

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 47 (1992)

**Artikel:** Über Gandhis Primzahlformel  
**Autor:** Baxa, Christoph  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43914>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---



---

## Über Gandhis Primzahlformel

---



---

Christoph Baxa  
Universität Wien

Christoph Baxa wurde 1966 in Wien geboren. Nach Besuch der Schule studierte er bis 1990 an der Universität Wien Mathematik. Derzeit arbeitet er dort an seiner Dissertation.

Ziel dieser Note ist es, einen neuen, sehr kurzen Beweis für die folgende Formel anzugeben, die ein interessantes Gegenbeispiel zur weitverbreiteten Meinung, es gäbe keine Primzahlformeln, darstellt.

**Satz** *Es sei  $b \in [2, +\infty)$ . Dann gilt*

$$1 < b^{p_{n+1}} \left( -\frac{1}{b} + \sum_{d|p_1 \dots p_n} \frac{\mu(d)}{b^d - 1} \right) < 2,$$

woraus

$$p_{n+1} = \left[ 1 - \frac{1}{\log b} \log \left( -\frac{1}{b} + \sum_{d|p_1 \dots p_n} \frac{\mu(d)}{b^d - 1} \right) \right]$$

folgt.

**Primzahlen haben die Mathematik seit jeher in besonderer Weise beschäftigt. Ihre Verteilung innerhalb der Reihe der natürlichen Zahlen ist voller Geheimnisse, und die damit zusammenhängenden Fragen haben in der Geschichte der Mathematik immer wieder die besten Kräfte zu intensiven Bemühungen angeregt. Trotz all den umfangreichen Arbeiten sind viele der Fragen aber bis heute unbeantwortet geblieben. Offensichtlich handelt es sich hier um ganz besonders schwierige und tiefliegende Probleme. — Auf den ersten Blick scheint die im vorliegenden Beitrag behandelte Primzahlformel von J. M. Gandhi dieser Erfahrung zu widersprechen. Sie liefert nämlich eine prinzipielle Möglichkeit, die Primzahlen zu berechnen. Für die praktische Bestimmung der Folge der Primzahlen  $p_1, p_2, \dots$  ist sie allerdings von beschränktem Wert, denn zur Berechnung der  $n + 1$ -sten Primzahl  $p_{n+1}$  benötigt man alle vorhergehenden Primzahlen  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . In seinem Artikel liefert Chr. Baxa einen neuen, sehr kurzen Beweis von Gandhis Formel. *ust***

Dabei bezeichnet  $p_n$  die  $n$ -te Primzahl und  $\mu$  die Möbiusfunktion. Man beachte folgendes: Es sei  $b \in (1, +\infty)$ . Falls es für  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein  $m \in \mathbb{N}$  gibt, sodaß  $1 < b^m \alpha < b$ , dann ist  $m$  dadurch eindeutig festgelegt.

J. M. Gandhi gab diese Formel (für den Fall  $b = 2$ ) 1966 am internationalen Mathematikerkongreß in Moskau an. Sein Beweis findet sich in [1]. C. Vanden Eynden [5] gab 1972 einen Beweis mit elementaren zahlentheoretischen Mitteln an. S. W. Golomb publizierte 1974 [2] und 1976 [3] zwei Beweise, die wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe verwenden.

Entscheidend für den Beweis des Satzes wird das folgende Lemma von I. M. Winogradow [6] sein.

**Lemma** *Es sei  $(G, +)$  eine abelsche Gruppe,  $S$  eine endliche Menge,  $g : S \rightarrow \mathbb{N}$  und  $f : S \rightarrow G$  zwei Abbildungen. Dann gilt:*

$$\sum_{\substack{s \in S \\ g(s)=1}} f(s) = \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d) \sum_{\substack{s \in S \\ d|g(s)}} f(s).$$

**Beweis**

$$\sum_{d=1}^{\infty} \mu(d) \sum_{\substack{s \in S \\ d|g(s)}} f(s) = \sum_{s \in S} f(s) \sum_{\substack{d \geq 1 \\ d|g(s)}} \mu(d) = \sum_{\substack{s \in S \\ g(s)=1}} f(s).$$

**Beweis des Satzes** Setzt man im Lemma  $(G, +) = (\mathbb{C}, +)$  und  $g(s) = (s, N)$ , erhält man

$$\sum_{\substack{s \in S \\ (s, N)=1}} f(s) = \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d) \sum_{\substack{s \in S \\ d|(s, N)}} f(s) = \sum_{d|N} \mu(d) \sum_{\substack{s \in S \\ d|s}} f(s).$$

Dabei bezeichnet  $(s, N)$  den größten gemeinsamen Teiler von  $s$  und  $N$ . Setzt man nun für  $S = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ ,  $N = p_1 \dots p_n$  und  $f(s) = b^{-s}$ , so erhält man nach Durchführung des Grenzüberganges  $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{\substack{s \geq 1 \\ (s, p_1 \dots p_n)=1}} b^{-s} = \sum_{d|p_1 \dots p_n} \mu(d) \sum_{\substack{s \geq 1 \\ d|s}} b^{-s} = \sum_{d|p_1 \dots p_n} \frac{\mu(d)}{b^d - 1},$$

woraus

$$b^{p_{n+1}} \left( -\frac{1}{b} + \sum_{d|p_1 \dots p_n} \frac{\mu(d)}{b^d - 1} \right) = 1 + \sum_{\substack{s > p_{n+1} \\ (s, p_1 \dots p_n)=1}} b^{p_{n+1}-s}$$

folgt. Nun ist

$$0 < \sum_{\substack{s > p_{n+1} \\ (s, p_1 \dots p_n)=1}} b^{p_{n+1}-s} < \sum_{k=1}^{\infty} b^{-k} = \frac{1}{b-1} \leq 1,$$

woraus sich sofort die erste Behauptung ergibt. Aus dieser folgt die zweite durch einfache Umformung.

K. S. S. Namboodiripad [4] gab 1971 eine Verallgemeinerung von Gandhis Formel an. Sein Beweisgang kann durch die Verwendung obigen Lemmas stark verkürzt werden.

**Literatur**

- [1] J. M. Gandhi, Formulae for the  $n$ th prime, in Proc. Washington State Univ. Conf. Number Theory 1971, 96–106
- [2] S. W. Golomb, A direct interpretation of Gandhi's formula, Amer. Math. Monthly 81 (1974) 752–754
- [3] S. W. Golomb, Formulas for the next prime, Pacific J. Math. 63 (1976) 401–404
- [4] K. S. S. Namboodiripad, A note on formulae for the  $n$ th prime, Monatsh. Math. 75 (1971) 256–262
- [5] C. Vanden Eynden, A proof of Gandhi's formula for the  $n$ th prime, Amer. Math. Monthly 79 (1972) 625
- [6] I. M. Winogradow, Elemente der Zahlentheorie, Oldenburg, München 1956, 17–18

Christoph Baxa  
Lerchengasse 14/2/8  
A-2340 Moedling