeiten bietet. *ust*

Grenzwert null, positiv-endlich oder unendlich ist. Zu seiner Berechnung erscheint die hyperbolische Trigonometrie als das geeignete Mittel, doch obwohl man mit ihrer Hilfe zum Ziele gelangen kann, ist ihr Gebrauch nicht zwangsläufig. Das geht aus der folgenden Untersuchung hervor, in welcher der betrachtete Grenzwert direkt und in ganz elementarer Weise bestimmt wird.

Die vorliegende Arbeit ist dem vorzüglichen Lehrbuch der nichteuklidischen Geometrie von David Gans [2] sehr verpflichtet. Herrn Professor J. C. Fisher möchte der Verfasser für verschiedene hilfreiche Bemerkungen bestens danken. B. Monson schliesslich hat eine trigonometrische Lösung des hier behandelten Problems gefunden (bisher unveröffentlicht).

Wie die folgende Herleitung zeigen wird, besteht ein Zusammenhang zwischen dem von uns gesuchten Grenzwert von Streckenlängen und der Länge gewisser Grenzkreisbogen. Methodisch gesehen spielen zwei grundlegende Sätze eine Rolle, welche *korrespondierende Grenzkreisbogen* betreffen, Bogen also, die konzentrischen Grenzkreisen angehören und durch radiale Projektion auseinander hervorgehen (Fig. 2). Die betreffenden Sätze lauten: 1. Auf einem Grenzkreis steht ein Teilbogen \widehat{AB} zum Bogen \widehat{AC} im selben

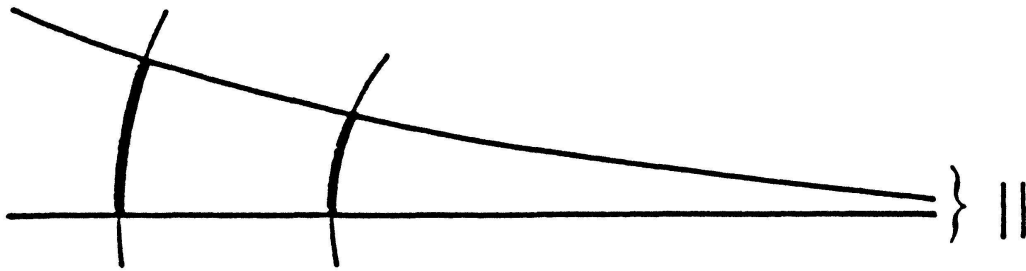


Fig. 2

Längenverhältnis wie auf einem konzentrischen Grenzkreis der korrespondierende Bogen $\widehat{A'B'}$ zum korrespondierenden Bogen $\widehat{A'C'}$. 2. Ein fester Grenzkreisbogen steht zu einem beweglichen korrespondierenden Grenzkreisbogen in einem Längenverhältnis, das sich in Parallelenrichtung exponentiell mit dem Bogenabstand verändert. Dabei ist die Basis dieser Exponentialfunktion e , falls die beiden Bogenlängen in nichteuklidischen Standardeinheiten gemessen werden. — Elementare Beweise der beiden Sätze finden sich in [2], anspruchsvollere in [4].

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu unserem Problem. *Es seien k, l zwei grenzparallele Geraden mit dem gemeinsamen Ende δ und es sei C ein weder auf noch zwischen diesen liegender Punkt. Durch C seien die Geraden gezogen, die von k und l geschnitten werden, und auf jeder von ihnen sei die von dem Schnittpunkt X mit k und dem Schnittpunkt Y mit l begrenzte Strecke \overline{XY} hervorgehoben. (X, Y sind laufende Punkte auf k bzw. l .) Wir stellen uns die Aufgabe, den (endlichen oder unendlichen) Grenzwert zu bestimmen, dem die Längen der Strecken \overline{XY} zustreben, falls sich X und Y unbeschränkt in Richtung δ bewegen.*

Wir beginnen die Lösung unserer Aufgabe mit zwei Bemerkungen. Erstens bezeichnet im folgenden ein geordnetes Paar der Form (ζ, P) einen Grenzkreis und zwar den Grenzkreis

mit Zentrum ζ , welcher durch P geht. Zweitens wird o.B.d.A. angenommen, dass die Gerade k und der Punkt C auf verschiedenen Seiten der Geraden l liegen, oder, was dasselbe bedeutet, dass sich auf dem Grenzkreis (δ, C) der Schnittpunkt B mit l zwischen dem Schnittpunkt A mit k und C befindet. Die Längen $a = |\widehat{AC}|$ und $b = |\widehat{BC}|$ der Bogen $\widehat{AC}, \widehat{BC}$ auf dem besagten Grenzkreis werden im Resultat unserer Untersuchung auftreten (Fig. 3).

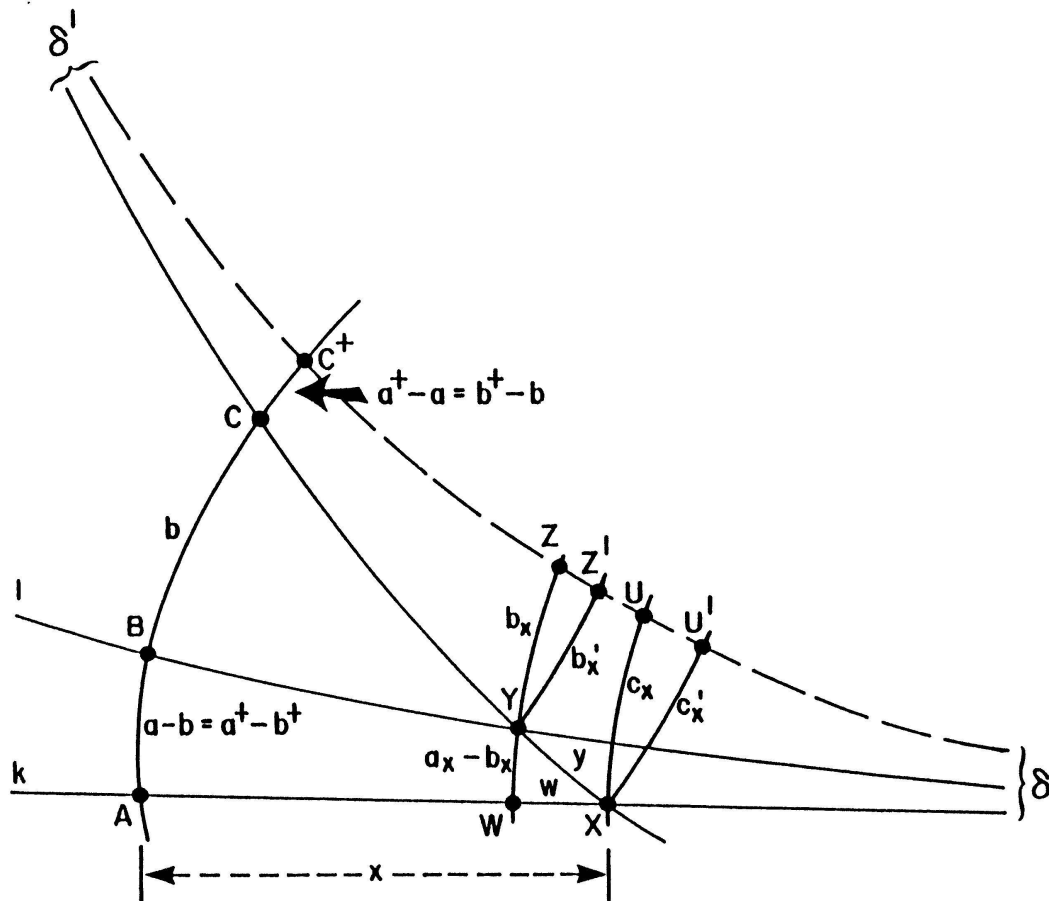


Fig. 3

Die weiteren von uns herangezogenen Punktmengen und deren Längen hängen von der Lage des laufenden Punktes X ab. Wir nehmen an, dieser liege auf dem von A in Richtung δ führenden Strahl und habe den Abstand x von A . Der von X ausgehende Strahl \vec{XC} habe das Ende δ' . Fünf zu benennende Punkte bilden den Schnitt von gegebenen Grenzkreisen mit der Geraden $\delta\delta'$. Diese werde von (δ, C) in C^+ , von (δ, Y) in Z , von (δ', Y) in Z' , von (δ, X) in U und von (δ', X) in U' geschnitten. Weiter sei W der Schnittpunkt des Grenzkreises (δ, Y) und der Geraden k . Auf Grund dieser Festsetzungen können alle übrigen für uns relevanten Strecken und Grenzkreisbogen sowie deren Längen bezeichnet werden. Es sei $|\overline{XW}| = w$, $|\overline{XY}| = y$, $|\widehat{AC^+}| = a^+$, $|\widehat{BC^+}| = b^+$, $|\widehat{WZ}| = a_x$, $|\widehat{YZ}| = b_x$, $|\widehat{YZ'}| = b'_x$, $|\widehat{XU}| = c_x$ und $|\widehat{XU'}| = c'_x$. Alle Längen sollen in Standardlängeneinheiten gemessen werden.

Wir bemerken, dass $\widehat{WZ}, \widehat{XU}$ ein äusserer und ein bezüglich des Endes δ korrespondierender innerer Grenzkreisbogen sind, die den Abstand w haben, $\widehat{XU'}, \widehat{YZ'}$ ein äusserer

und ein bezüglich δ' korrespondierender innerer Grenzkreisbogen mit dem Abstand y . Gemäss einem früher zitierten Satz gilt für die Längen a_x, c_x sowie c'_x, b'_x dieser Bogen

$$(1) \quad c_x = a_x e^{-w}, \quad b'_x = c'_x e^{-y}.$$

Weil $\delta\delta'$ ein Radiuslinie der von uns betrachteten Bogen ist und als solche senkrecht auf ihnen steht, folgt

$$(2) \quad b'_x = b_x, \quad c'_x = c_x,$$

was zusammen mit (1)

$$(3) \quad w + y = \ln \frac{a_x}{b_x}$$

ergibt. Auch die Grenzkreisbogen $\widehat{AC}^+, \widehat{WZ}$ sowie deren Teilbogen $\widehat{BC}^+, \widehat{YZ}$ sind korrespondierend. Es gilt daher $b^+ : a^+ = b_x : a_x$, was es erlaubt, (3) in

$$(4) \quad w + y = \ln \frac{a^+}{b^+}$$

umzuwandeln.

Wir lassen nun $x = |\overline{AX}|$ gegen ∞ streben und behaupten, dass dann $|\overline{BY}|$ ebenfalls gegen ∞ strebt und $|\widehat{CC}^+|$ gegen 0. Zum Beweis gehen wir von irgendeinem Punkt $X = X_0$ auf dem von A und δ bestimmten Strahl aus und finden die zugehörigen Punkte $Y = Y_0$ und $C^+ = C_0^+$. Ist Y_1 irgendein Punkt der Geraden l auf der B entgegengesetzten Seite von Y_0 , so lässt sich stets ein zugehöriger Punkt $X = X_1$ auf k rekonstruieren, da die Gerade CY_1 die Gerade k auf jeden Fall schneidet, und zwar auf der δ zugewandten Seite von X_0 . Ist andererseits C_1^+ ein sich auf dem Grenzkreis (δ, C) zwischen C und C_0^+ befindlicher Punkt (Fig. 4), so schneidet die Gerade δC_1^+ die Gerade $X_0 C$ im Äusseren des Grenzkreises (δ, C) . Die Verbindungsgerade des zweiten Endes δ'_1 von δC_1^+ und des Punktes C muss k schneiden, bestimmt also ein $X = X_1$ und zwar auf der Seite von δ bezüglich X_0 . So kann also $|\overline{BY}|$ beliebig gross und $|\widehat{CC}^+|$ beliebig nahe bei 0 sein, wobei die erste dieser Längen mit x wächst, die zweite mit x abnimmt. Dies bestätigt die eingangs dieses Absatzes aufgestellten Behauptungen.

Nun zu Folgerungen aus den gemachten Grenzwertbestimmungen. Wächst x unbeschränkt, so, wie gezeigt, auch $|\overline{BY}|$, was mitbewirkt, dass Y sich der Geraden k beliebig annähert. Die Länge des Bogens \widehat{WY} , der auf k senkrecht steht, und umso mehr diejenige der Strecke \overline{WY} strebt in der Folge gegen 0. Das bedeutet gemäss Dreiecksungleichung (s. Fig. 3)

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (w + y) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2y = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} y.$$

Weiter nähert sich mit unbeschränkt wachsendem x der Punkt C^+ dem Punkte C an, was impliziert, dass die Länge a^+ gegen a und die Länge b^+ gegen b strebt. Da $b \neq 0$ ist, ergibt das

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^+}{b^+} = \frac{a}{b}.$$

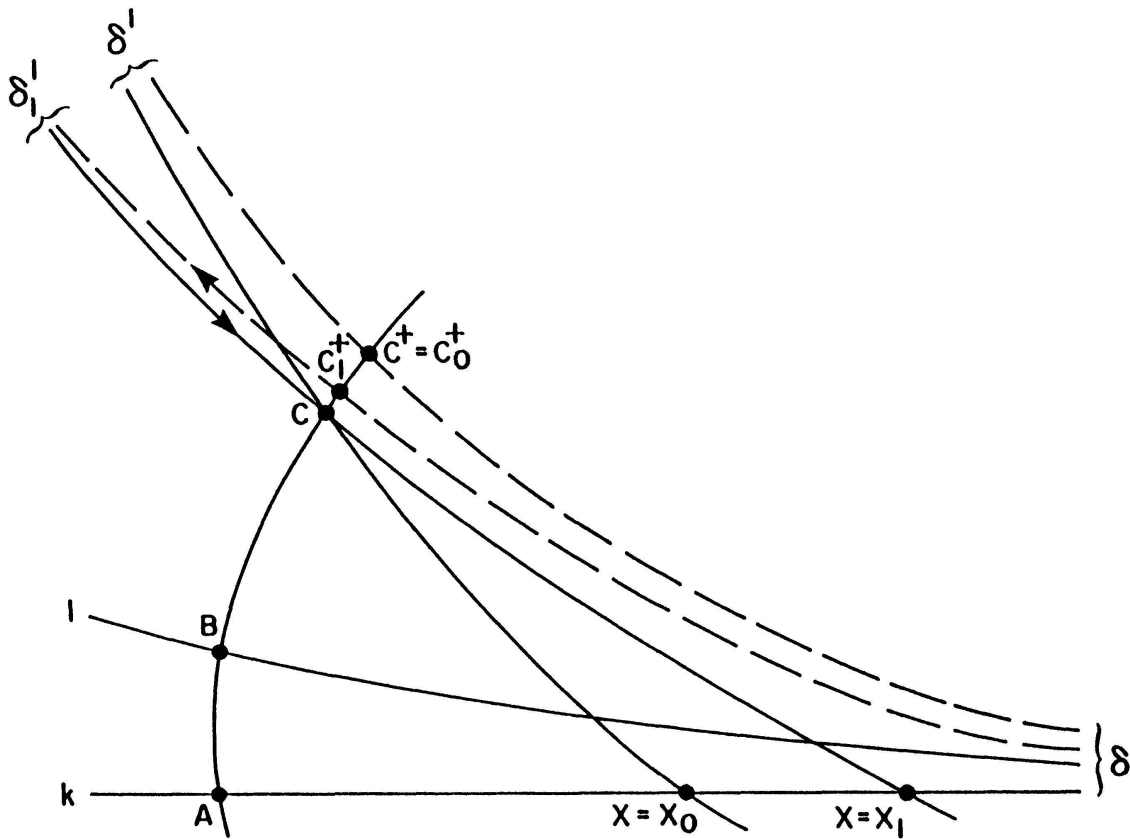


Fig. 4

Setzen wir schliesslich (5), (6) in (4) ein, so erhalten wir

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{1}{2} \ln \frac{a}{b} ,$$

d.h. die Gleichung, welche die Lösung unseres Problems enthält. Es gilt also: *Der gesuchte Grenzwert ist endlich und positiv und hat bei Zugrundelegung der nichteuklidischen Standardlängeneinheit den Wert*

$$\frac{1}{2} \ln \frac{a}{b} .$$

Literaturverzeichnis

[1] R. Baldus und F. Löbell: Nichteuklidische Geometrie. Sammlung Götschen, Berlin, 1964.
 [2] D. Gans: An Introduction to Non-Euclidean Geometry. Academic Press, Orlando, Florida, 1973.
 [3] D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie. B. G. Teubner, Stuttgart, 1977.
 [4] O. Perron: Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene. B.G. Teubner, Stuttgart, 1962.

Professor Dieter Ruoff,
 University of Regina,
 Regina, Saskatchewan
 Canada S4S 0A2