

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 47 (1992)

**Artikel:** Aus der Vorgeschichte der Mathematischen Statistik  
**Autor:** Ineichen, Robert  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43915>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---



---

## Aus der Vorgeschichte der Mathematischen Statistik

---



---

Robert Ineichen, Université de Fribourg

Robert Ineichen ist in Luzern aufgewachsen. Er studierte an der Universität Zürich, an der ETH Zürich und an der Sorbonne in Paris. 1950 doktorierte er bei K.R. Fueter an der Universität Zürich. Nach Lehrtätigkeit am Gymnasium der Kantonsschule Luzern und am Zentralschweizerischen Technikum Luzern, wo er auch des Amt des Vizedirektors versah, wurde er Professor an der Universität Freiburg (Schweiz). Seit 1991 ist er emeritiert. Seine Hauptinteressen liegen im Gebiete der Schul- und Elementarmathematik sowie der Stochastik, wobei ihn neben den mathematischen immer auch die didaktischen Fragen beschäftigt haben. In den letzten Jahren wandte er sich vor allem der Geschichte der Mathematik zu. Robert Ineichen ist Verfasser von mehreren Büchern für den Unterricht an Gymnasien und Sekundarschulen.

Die Mathematische Statistik ist "als eigene Disziplin etwa um 1890 entstanden", schreibt H. Witting in [37]. Zu den wesentlichen Teilen dieser Mathematischen Statistik gehört die Theorie der Prüfverfahren für das Testen einer Hypothese. Die *allgemeine* Theorie dieser Testverfahren und die zahlreichen Tests für die verschiedenartigsten Situationen sind in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts geschaffen worden. Eine sehr schöne inhaltsreiche

Die Wurzeln jedes mathematischen Teilgebietes liegen in Aufgaben, die das tägliche Leben stellt. Bei der Geometrie und bei der Algebra ist diese Tatsache wohlbekannt. Etwas komplizierter liegen die Dinge bei anderen Gebieten wie etwa bei der Mathematischen Statistik. Aber auch hier gibt es eine Vorgeschichte. Robert Ineichen zeigt in seinem Beitrag, wie sich die Spuren der Entwicklung der Statistik weit zurückverfolgen lassen. So finden sich zum Beispiel in den Schriften von Girolamo Cardano und Johannes Kepler, ja sogar im Talmud Schlussweisen, die wir heute mit "Verwerfung der Nullhypothese" umschreiben würden. Wie in anderen mathematischen Fachgebieten haben sich die zuerst unscharfen Begriffe im Laufe der Zeit und in enger Verbindung mit Fragestellungen aus den Naturwissenschaften schrittweise geschärft. Wesentliches haben dazu die Arbeiten von Jakob, Niklaus und Daniel Bernoulli sowie von Pierre Simon Laplace und Siméon-Denis Poisson beigetragen. Die Voraussetzungen eines Schliessens auf der Grundlage von statistischen Tatsachen waren aus heutiger Sicht erst gegen Ende des letzten Jahrhunderts genügend geklärt: seit dieser Zeit kann man die "Mathematische Statistik" als eine eigenständige Disziplin ansehen. Der Weg für die Ausarbeitung der vielfältigen Prüf- und Testverfahren, die in der heutigen Praxis eine so grosse Rolle spielen, war damit vorbereitet. *usf*

Darstellung dieser Entwicklungen gibt die eben zitierte Arbeit von H. Witting in der Festschrift der DMV "Ein Jahrhundert Mathematik, 1890–1990".

Unter den Testverfahren sind die *Signifikanztests* als spezielle Tests hervorzuheben: Man entscheidet hier über die Ablehnung, also die *Verwerfung*, oder die (eventuell nur vorläufige) *Beibehaltung* einer einzigen Hypothese, der sogenannten *Nullhypothese*. Das Verfahren bietet dabei die Möglichkeit, das Risiko abzuschätzen, das darin besteht, diese Nullhypothese abzulehnen, obwohl sie wahr wäre, und man also nicht ablehnen sollte. Diese unberechtigte Ablehnung der Nullhypothese wird bekanntlich als *Fehler 1. Art* bezeichnet; die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers wird durch das *Signifikanzniveau*  $\alpha$  gemessen. Natürlich kann einem auch ein *Fehler 2. Art* unterlaufen: Er besteht im unberechtigten Beibehalten der Nullhypothese. Das Risiko dieses Fehlers kann bei einem blossen Signifikanztest ohne zusätzliche Untersuchungen nicht abgeschätzt werden. Dieser Sachverhalt wird schon im grundlegenden Werk "Design of Experiments" [11] von Roland Aylmer Fisher (1890–1962) ganz deutlich ausgesprochen: "... It should be noted that the *null hypothesis is never proved*, but is possibly disproved in the course of experimentation. Every experiment may be said to exist only to give the facts of disproving the null hypothesis."

Wenn wir einen statistischen Schluss in Form eines Signifikanztestes *mit Verwerfen* der Nullhypothese durchführen, dann arbeiten und argumentieren wir eigentlich über weite Strecken so, wie wir im Alltag — unbelastet von moderner statistischer Methodik — auch verfahren würden: Wir neigen doch im täglichen Leben sehr dazu, *Erklärungen* (Begründungen, eben "Nullhypothesen"!) für ein Geschehnis zu verwerfen, wenn dieses Geschehnis auf Grund dieser Erklärungen höchst unwahrscheinlich scheint *und* wenn uns eine andere, plausiblere Erklärung zur Verfügung steht. Dazu findet man übrigens, bereits bei M.T. Cicero (106–43 v.Chr.) Gedanken ausgesprochen, die durchaus an entsprechende Formulierungen in modernen Lehrbüchern erinnern könnten. So etwa in "De divinatione", 1.23: "Vier geworfene Astragale können durch Zufall einen Venuswurf bewirken. Glaubst du etwa, dass auch hundert Venuswürfe durch Zufall entstehen, wenn Du vierhundert Astragale wirfst?" [1\*]<sup>1</sup>) — Es ist denn auch nicht überraschend, dass sich bereits lange vor dem Aufkommen der modernen Mathematischen Statistik mit ihren Schätz- und Testverfahren frühe Spuren dieser Methodik finden, dass es also eine *Vorgeschichte* der Mathematischen Statistik gibt. Im folgenden sollen einige solche Spuren aufgezeigt werden, allerdings, ohne dabei Vollständigkeit anstreben zu können. Ergänzungen und weitere Einzelheiten zu diesem Thema geben wir in [18] und in der Abschiedsvorlesung [19], denen wir die folgenden Ausführungen im wesentlichen entnehmen. Über Teile der Vorgeschichte und über die Frühgeschichte der Mathematischen Statistik orientieren auch [16, 27, 35].

## 1 Verwerfen von Hypothesen

In der "Historia Francorum" des Gregor von Tours aus dem 6.Jahrhundert [17] wird erzählt, wie zwanzig Krieger, die "Gott nicht fürchteten", über einen Fluss setzten, um ein Kloster zu plündern. Auf der Rückfahrt aber zersplitterte ihr mit Beute beladenes Boot, und sie wurden von ihren eigenen Lanzen durchbohrt und getötet. Gregor fährt

1) Zahlen mit hochgestelltem Sternchen verweisen auf die Anmerkungen am Schluss des Artikels.

dann fort [2\*]: “Nur einer von ihnen blieb unverletzt, jener, der die andern wegen ihres Vorhabens getadelt hatte. Wenn jemand denkt, dies sei durch *Zufall* geschehen, so möge er bedenken, dass *ein* unschuldiger Mann gerettet wurde, inmitten so *vieler* Verbrecher.” Natürlich wird hier noch nicht gerechnet: Es wird kein Signifikanzniveau angegeben. Und doch könnte man in moderner Sprechweise sagen: Es wird ausdrücklich eine Nullhypothese formuliert (“durch Zufall”), und für Gregor scheint es offensichtlich, dass sie verworfen werden muss, denn es ist ja nur *einer*, zudem gerade der Unschuldige, gerettet worden.

Ähnliche Überlegungen kann man in der Autobiographie des Girolamo Cardano (1501–1576), “Hieronymi Cardani Mediolanensis De propria vita liber” [9] im 37. Kapitel nachlesen: “Wenn ich ... würfle, und die guten und ehrlichen drei Würfel werfen nur drei Punkte, so ist dies etwas ganz Natürliches ..., auch dann noch, wenn sich dasselbe beim zweiten Wurf wiederholt. Wenn aber derselbe Wurf ein drittes und ein viertes Mal nacheinander fällt, so darf dies auch der vernünftigste Mensch für verdächtig halten.” — An sich hätte Cardano die hier in Frage kommenden Wahrscheinlichkeiten berechnen können: In seinem “Liber de ludo aleae” (ca. 1564) berechnet er völlig richtig die Anzahl der Variationen beim Spiel mit drei Würfeln (216); er bestimmt mehrmals Wahrscheinlichkeiten, indem er die Anzahl der günstigen Fälle durch die Anzahl der gleichmöglichen dividiert (allerdings ohne die heutige Terminologie zu gebrauchen) und er kennt bereits die Formel für die Wahrscheinlichkeit, in drei unabhängigen Ausführungen desselben Versuches drei Treffer zu erhalten [8, 9, 26, 33].

I. Schneider [32] weist darauf hin, “dass die später bei Arbuthnot und de Moivre erkennbare Idee des Tests einer statistischen Hypothese mindestens schon durch Kepler vorbereitet ist”. Johannes Kepler (1571–1630) will die Zufälligkeit des Zusammentreffens einer Nova mit einer grossen Konjunktion (von Saturn, Jupiter und Mars) widerlegen. Er vergleicht dazu in seinem “gründlichen Bericht über den neuen Stern” dieses Ereignis mit einem Vierer- oder Fünferpasch beim Werfen gewöhnlicher Würfel: “... dan ob wol ... ein jeder gerader wolgemachter würffel sechs felder hat / und eins so wol fallen khan / als das andere / jedoch wan ein anzahl spieler jeder mit vier oder fünf würffeln nur einen einzigen wurff thun sollten / und einem under jnen füele das Sechsen auf allen würffeln / so würde man ein sollichen nit unbbilich wegen einer verborgenen kunst verdacht haben / und *es schwärlich dem glück zuschreiben*: angesehen / das wol hundert tausendt würffe geschehen möchten / ehe wieder einer auff diese weise gerichte” [32].

Vier Sechser in einem Wurf mit vier Würfeln ist in der Tat ein seltenes Ereignis; die Wahrscheinlichkeit dafür ist ja bloss  $1/1296$ . Um z.B. mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% beim Werfen von jeweils vier Würfeln mindestens einmal ein Viererpasch zu erzeugen, müsste man mit etwa 6000 Würfeln mit je vier Würfeln rechnen. (Für ein Fünferpasch wären entsprechend rund 35 800 Würfe notwendig.) Kepler überschätzt also die notwendige Anzahl der Würfe sehr stark. Trotzdem hat seine Argumentation einiges für sich: “Derowegen wie gesagt / ich diese wunderbarliche eintreffung der zeit und ort / nit gern dem blinden glück zuschreiben wolte: zumahl weil die erscheinung selbstens eines neuen Sternes für sich allein ... nit ein gemein ding ist / wie ein spielwurff / sondern ein grosses wunder / desgleichen vor unsern zeiten nie erhört oder gelesen worden”.

Aus unserer heutigen Sicht könnten wir sagen: Kepler entscheidet sich (wie Gregor von Tours und Cardano in den obigen Beispielen) *gegen die Nullhypothese der Zufälligkeit*. Er hat eine Erklärung, die ihm *plausibler* erscheint; er neigt zur Alternative: “ein grosses wunder”. Er versucht durch den Vergleich mit dem Vierer- oder Fünferpasch das Risiko abzuschätzen, das darin besteht, die Nullhypothese zu verwerfen, obwohl sie richtig wäre: Er gibt einen *geschätzten* Wert für das “Signifikanzniveau”, mit dem dieses Risiko gemessen wird, allerdings einen viel zu kleinen (“wol hundert tausend würffe”!). Auch Gregor von Tours neigt zur Erklärung durch ein Wunder. Und Cardano sagt: “Und ebenso ist es in den Fällen, wo schon alle Hoffnung aufgegeben war und dann so plötzlich eine Rettung aufleuchtete, dass man ganz deutlich sehen musste, dass es durchaus Gottes sichtbarer Wille war” [9].

N.L. Rabinovitch ist in mehreren Arbeiten unter anderem jenen Spuren stochastischen Denkens nachgegangen, die sich im Talmud und den zugehörigen Kommentaren zeigen; er hat viele solche gefunden. Uns interessiert hier ein Beispiel, in welchem eine Nullhypothese verworfen wird. Verworfen wiederum deshalb, weil ein Ereignis eingetroffen ist, für das nur eine kleine Wahrscheinlichkeit besteht, wenn die Nullhypothese wahr wäre, *und* weil eine plausible Erklärung zur Verfügung steht, eine einleuchtende Alternative vorhanden ist. So nach [30]: Der Jerusalemer Talmud erzählt, wie Moses einen Rat der Ältesten von siebzig Mitgliedern zu bestimmen hatte. Aus jedem der zwölf Stämme wurden nun zunächst sechs Kandidaten ausgewählt; aus der Schar dieser 72 Kandidaten waren dann zwei zu eliminieren. Dazu wurden 72 Kugeln vorbereitet; 70 davon wurden mit “Ältester” markiert, zwei blieben unmarkiert. Die Kugeln wurden in eine Urne gelegt und gemischt; jeder Kandidat hatte eine Kugel zu ziehen und jene beiden, die die unmarkierten Kugeln erwischten, wurden eliminiert. Um 300 n.Chr. kommentierte Rabbi Abbahu: Wenn die nicht markierten Kugeln in gleichen Intervallen erscheinen — und zwar in einem einzelnen Wahlakt —, so ist dies sehr bemerkenswert und *kann kaum durch Zufall erklärt* werden: Man hat dann in diesem Ereignis ein Eingreifen Gottes zu sehen. — Selbstverständlich ist weder im Talmud selbst noch im Kommentar eine entsprechende Rechnung durchgeführt. Doch kann man wohl — mit N.L. Rabinovitch — den Kommentator nur dann begreifen, wenn man ihm stochastisches Denken zubilligt. In der Tat: Die 72 Kugeln, worunter 70 unter sich gleiche und 2 unter sich gleiche, lassen sich offenbar auf  $72! / (70! 2!) = 2556$  Arten anordnen. Gleiche Intervalle ergeben sich nur, wenn die unmarkierten Kugeln an der 1. und an der 37. Stelle oder an der 36. und der 72. Stelle stehen. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem einzelnen Wahlakt gleiche Intervalle entstehen, ist also  $2/2556 \approx 0,001$ .

## 2 John Arbuthnot und sein Vorzeichentest von 1710

Im Jahre 1710 hat John Arbuthnot in einem Vortrag vor der Londoner Royal Society versucht, ein statistisches Argument für das Bestehen einer göttlichen Vorsehung zu geben. Dieser John Arbuthnot war Arzt und betreute als solcher die Königin Anna, aber auch Mathematiker und übersetzte den Traktat [3\*] von Christian Huygens über die Wahrscheinlichkeitsrechnung ins Englische, schliesslich war er auch geistreicher satirischer Schriftsteller und in dieser Eigenschaft unter anderen “creator of the prototypical Englishman John Bull” [35].

*Zusammengefasst* — und modern formuliert — ging er von der folgenden Überlegung aus: Wenn die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  ist, dass ein Kind, das nun geboren wird, von männlichem Geschlecht ist, so müsste die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Jahre mit einem Überschuss an männlichen Geburten (“männliche” Jahre) und der “weiblichen” Jahre die Wahrscheinlichkeitsverteilung von “Kopf” und “Zahl” in einer entsprechenden Anzahl von Würfeln mit einer guten Münze sein. (Die Richtigkeit dieser Entsprechung begründet er übrigens nicht.) In heutiger Sprechweise können wir sagen, dass ihm diese Überlegung die Nullhypothese lieferte. Er zog nun Beobachtungen heran, nämlich die Register der getauften Neugeborenen in London in den 82 Jahren von 1629–1710. Die Register zeigten ihm, dass in den 82 Jahren jedesmal mehr männliche Geburten als weibliche stattgefunden hatten. Wäre nun die oben dargelegte Nullhypothese richtig, so wäre die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 82-mal hintereinander “männliche” Jahre zu registrieren sind, gegeben durch  $(\frac{1}{2})^{82}$ , “which will be found easely by the table of logarithms to be

$$1/4'836\ 000'000\ 000'000\ 000'000\ 000" \approx 2,1 \cdot 10^{-25}.$$

Arbuthnot stellt dann weiter noch fest, dass der Überschuss an männlichen Geburten in einem nahezu konstanten Verhältnis zur Gesamtzahl steht, dass weiter die Differenzen innerhalb von fixierten Grenzen liegen und dass man dasselbe Ergebnis wohl auch für andere Zeiten und andere Gegenden finden würde. So wird denn für ihn die Wahrscheinlichkeit — bei Gültigkeit seiner oben in *moderner* Ausdrucksweise formulierten “Nullhypothese”! — lauter männliche Jahre zu beobachten zu einer “infinitely small quantity, at least less then any assignable fraction”. Er verwirft deshalb die Nullhypothese und tut dies vielleicht (?) wieder aus zwei Gründen: Weil ein Ereignis eingetreten ist, dessen Wahrscheinlichkeit äusserst klein wäre, wenn die Nullhypothese stimmen würde, und weil er eine ihm viel näher liegende Erklärung zur Verfügung hat, die Erklärung nämlich: “that is Art, not Chance, that governs” — *Planung regiert, nicht Zufall!*

In dieser Feststellung ist für ihn enthalten, dass an Stelle des Zufalls die göttliche Vorsehung die Verteilung der Geschlechter regelt: “An argument for Divine Providence taken from the constant regularity observed in the birth of both sexes”, so lautet denn auch schon der Titel der Arbeit [3], in der er seine Gedanken niedergelegt hat. — Und er ist der Ansicht, dass durch diese weise Planung eben der Verlust an Männern ausgeglichen wird, der dadurch entsteht, dass die Männer ein viel gefährlicheres Leben führen müssen als die Frauen ...! In einem Scholion fügt er zur moralischen Unterweisung seiner Leser gar noch bei: “From hence it fellows, that Polygamy is contrary to the law of Nature and Justice, and to the Propagation of Human Race; for where Males and Females are in equal number, if one Man takes Twenty wives, Nineteen Men must live in Celibacy, which is repugnant to the Design of Nature; nor is it probable that Twenty women will be so well impregnated by one Man as by Twenty”!!

Die Überlegungen von Arbuthnot stellen in ihrer Gesamtheit nach Ansicht der meisten Autoren einen eigentlichen *Signifikanztest* dar, und zwar in Form eines *Vorzeichentests*: Arbuthnot sieht primär ja einfach den Unterschied zwischen der jeweiligen Zahl der männlichen Geburten pro Jahr und der entsprechenden Zahl der weiblichen Geburten. Hätte er z.B. für jedes männliche Jahr ein Pluszeichen gesetzt und für jedes weibliche

ein Minuszeichen, so hätte er 82-mal ein Plus- und 0-mal ein Minuszeichen zu setzen gehabt.

Einige kritische Bemerkungen sind hier angebracht: *Zufall* herrscht natürlich *nicht* nur dann, wenn die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt gleich jener einer Mädchengeburt, also gleich  $\frac{1}{2}$ , ist. Weiter hätte *jede andere ganz bestimmte* Aufeinanderfolge von männlichen und weiblichen Jahren — zum Beispiel zuerst 41 männliche Jahre und dann 41 weibliche usw. — nach Arbuthnots Voraussetzungen genau dieselbe sehr kleine Wahrscheinlichkeit von  $(\frac{1}{2})^{82}$ : Vom heutigen Standpunkt aus würden wir verlangen, dass die Ablehnungsregel sorgfältiger überlegt und formuliert würde (Verwerfungsbereich!). Schliesslich: Hat Arbuthnot wirklich aus den *beiden* genannten Gründen abgelehnt oder nur auf Grund des einen? — Aber wir dürfen gleichwohl mit H. Freudenthal [12] feststellen: “Das verkleinert Arbuthnots Verdienste nicht. Auch die Infinitesimalrechnung ist nicht gleich mit Weierstrass’scher Strenge auf die Welt gekommen.”

### 3 Eine Verschärfung der Argumentation von Arbuthnot

Der Schluss von der Erkenntnis eines Sachverhalts, der uns weise eingerichtet erscheint, auf die Existenz eines höchsten Wesens — die Engländer sprachen vom “argument from design” — spielte gegen Ende des 17. und weit ins 18. Jahrhundert hinein eine sehr wichtige Rolle, und dies nicht nur im Kreise der Royal Society: “Wie nicht anders zu erwarten, wurde Arbuthnot’s Argument begierig aufgegriffen und durch mehrere Jahrzehnte von den Kanzeln Oxfords herab bis zu denen Münchens verkündet” [34]. Deshalb verwundert es nicht, dass sich bald nach Arbuthnot auch andere Mathematiker mit seiner Argumentation befassten, sie verbesserten oder korrigierten.

Sehr bald brachte der holländische Mathematiker s’Gravesande (1688–1742) eine *Verschärfung der Argumentation* von John Arbuthnot [14]: An Hand der von Arbuthnot zusammengetragenen Zahlen stellte er zunächst fest, dass die relative Häufigkeit einer Knabengeburt zwischen 50,27% und 53,62% schwankt. Da nun die effektiven Zahlen der Knaben- und Mädchengeburten von Jahr zu Jahr verschieden sind, konzipiert er ein *Modell*:

Er geht von einer *fiktiven* Anzahl von 11’429 Geburten pro Jahr aus (das ist nahezu der Mittelwert der Zahl der Geburten in den 82 Beobachtungsjahren von Arbuthnot) und berechnet mit den eben angegebenen relativen Häufigkeiten die *fiktive Minimalzahl* (5745) und die *fiktive Maximalzahl* (6128) der Knabengeburten pro Jahr. In mühseliger Arbeit bestimmt er dann mit Hilfe der *Binomialverteilung* die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl  $X$  der Knabengeburten eines Jahres zwischen diesen Grenzen liegt und findet dafür

$$P(5745 \leq X \leq 6128) = 0,292$$

(Die Normalverteilung stand ihm noch nicht zur Verfügung; mit ihr erhält man als approximativen Wert natürlich rasch 0,284).

Jetzt kann er leicht die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass  $X$  in 82 aufeinanderfolgenden Jahren stets zwischen den Grenzen 5745 und 6128 liegt:

$$0,292^{82} \approx 1,45 \cdot 10^{-44}$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist mehr als  $10^{19}$ -mal kleiner als jene von Arbuthnot. Die Überlegungen von s'Gravesande führen also zu einem Ergebnis, das eine noch viel signifikantere Abweichung von der Nullhypothese aufweist als das Resultat von Arbuthnot: Seine "Démonstration mathématique du soin que Dieu prend de diriger ce qui se passe dans le monde" ist also in viel stärkerem Masse statistisch gesichert als die Argumentation von Arbuthnot.

#### 4 "Das ist kein Wunder ..." — "Non est miraculum..."

In ganz anderer Art wendet sich Nikolaus Bernoulli (1687–1759), ein Neffe von Jakob Bernoulli, des Verfassers der "Ars conjectandi", dem Problem von Arbuthnot zu: "*his attitude is pragmatic, like that of a modern statistician*", schreibt denn auch A. Hald in [16]. Er will nicht gegen die Vorsehung kämpfen und schreibt in einem Brief an s'Gravesande deutlich: "... je conclus ... que cela soit un effet de la Providence de Dieu, ce que je n'ai jamais nié" [14]. Doch scheint ihn die theologische Seite der ganzen Angelegenheit nicht sonderlich zu interessieren.

Besonders bemerkenswert ist zunächst, dass er in seinem Modell *nicht* einfach mit dem Wert  $\frac{1}{2}$  für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt arbeitet: Er geht aus von einer *fiktiven* Zahl von 14'000 Geburten pro Jahr. Aus den Daten von Arbuthnot berechnet er für jedes Jahr die relative Häufigkeit der Knabengeburten und bestimmt damit wieder eine *fiktive Minimalzahl* von Knabengeburten pro Jahr (7037), eine *fiktive Maximalzahl* (7507) und schliesslich die mittlere Anzahl der jährlichen Knabengeburten, nämlich 7237. Daraus gewinnt er nun einen *Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt*:  $7237/14'000 = 0,5169$  gibt ihm den Wert des Parameters  $p$  seiner Binomialverteilung.

Weiter ist zu beachten, dass er zunächst eine Abschätzung herleitet, für die Endglieder von  $(p+q)^n$  für grosses  $n$  und  $p+q=1$ , die ihm dann bei der Arbeit mit der Binomialverteilung beste Dienste leistet. Dieses "Theorem von Nikolaus Bernoulli" [15] stellt eine Verschärfung der Approximation dar, die sein Onkel Jakob Bernoulli im vierten Teil seiner "Ars conjectandi" gegeben hatte, also eine Verschärfung des "Satzes von Bernoulli". Wir wollen hier nicht auf die Einzelheiten dieser Verschärfung eingehen; sie sind z.B. bei A. Hald in [15, 16] nachzulesen. Für uns ist wichtig, dass Nikolaus Bernoulli mit seinem Theorem nun in eleganter Weise die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen kann, dass die Zahl  $X$  der Knabengeburten zwischen den Grenzen  $7037 = 7237 - 200$  und  $7437 = 7237 + 200$  liegt. Er findet

$$P(7037 \leq X \leq 7437) > 303/304 = 0,9967 .$$

Auf die vier Werte, die in seinem Modell ausserhalb dieses Intervalls liegen, geht er allerdings trotz dieser grossen Wahrscheinlichkeit nicht ein. Nun berechnet er für die 100 Jahre  $(303/304)^{100} = 0,7193$ . Diese Wahrscheinlichkeit scheint ihm nun so gross zu sein, dass er feststellt, es sei eigentlich kein Wunder, dass die Zahl der Knabengeburten während 82 aufeinanderfolgenden Jahren in so engen Grenzen liege: "Ergo non est miraculum numerum masculorum limitem hunc 82 annis non excessisse..." — Die hier zusammenfassend dargestellten Überlegungen von Nikolaus Bernoulli kann man dem Briefwechsel mit s'Gravesande [14] entnehmen. — Ähnlich äussert er sich aber auch in

seinen Briefen an P.R. de Montmort (1678–1719). Man findet die beiden Briefe abgedruckt in der zweiten Auflage (1713) von Montmorts “Essai d’Analyse sur les jeux de hasard” [24]. Der zweite dieser Briefe enthält den Beweis des bereits erwähnten “Theorems von Nikolaus Bernoulli”. Nikolaus erinnert dabei auch daran, dass sein Onkel Jakob Bernoulli “une semblable chose dans son traité ‘De Arte conjectandi’, qui s’imprime à présent à Bâle” bewiesen hat. Jakob Bernoullis “Ars conjectandi” erschien postum in Basel 1713 [6, 7].

In diesen Briefen an Montmort arbeitet Bernoulli mit einem *leicht veränderten* Modell: “J’ai trouvé en examinant le catalogue des enfants nés à Londres depuis 1629 jusqu’à 1710 inclusivement, qu’il y a plus de mâles que de femelles; et qu’en prenant un milieu, la raison des mâles aux femelles est fort près de la raison de 18/17, un peu plus grande ...”. Auch aus diesem Modell werden wieder verschiedene Folgerungen gezogen; einige davon gehen über jene hinaus, die er aus dem ersten Modell erschliesst. (Näheres dazu z.B. in [16] oder [18].)

Zu diesen Modellen nun zwei Bemerkungen:

- Hätte er aus den von Arbuthnot verwendeten Originalzahlen den Quotienten aus der gesamten Zahl der Knabengebürten und der Gesamtzahl der Geburten beider Geschlechter berechnet, so wäre er für den Parameter  $p$  der Binomialverteilung auf den Schätzwert 0,5163 gekommen. Wie wir gesehen haben, hat er aber in einen seiner Modelle 0,5169 und im andern eben  $18/35 = 0,5143$  verwendet. Ferner hat er seinen Modellen eine fiktive Gesamtzahl von jährlich 14'000 zugrunde gelegt; den Originaldaten von Arbuthnot kann man jedoch entnehmen, dass in den 82 Beobachtungsjahren 56-mal eine kleinere — zum Teil eine wesentlich kleinere — Zahl von Geburten vorliegt und dass die Grenze von 14'000 erst gegen Ende der Tabelle in der Regel überschritten wird.
- Sowohl die Wahl des Schätzwertes  $18/35 = 0,5143$  als auch die Wahl von  $n = 14'000$  für die fiktive Anzahl der Geburten tragen dazu bei, dass das zugehörige Modell die Beobachtungen nicht ganz befriedigend wiedergibt: “... il y a une grande probabilité que les nombres des mâles et des femelles *tombent entre des limites encore plus petites que celles qu’on a observées*” schreibt Nikolaus Bernoulli selber in einem seiner Briefe an Montmort. — Nach unseren heutigen Massstäben würden wir *dieses Modell nicht mehr akzeptieren*. Wir würden die entsprechende Nullhypothese verwerfen, denn die beobachtete Schwankung der Daten ist signifikant grösser als sie nach seinem Modell sein sollte. In [2] hat F.J. Anscombe übrigens vor einigen Jahren gezeigt, dass die Untersuchung der entsprechenden 2-mal-82-Felder-Tafel der Daten von Arbuthnot mit dem Chi-Quadrat-Test zeigt, dass die Binomialverteilung *kein geeignetes Modell* für die Beschreibung dieser Daten liefert: Er fand  $\chi^2 = 170$  bei 81 Freiheitsgraden, was die Feststellung einer höchst signifikanten Abweichung von einem auf der Binomialverteilung beruhenden Modell erlaubt und kommentiert: “In fact his table shows more variability, not less, than the Bernoulli-trials hypothesis would imply:  $\chi^2 = 170$  with 81 degrees of freedom. A possible explanation is counting or copying errors in the data” [4\*].

Doch trotz dieser Einwände ist, wie wir bereits ausgeführt haben, der Beitrag von Nikolaus Bernoulli *hoch einzuschätzen*: Den heutigen Statistiker befriedigt vor allem das *Prinzipielle* an seinem Vorgehen: Modellbildung, Bestimmung eines Schätzwertes für den

Parameter  $p$  der Binomialverteilung, Schaffung von geeigneten mathematischen Hilfsmitteln. — Bei seinen Zeitgenossen scheinen seine Untersuchungen keine besondere Wertschätzung erfahren zu haben: Man hat wohl seine Kritik an Arbuthnot, die ja die mathematische Seite betreffen, eher so aufgefasst, als ob er sich gegen das Wirken der Vorsehung aussprechen wollte.

## 5 Daniel Bernoulli testet die Lage der Planetenbahnen

Auch ganz andere Fragestellungen sind mit Überlegungen angegangen worden, in denen wir heute einen Signifikanztest erkennen können. So hat zum Beispiel Daniel Bernoulli (1700–1782), ein anderer Neffe von Jakob Bernoulli, die Lage der Planetenbahnen einem statistischen Test unterworfen. Die Académie Royale de Paris hatte nämlich 1734 nochmals die folgende Preisaufgabe ausgeschrieben: “Quelle est la cause physique de l’inclinaison, des Plans des Orbites des Planètes par rapport au plan de l’Equateur de la révolution du Soleil autour de son axe; et d’où vient que les inclinaison de ces orbites sont différentes entre elles?” [4] — Daniel Bernoulli stellt zunächst fest, dass die Bahnen von Merkur und Erde einen Winkel von  $6^{\circ}54'$  miteinander bilden, während die andern damals bekannten Planeten mit der Erdbahn kleinere Winkel bilden. Bevor er mit dem physikalischen Wissen seiner Zeit an das Problem herangeht, stellt er sich die *Frage*: “... pourrait-on, pour ne pas alléguer d’autres raisons, attribuer à un pur hazard le peu d’inclinaison de toutes les orbites au plan de l’équateur solaire?” [4] — Dieser Frage will er so nachgehen: “Je chercherai de toutes les Orbites planétaires, les deux qui se coupent sous le plus grand angle, après quoi je calculerai quelle probabilité il y a, que toutes les autres Orbites soient renfermés dans les limites de ces deux orbites. On verra par-là que cette probabilité est si petite quelle doit passer pour une *impossibilité morale*.” [5\*]

Es ist nicht schwierig, die in Frage stehende Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Folgen wir etwa den Ausführungen von van der Waerden in [5]: “... Wenn diese Planetenbahnen rein zufällig verteilt wären, so wären auch ihre Pole über die ganze Kugel gleich verteilt. Die Nordpole wären dann gleich verteilt auf einer Halbkugel. Was ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass sie alle in einem Kreis vom Radius  $6^{\circ}54'$  liegen?” — Berechnet man jetzt den Flächeninhalt dieser Kalotte und bildet man das Verhältnis zu jenem der Halbkugel, so erhält man gerade die gesuchte Wahrscheinlichkeit:  $2 \cdot 10^{-11}$ . Daniel Bernoulli hat diese Wahrscheinlichkeit allerdings falsch berechnet (vgl. z.B. [5, 18]). Doch auch seine Ergebnisse führen ihn zum Schluss, dass eine derartige Lage der Planetenbahnen eine “*impossibilité morale*” darstellt. Weil diese Wahrscheinlichkeit so klein ist und (!) weil er eine bessere Erklärung (nämlich die physikalische) zur Verfügung hat, verwirft er — wie wir heute sagen würden — die Nullhypothese “Zufall” [6\*].

## 6 Einige Bemerkungen zur weiteren Entwicklung

Arbuthnot, s’Gravesande, Nikolaus und Daniel Bernoulli haben ihre Entscheidungen statistisch gesichert. Sie haben indessen *keine Theorie der Testverfahren* geschaffen, ebensowenig eine besondere Terminologie, um ihr Vorgehen zu beschreiben. All’ dies ist, wie

gesagt, im wesentlichen in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts entstanden [37]. Die modernen Testtheoretiker haben dabei kaum an jene frühen Überlegungen angeknüpft; von starkem Einfluss dürfte hingegen die *Theorie der Beobachtungsfehler* gewesen sein, die gerade im 19. Jahrhundert in Geodäsie und Astronomie eine grosse Rolle gespielt hat. Auf diese Entwicklungen kann hier nicht mehr eingegangen werden; nur auf einige Einzelheiten wollen wir noch kurz hinweisen.

Pierre Simon de Laplace (1749–1827) bringt in [21, 22] sehr viele Beispiele, die eigentlich wiederum Signifikanztests darstellen. Er nimmt dabei auch die bereits behandelten Beispiele wieder auf, erweitert und ergänzt sie. Doch auch diese von Laplace dargestellten “Test”-Probleme erscheinen uns heute — ähnlich wie die oben mitgeteilten seiner Vorgänger — weitgehend als Kuriosa. — Auf eine uns wichtig scheinende Überlegung möchten wir indessen besonders hinweisen, denn es scheint, dass Laplace der erste ist, der sie deutlich ausspricht [22]: Man verwirft eine Nullhypothese *nicht nur* deshalb, weil ein Ereignis eingetreten ist, das eine sehr *kleine Wahrscheinlichkeit* hätte, wenn die Nullhypothese wahr wäre, *sondern auch*, weil man eine *plausiblere*, eine *bessere Erklärung* für das Eintreffen des Ereignisses hat, eben eine Alternative.

Wir wollen uns den Sachverhalt an einem Beispiel aus der Abschieds(!)-Vorlesung [19] klar machen: Es seien die 15 Buchstaben A A E E I I L N R S S T U V V, einzeln auf Kärtchen notiert, gegeben; dazu noch ein Strich /, der am Anfang oder am Ende oder auch zwischen zwei Buchstaben hingestellt werden kann und in diesem Falle dann zwei “Wörter” erzeugt.

Man betrachte nun die Anordnung RSSUANEVAI / EITLV. — “Zufall!”, wird man sagen; und in der Tat ist diese Anordnung mit einer Tabelle von Zufallszahlen “erwürfelt” worden. Die Wahrscheinlichkeit, gerade diese Anordnung zu erhalten, ist äusserst klein; sie ist gegeben durch

$$p = 1 / [16! / (2!)^5] ,$$

beträgt also etwa eineinhalb Billionstel. Wenn ich nun aber die Anordnung VALE / UNIVERSITAS mit diesen 16 Kärtchen erzeuge? Die Wahrscheinlichkeit, gerade diese zu erzeugen, wenn ich einfach ein bisschen “spiele”, ist natürlich genau so klein. Aber jetzt wird man sagen: “Nein, kein Zufall! Da hat einer die Kärtchen hingelegt, der im Begriffe ist, von der Uni Abschied zu nehmen und sich eines schönen Studentenliedes aus wonnevoller Jugendzeit erinnert!” Und natürlich trifft dies zu. Man wird also geneigt sein, für *diese* Anordnung die Nullhypothese “Zufall” zu verwerfen und zwar genau aus den zwei Gründen: Kleine Wahrscheinlichkeit *und* bessere Erklärung durch eine Alternative [7\*]. W. Stegmüller fasst [34] diese sehr wichtige Bedingung für die “logischen Grundlagen des statistischen Schliessens” im folgenden *Imperativ* zusammen: “*Verwirf eine Hypothese h nicht bereits dann, wenn das, was eingetroffen ist, sich unter der Annahme von h nur selten ereignet; verwirf h nur dann, wenn du eine bessere Hypothese hast.*”

Im Jahre 1840 ist in Paris ein allgemein verständlich geschriebenes Buch erschienen, von welchem H. Freudenthal in [12] mit vollem Recht sagt, dass es “eine *neue Epoche* in der mathematischen Statistik eingeleitet” habe. Es handelt sich um die “*Principes généraux de statistique médicale*” [13] von L.D.J. Gavarret (1809–1890), Arzt und Professor für

Physique médicale an der Medizinischen Fakultät von Paris. — Numerische Methoden hatte man natürlich in der Medizin schon lange verwendet, z.B. um Therapie-Erfolge zu beurteilen. Ja, schon in einem Buch des Engländers R. Mead von 1702 findet man einen Satz, der dem Mathematiker zunächst so hübsch erscheint, dass man dessen Zitierung kaum unterdrücken kann: "... in kurzer Zeit wird sich der Arzt vom Quacksalber dadurch unterscheiden, dass er Mathematik gelernt hat ...". (Allerdings fährt Mead weiter: "der, der dieser Eigenschaft entbehrt, wird genau so lächerlich dastehen wie einer ohne Griechisch oder Latein"! [8\*]) — Gavarret aber zog nun recht eigentlich in den Kampf, um *probabilistische* Methoden in die medizinische Statistik einzuführen: "Le premier travail d'un observateur qui constate une différence dans les résultats de deux longues séries d'observations, consiste à *chercher si l'anomalie n'est qu'apparente ou si elle est réelle ... Le calcul des probabilités peut être employé avec le plus grand succès à éclairer cette question ...*" Der Hauptteil seines Buches ist denn auch der geduldigen Widerlegung der Vorurteile der Ärzteschaft gegen die Verwendung probabilistischer Methoden gewidmet. Im Anhang bringt er dann in leicht verständlicher, mathematisch weitgehend korrekter Form zahlreiche ausführlich kommentierte Beispiele, vor allem um *Konfidenzintervalle* (er spricht vom "erreur possible") für unbekannte Wahrscheinlichkeiten zu berechnen und um den *Test* für den *Unterschied zweier relativer Häufigkeiten* durchzuführen. Allerdings beruhen alle seine Formeln — er hat sie von seinem Lehrer an der Ecole Polytechnique von Paris, von S.D. Poisson (1781–1840), übernommen [28] — auf der Normalverteilung und setzen somit eine *grosse* Zahl von Beobachtungen voraus. Ferner arbeitet er auch — wie wir heute sagen würden — immer mit demselben Konfidenzoeffizienten (0,9953) und mit demselben Signifikanzniveau ( $\alpha = 1 - 0,9953 \approx 5\%$ ). — Mit den Bemühungen Gavarrets war indessen die mathematische Statistik in Medizin und Biologie noch keineswegs eingeführt. Das lag nicht nur daran, dass für manche Situation, in der man heute einen Test zur Verfügung hat, noch gar kein Testverfahren existierte; der Grund dürfte eher sein, dass Gavarrets Formeln stets eine grosse Zahl von Beobachtungen voraussetzen, was in der Praxis nicht immer der Fall ist.

Wir haben zu Beginn unserer Ausführungen darauf hingewiesen, wie *naheliegend* eigentlich die Grundgedanken sind, die einem Signifikanztest eigen sind und wie sich diese — vor allem beim Verwerfen der Nullhypothese — auch in fast alltäglichen Überlegungen wiederfinden. Mit einem abschliessenden Beispiel wollen wir noch zeigen, wie *selbstverständlich* man auch bei *naturwissenschaftlichen* Überlegungen zu einem Signifikanztest kommen kann. Wir entnehmen es den "Untersuchungen über das Sonnenspektrum und die Spectren der chemischen Elemente" [20] von G. Kirchhoff (1824–1887) aus dem Jahre 1861, auf die wir durch G. Pólya [29] aufmerksam geworden sind.

Das Spektrum des Sonnenlichtes zeigt bekanntlich eine grosse Zahl dunkler Linien, die Fraunhoferschen Linien. Schematisch:

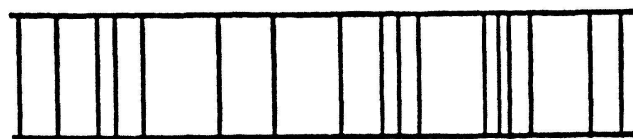


Fig. 1

Verdampft man im Labor Eisen bei hohen Temperaturen, so sendet das Eisen Licht aus: Man erkennt eine Folge von hellen Linien. Schematisch:

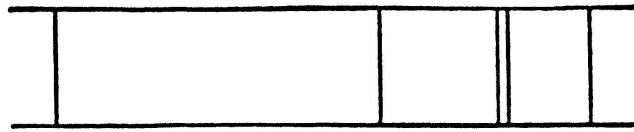


Fig. 2

Kirchhoff hat solche Linien untersucht und festgestellt: “Besonders auffallend ist, dass an den Orten aller von mir beobachteten Eisenlinien sehr ausgezeichnete dunkle Linien im Sonnenspectrum sich befinden”. Er hat also im Prinzip ein Bild der folgenden Art erhalten:

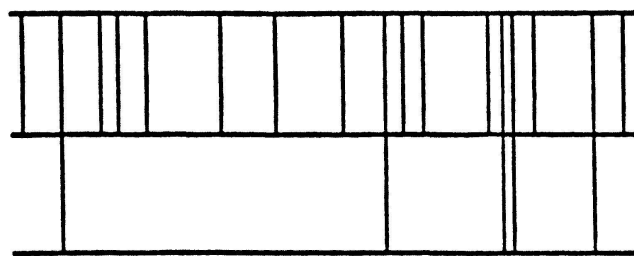


Fig. 3

Man kann diese Koinzidenzen leicht erklären, wenn man annimmt, dass die Sonnenatmosphäre Eisendampf enthält und dieser etwas von jenem Licht, das der Kern der Sonne ausstrahlt, absorbiert. Dieser Sachverhalt wird im Emissions- und Absorptionsgesetz von Kirchhoff ausgedrückt, das unter anderem besagt, dass ein Gas gerade jene Spektrallinien zu absorbieren vermag, die es selbst aussenden könnte.

Aber, so hat sich Kirchhoff gefragt, beruhen diese Koinzidenzen nicht einfach auf *Zufall*? Vielleicht sind zwei Spektrallinien, die uns zu koinzidieren scheinen, in Wirklichkeit durchaus verschieden und bloss zufällig so nahe beieinander, dass sie uns zusammenzufallen scheinen, weil die Genauigkeit unserer Beobachtungen begrenzt ist. Kirchhoff hat auf relativ einfache Art [9\*] die Wahrscheinlichkeit für ein solches zufälliges scheinbares Koinzidieren berechnet und gefunden: “Nun haben wir etwa 60 Eisenlinien mit dunklen (Linien) zu koinzidieren geschienen; die Wahrscheinlichkeit, dass dies ein Werk des Zufalls ist, ist hiernach erheblich kleiner als  $1/10^{18}$ ”. — Angesichts dieser äusserst kleinen Wahrscheinlichkeit hat er den Zufall ausgeschlossen: “*Es muss also eine Ursache vorhanden sein, welche diese Koinzidenzen bewirkt. Es lässt sich eine Ursache angeben ...* Die Beobachtungen scheinen mir hiernach die Gegenwart von Eisendämpfen mit einer so grossen Sicherheit zu beweisen, als sie bei den Naturwissenschaften überhaupt erreichbar ist.” — Wiederum haben wir also eine Situation, wie wir sie nun schon oft angetroffen haben: Es liegt eine Nullhypothese vor, nämlich “Koinzidenzen durch Zufall entstanden”. Tatsächlich ist ja in solchen Lagen der Zufall “*die immer gegenwärtige Konkurrenzvermutung*”, wie G. Pólya in [29] sagt. Es liegt weiter eine Alternative vor, die auf dem Emissions- und Absorptionsgesetz beruht, hier also physikalischer Art ist. Und wieder liegen die beiden Gründe für die Verwerfung der Nullhypothese vor: sehr kleine Wahrscheinlichkeit für das beobachtete Ereignis, falls die Zufallshypothese gültig wäre, und die Möglichkeit einer plausibleren, besseren Erklärung durch die Alternative.

Heute ist die mathematische Statistik in sehr vielen Bereichen der Wissenschaft und der Technik fest etabliert. Sie stellt eine "Zusammenfassung von Methoden dar, welche uns erlauben, vernünftige Entscheidungen im Falle von Ungewissheit zu treffen" [36]. — Mehr denn je sollte man aber gerade heute, wo soviel hilfreiche Software für den Einsatz der mathematischen Statistik zur Verfügung steht, die Mahnung beachten, die C.V.L. Charlier schon vor vielen Jahrzehnten, als es noch gar keine Computer gab, in seinen "Vorlesungen" ausgesprochen hat: "Die mathematische Statistik ist *kein Automat*, in den man nur das statistische Material hineinzustecken hat, um nach einigen mechanischen Manipulationen das Resultat wie an einer Rechenmaschine abzulesen." Und ein zeitgenössischer Statistiker, Lothar Sachs, meint wohl Ähnliches, wenn er in [31] eine etwas frechere Tonart anschlägt und meint: "Manch einer gebraucht allerdings die Statistik auch heute noch wie ein Betrunkener eine Strassenlaterne benützt — mehr zur Unterstützung als zur Erleuchtung."

Es sind dies Ermahnungen, auf die man im Unterricht und bei der Beratung von Anwendern immer wieder hinweisen muss. Werden sie nicht beachtet, so werden Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, jene Gebiete, die man heute gemeinsam so sehr zutreffend als "*Stochastik*" bezeichnet [10\*] nie jenem Stellenwert zustreben, den wohl Pierre Simon de Laplace anvisierte, als er in seinem "Essai philosophique des probabilités" von 1814 [22] die Stochastik mit den Worten pries: "On verra qu'il n'est point de science plus digne de nos méditations et qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de l'instruction publique."

### Anmerkungen

- 1\* Astragale ἀστράγαλοι sind die Sprungbeine von Schaf oder Ziege. Sie sind in der Antike neben den eigentlichen Würfeln zur Divination oder zum Spiel verwendet worden. Ihre gerundeten Stirnseiten sind nicht in Betracht gezogen worden, so dass bloss die vier Längsseiten eine Rolle spielten. — Venuswurf: Ein Wurf mit vier Astragalen, wobei jeder eine andere Seite zeigte.
- 2\* Gregor von Tours: "Unus tantum ex ipsis, qui eos increpabat ne ista committerent, remansit inlaesus. Quod si hoc quis *fortuitu* evenisse iudicat, *cernat, unum insontem plurimis evasisse de noxiis.*"
- 3\* Christian Huygens (1629–1695) publizierte 1657 eine kleine, streng systematische Abhandlung über Glücksspiele "De ratiociniis in aleae ludo."
- 4\* Mit "his table" ist die Tafel in der Publikation von Arbuthnot gemeint. — Es handelt sich um eine 2-mal-82-Felder-Tafel; die Anzahl der Freiheitsgrade ist dann  $(2 - 1) \cdot (82 - 1) = 81$ .
- 5\* "impossibilité morale": Jakob Bernoulli definiert in seiner "Ars conjectandi" [6]: "*Moralisch gewiss* ist etwas, dessen Wahrscheinlichkeit nahezu der vollen Gewissheit gleichkommt, so dass ein Unterschied nicht wahrgenommen werden kann. *Moralisch unmöglich* dagegen ist das, was nur soviel Wahrscheinlichkeit besitzt, als dem moralisch Gewissen an der vollen Gewissheit mangelt."
- 6\* Ähnliche Überlegungen sind 1767 von John Michell gemacht worden betreffend die Existenz von Doppelsternen: Man findet viel häufiger Sterne nahe beieinander — eben Doppelsterne — als dies bei Gleichverteilung wahrscheinlich wäre [23]. — D'Alembert (1717–1783) hat übrigens die Argumentation von Daniel Bernoulli als wertlos betrachtet [1,10]. Er ist zwar auch der Meinung, es würden physikalische Ursachen vorliegen; er weist aber darauf hin, dass andere mögliche Anordnungen auch nur eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit für sich hätten: "... mathématiquement parlant, elle soit aussi possible que toute autre combinaison où l'on ne verrait aucun ordre ni aucune singularité." — Man beachte dazu unsere Ausführungen im 6. Abschnitt (W. Stegmüller!) und die folgende Anmerkung.
- 7\* Deutlich weist z.B. G. Noether [25] in diese Richtung: "... we observe 10 heads in 10 tosses of a coin. While it is true that such an occurrence has only a very small probability when tossing a fair coin, *this by itself is not sufficient reason to reject the null hypothesis. Equally important is the fact that a much more plausible explanation exists, namely cheating.*"

- 8\* Zitiert nach O.B. Sheynin, On the History of Medical Statistics; in: Arch. for Hist. of Exact Sci. 26 (1982)
- 9\* G. Kirchhoff teilt seine diesbezüglichen Überlegungen in [20] mit. Eine sehr hübsche Darstellung des Sachverhalts mit allen notwendigen Veranschaulichungen gibt G. Pólya in [29].
- 10\* Stochastik von *στοχάζεσθαι* "mutmassen". Eine frühe Belegstelle für "Stochastik" als "Kunst des Mutmassens" findet man in einem Dialog Platons. — J. Bernoulli bezeichnet [6] ausdrücklich als "Ars conjectandi sive stochastice", als "Vermutungs- oder Mutmassungskunst" (coniectare: vermuten).

## Literatur

- [1] D'Alembert, J.: Oeuvres complètes. Paris 1821
- [2] Anscombe, F.J.: Computing in statistical science through APL. Berlin 1981
- [3] Arbuthnot, J.: An Argument for Divine Providence, taken from the constant regularity observ'd in the births of both sexes. Phil. Trans. 27, 184–190 (1710)
- [4] Bernoulli, D.: Recherches physiques et astronomiques sur le problème posé pour la seconde fois par l'Académie Royale des Sciences de Paris. Recueil des pièces qui ont remporté le prix de l'Acad. R. des Sci. 3, 93–122, 123–144 (1734)
- [5] Bernoulli, D.: Die Werke von Daniel Bernoulli 2, bearbeitet und kommentiert von L.P. Boukaert und B.L. van der Waerden. Basel 1982
- [6] Bernoulli, J.: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 107/8. Leipzig 1899
- [7] Bernoulli, J.: Die Werke von Jakob Bernoulli 3, bearbeitet von B.L. van der Waerden. Basel 1975
- [8] Cardano, G. "Liber de ludo aleae". In: Cardani op. omnia. Hrsg. C. Spon. Lyon 1663 (Repr.: Stuttgart-Bad Canstatt 1966)
- [9] Cardano, G.: Des Girolamo Cardano von Mailand eigene Lebensbeschreibung, übersetzt von H. Hefele. München 1969
- [10] Daston, L.J.: D'Alembert's critique of probability theory. Hist. Math. 6, 259–279 (1979)
- [11] Fisher, R.A.: The Design of experiments. London 1935
- [12] Freudenthal, H. e.a.: Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. In: Behnke, H., e.a.: Grundzüge der Mathematik IV. Göttingen 1966
- [13] Gavarrat, L.D.J.: Principes généraux de statistique médicale. Paris 1840
- [14] s'Gravesande, G.J.: Oeuvres phil. et math. Amsterdam 1774
- [15] Hald, A.: Nicholas Bernoulli's Theorem. Int. Stat. Rev. 52, 93–99 (1984)
- [16] Hald A.: A history of probability and statistics and their applications before 1750. New York 1989
- [17] Hoyrup, J.: Sixth-Century intuitive probability: The statistical significance of a miracle. Hist. Math. 10, 80–84 (1983)
- [18] Ineichen R.: Zufällige oder nicht zufällige Abweichungen? Beispiele aus der Vorgeschichte der mathematischen Statistik. Bull. Soc. Fribourg 79, 96–127 (1990)
- [19] Ineichen, R.: Statistisch gesichert? Über die Anfänge des statistischen Schliessens. Abschiedsvorlesung Universität Freiburg 1991. Freiburger Universitätsreden, neue Folge Nr. 49. Freiburg 1992
- [20] Kirchhoff, G.: Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. Abh. Kgl. Akad.d.Wissensch. Phys. Kl.; Berlin 1861, 63–95
- [21] Laplace, P.S.: Oeuvres complètes 7. Paris 1886
- [22] Laplace, P.S.: Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit (Essai philosophique sur les probabilités). Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 233. Leipzig 1932 (Repr.: Leipzig 1986)
- [23] Michell, J.: An inquiry into the probable parallax, and magnitude of the fixed stars ... Phil. Trans. 57 (1767)
- [24] de Montmort, P.R.: Essai d'analyse sur les jeux de hasard. Paris 1713 (Repr.: New York 1980)
- [25] Noether, G.: Introduction to Statistics — A fresh approach. Boston 1971

- 
- [26] Ore, O.: Cardano, the gambling scholar, with a translation from the latin of Cardano's book on games of chance by S.H. Gould. Princeton 1953
- [27] Pearson, K.: The history of statistics in the 17th and 18th centuries. Hrsg. E.S. Pearson. London 1978
- [28] Poisson, S.D.: Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile. Paris 1837
- [29] Pólya, G.: Mathematik und plausible Schliessen, 2. Basel 1963
- [30] Rabinovitch, N.L.: The One and the Many: Early stochastic reasoning in philosophy. *Ann. Sc.* 34, 331–344 (1977)
- [31] Sachs, K.: Statistische Methoden — Ein Soforthelfer. Berlin 1970
- [32] Schneider, I.: Wahrscheinlichkeit und Zufall bei Kepler. *Philosoph. naturalis* 16, 40–63 (1976)
- [33] Schneider, I.: Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933 — Einführungen und Texte. Darmstadt 1988
- [34] Stegmüller, W.: Statistisches Schliessen. In: Probleme der Wissenschaftsgesch. und analyt. Philosoph. IV. Berlin 1973
- [35] Stigler, St.M.: The History of Statistics. Cambridge 1986
- [36] Wallis, W.A. e.a.: Methoden der Statistik — Anwendungsbereiche, 400 Beispiele, Verfahrenstechniken. Hamburg 1969
- [37] Witting, H.: Mathematische Statistik. In: Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990. Braunschweig 1990

Professor Robert Ineichen  
Institut de mathématiques  
Université de Fribourg  
CH-1700 Fribourg